108 ispitnih zadataka za vježbu podjeljenih po oblastima - detaljno raspisana rješenja ovih zadataka možete skinuti sa stranice ff.unze.ba\nabokov\za_vjezbu

Sadržaj

1 Determinante

1. Izračunati determinantu $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 6 & x^2+3 \end{vmatrix}$, a zatim riješiti nejednačinu $D < 2x$.

2. Izračunati determinantu $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & -6 & x^2-3 \end{vmatrix}$, a zatim riješiti nejednačinu $D < 2x$.

3. Izračunati determinantu $D = \begin{vmatrix} x^2-8 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ -4 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, a zatim riješiti nejednačinu $D < -x$.

4. Izračunati determinantu $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & x^2-1 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, a zatim riješiti nejednačinu $D > x$.

5. Izračunati determinantu $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & -7 & 6 & 2 \\ -4 & 6 & -9 & -6 \\ 5 & -7 & 12 & x^2 \end{vmatrix}$, a zatim riješiti nejednačinu $D > -2x$.

6. Izračunati determinantu $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & -7 & 6 & 2 \\ -4 & 6 & x^2-13 & -6 \\ 5 & -7 & 12 & 7 \end{vmatrix}$, a zatim riješiti nejednačinu $D < 4x$.

2 Matrične jednačine

7. Riješiti matričnu jednačinu $BX = A + I$ ako je $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 7 & -3 \\ 6 & 9 & -1 \end{bmatrix}$ i $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

8. Riješiti matričnu jednačinu $2I + BX = A$ ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ -3 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ i $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

9. Riješiti matričnu jednačinu $-3X = 2AX + I$ ako je $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ i $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

10. Riješiti matričnu jednačinu $AX+I=-3X$ ako je $A=\begin{bmatrix} 11 & -2 & -13 \\ -6 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ i $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

11. Riješiti matričnu jednačinu $I+AX=-2X$ ako je $A=\begin{bmatrix} -8 & -2 & 9 \\ -3 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ i $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

12. Riješiti matričnu jednačinu $-2X=3AX-I$ ako je $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ i $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

13. Riješiti matrične jednačine

(a) $X\cdot(-2)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+X\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -8 \\ 7 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$;

(b) $X\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -7 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}=X\cdot(-1)+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 7 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}X=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}-2X$;

(d) $3X=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ -7 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}X+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

14. Riješiti matrične jednačine

(a) $CXA+XB=A$ ako su $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 6 & -3 & -9 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ i $C=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$;

(b) $CXB+AX=C$ ako su $A=\begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -4 & -2 & -6 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 4 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ i $C=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$;

(c) $AXC+XB=C$ ako su $A=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ i $C=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$.

15. Riješiti matrične jednačine

$$(a)\ A^{-1}XB = 2A^{-1}X + I \text{ ako su } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$(b)\ AXB^{-1} = 2XB^{-1} - I \text{ ako su } A = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

3 Sistemi linearnih jednačina

16. Rješiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} x - y + z &= 3 \\ x - y - z &= 4 \\ x + y - z &= 5 \\ x + y + z &= 6 \ . \end{aligned}$$

17. Rješiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} x - y + z &= 2 \\ x - y - z &= 3 \\ x + y - z &= 4 \\ x + y + z &= 5 \ . \end{aligned}$$

18. Rješiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ x - y - z &= 2 \\ x + y - z &= 3 \\ x + y + z &= 4 \ . \end{aligned}$$

19. Riješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - x_5 &= 10 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 20 \\ -3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 &= -27 \ . \end{aligned}$$

20. Riješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 - 3x_5 &= -2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 &= 3 \ . \end{aligned}$$

21. Riješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 8x_4 - 12x_5 &= -11 \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 10x_4 + 15x_5 &= 7 \\ -3x_1 - 5x_2 + 10x_3 + 20x_4 + 30x_5 &= 25. \end{aligned}$$

22. Riješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 8x_4 + 12x_5 &= -10 \\ 3x_1 + 7x_2 - 15x_3 + 30x_4 + 45x_5 &= -43 \\ -2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 12x_4 - 18x_5 &= 13. \end{aligned}$$

23. Riješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 4x_4 - 16x_5 &= -9 \\ 2x_1 + 5x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 44x_5 &= -29 \\ -4x_1 - 7x_2 + 14x_3 + 14x_4 + 56x_5 &= 30. \end{aligned}$$

24. Riješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 16x_4 - 4x_5 &= -8 \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 20x_4 + 5x_5 &= 7 \\ 4x_1 + 9x_2 - 18x_3 + 72x_4 - 18x_5 &= -37. \end{aligned}$$

25. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra λ

(a)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 10 \\ -3x_1 + 5x_2 - x_3 - \lambda(\lambda-1)\,x_4 &= 9-\lambda \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 18 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + \lambda(\lambda-1)\,x_4 &= \lambda - 9 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 4 \\ -3x_1 + 14x_2 - 10x_3 - \lambda(\lambda-3)\,x_4 &= -\lambda-6 \\ 3x_1 - 14x_2 + 10x_3 &= 9 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + \lambda(\lambda-3)\,x_4 &= \lambda+16 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -8 \\ -4x_1 + 8x_2 + x_3 - \lambda(\lambda+2)\,x_4 &= 37-\lambda \\ 2x_1 - 9x_2 + 5x_3 &= -28 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + \lambda(\lambda+2)\,x_4 &= \lambda \end{aligned}$$

26. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra λ

(a)

$$\begin{aligned} -x + 6y + (\lambda+3)z &= 21 \\ -x + 3y + 2z &= 9 \\ x + 3y + 2\lambda z &= \lambda + 13. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} -x + 8y + (\lambda+4)z &= 29 \\ -x + 4y + 3z &= 13 \\ x + 4y + (2\lambda-1)z &= \lambda + 16. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} -x + 10y + (\lambda+5)z &= 37 \\ -x + 5y + 4z &= 17 \\ x + 5y + (2\lambda-2)z &= \lambda + 19. \end{aligned}$$

27. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra λ

(*a*)
$$\begin{aligned} \lambda x + \ \ 2y + \ \ z &= 3 \\ -9x - 2\lambda y + 3z &= \lambda \\ 8x + \ \ \lambda y + 2z &= 6. \end{aligned}$$

(*b*)
$$\begin{aligned} 2x + (2\lambda - 4)y + (\lambda - 3)z &= 8 \\ 2x + \ \ (\lambda - 2)y \qquad\qquad\quad &= 5 \\ -3x \qquad\qquad\quad + (\lambda - 3)z &= -3. \end{aligned}$$

(*c*)
$$\begin{aligned} x + \qquad 2y + \qquad \lambda z &= 1 \\ 2x + (\lambda + 1)y + (2\lambda + 2)z &= 2 \\ -3x - \qquad 6y + (4 - 2\lambda)z &= -6. \end{aligned}$$

28. Riješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 &= 12. \end{aligned}$$

29. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra λ

(*a*)
$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\quad + \ \ x_3 + \ \ x_4 &= 1 \\ 2x_1 + (2 - \lambda)x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 7 - \lambda \\ x_1 + (2 - \lambda)x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 &= 3 - \lambda\ . \end{aligned}$$

(*b*)
$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 \qquad\qquad\quad &= -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + \ \ (\lambda - 1)x_4 &= -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + (2\lambda - 2)x_4 &= 2\ . \end{aligned}$$

4 Vektorski prostor

30. Dat je skup $\mathcal{B}$ i vektor u

$$(a)\ \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\};\ u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$(b)\ \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\};\ u = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Provjeriti da li je skup $\mathcal{B}$ linearno nezavisan. Objasniti zašto je $\mathcal{B}$ baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$? Vektor u izraziti kao linearnu kombinaciju vektora iz baze $\mathcal{B}$ (drugim riječima, odrediti koordinate vektora u u odnosu na bazu $\mathcal{B}$).

31. Date su dvije baze $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$. Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ ima koordinate

(a) $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$ (gdje su $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$ i $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$);

(b) $\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ (gdje su $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ i $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$);

(c) $\begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ (gdje su $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ i $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$);

(d) $\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ (gdje su $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ i $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$).

Odrediti koordinate vektora v u odnosu na bazu $\mathcal{B}'$.

32. Odrediti sve vrijednosti parametra m tako da vektori

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} m-2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} m-2 \\ m-2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} m-2 & 1 & m-2 \end{pmatrix}^\top$;

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} m-1 \\ m-1 \\ m-1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ m-1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & m-1 \end{pmatrix}^\top$;

nisu baza (ne čine bazu) vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$. Za najveću dobijenu vrijednost parametra m izraziti vektor $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

33. Ako je $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ jedna baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$, dokazati da i vektori $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ također čine bazu prostora $\mathbb{R}^3$ i izraziti vektor $\vec{c}$ preko vektora baze $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ ako su

(a) $\vec{b}_1 = \vec{a}_2 + 3\vec{a}_3$, $\vec{b}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + 2\vec{a}_3$, $\vec{b}_3 = 2\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + 6\vec{a}_3$ i $\vec{c} = -\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + 2\vec{a}_3$;

(b) $\vec{b}_1 = \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3$, $\vec{b}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + 2\vec{a}_3$, $\vec{b}_3 = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + 4\vec{a}_3$ i $\vec{c} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$.

34. Za koje vrijednosti parametra m vektori

(a) $\vec{a} = (2m, 1+m, 1)^\top$, $\vec{b} = (-m, 1, m)^\top$ i $\vec{c} = (m, 1, m-2)^\top$;

(b) $\vec{a} = (m, -m, 1)^\top$, $\vec{b} = (-m, m, 2m+2)^\top$ i $\vec{c} = (m, m+1, 1-m)^\top$;

(c) $\vec{a} = (2m, 1-m, 1)^\top$, $\vec{b} = (-2m, m, 2m+2)^\top$ i $\vec{c} = (m, 1+m, 1-m)^\top$;

čine bazu trodimenzionalnog vektorskog prostora?

35. Neka je $\mathcal{B} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ jedna baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$. Dokazati da je i skup

$\mathcal{B}' = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ također baza prostora $\mathbb{R}^3$ gdje su

(a) $\vec{b}_1 = 14\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + 32\vec{a}_3$, $\vec{b}_2 = 16\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + 36\vec{a}_3$ i $\vec{b}_3 = -41\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 - 93\vec{a}_3$.

(b) $\vec{b}_1 = 22\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + 39\vec{a}_3$, $\vec{b}_2 = -24\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - 43\vec{a}_3$ i $\vec{b}_3 = -2\vec{a}_1 - 3\vec{a}_3$.

(c) $\vec{b}_1 = 15\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + 33\vec{a}_3$, $\vec{b}_2 = 3\vec{a}_1 + 6\vec{a}_3$ i $\vec{b}_3 = -29\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 - 63\vec{a}_3$.

Odrediti i koordinate vektora $\vec{a}_2$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}'$ (drugim riječima napisati vektor $\vec{a}_2$ kao linearnu kombinaciju vektora iz baze $\mathcal{B}'$).

36. Date su dvije baze $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$.

(a) Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ ima koordinate $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$ (gdje su $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$ i $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$).

(b) Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ ima koordinate $\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ (gdje su $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ i $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$).

(c) Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ ima koordinate $\begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ (gdje su $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ i $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$).

Odrediti koordinate vektora v u odnosu na bazu $\mathcal{B}'$.

5 Limesi

37. Bez upotrebe H'Lopitalovog pravila izračunati limese

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{3x^2 - 10x + 3}{2x^2 - 7x + 3}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^3 x}$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to 7} \frac{2x^2 - 13x - 7}{-2x^2 + 11x + 21}$;

(d) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^3 x}{\cos^2 x}$; (e) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{5x^2 - 3x - 2}{7x^2 - 10x + 3}$; (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^3 x}{\sin^2 x}$;

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{3x^2 - 14x - 5}$; (h) $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^3 x}$.

38. Bez upotrebe H'Lopitalovog pravila izračunati limese

(a) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{-5x^2 - 30x - 40}{-3x^2 + 6x + 24}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to -4} \frac{-4x^2 - 12x + 16}{-2x^2 - 10x - 8}$;

(c) $\displaystyle\lim_{x\to -6} \frac{3x^2 + 12x - 36}{2x^2 + 10x - 12}$; (d) $\displaystyle\lim_{x\to -8} \frac{5x^2 + 35x - 40}{-2x^2 - 6x + 80}$.

39. Bez upotrebe H'Lopitalovog pravila izračunati limese

$$(a)\ \lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}; \qquad (b)\ \lim_{x\to 9}\frac{4-\sqrt{2x-2}}{3-\sqrt{x}}.$$

6 Izvodi

40. Odrediti prvi izvod funkcije

$$(a)\ y=\ln\frac{x^2-1}{x+1}+\operatorname{arc\,tg} x^2 \qquad (b)\ y=\ln\frac{x}{x-1}+\arcsin x^2 \qquad (c)\ y=\ln\frac{x^2}{x+1}+\operatorname{tg} x^2$$

7 Jednačina tangente i normale na krivu

41. Odrediti jednačinu tangentne i normale

(a) na krivu $x^2+y^2-2x+4y-3=0$;

(b) na krivu $x^2+y^2+4x-2y+3=0$;

u tačkama u kojima kriva siječe x-osu.

8 Ispitivanje funkcija

42. Odrediti ekstreme, prevojne tačke te intervale konveksnosti i konkavnosti funkcija

$$(a)\ y=\frac{(x-3)^3}{(x-4)^2} \qquad (b)\ y=\frac{(x-2)^3}{(x+1)^2}$$

43. Odrediti kosu asimptotu sljedećih funkcija

$$(a)\ y=\frac{3x^4-x}{x^3+2}; \qquad (b)\ y=\frac{x^4+1}{x^3-1}; \qquad (c)\ y=\frac{2x^2-3x+4}{x-2}: \qquad (d)\ y=\frac{2x^3+4}{x^2-x+1}.$$

44. Odrediti definiciono područje, ekstreme, prevojne tačke, te intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije

$$(a)\ y=\frac{3x^2-15x+108}{x-5}; \qquad (b)\ y=\frac{2x^2-6x+2}{x-3}; \qquad (c)\ y=\frac{4x^2+8x+1}{x+2}.$$

45. Ispitati i nacrtati grafik sljedećih funkcija

$$(a)\ y=\frac{x-2}{x^2-8x+16}; \qquad (b)\ y=\frac{x-5}{x^2-2x+1};$$

$$(c)\ y=\frac{x-3}{x^2-4x+4}; \qquad (d)\ y=\frac{x-1}{x^2-10x+25};$$

46. Ispitati i grafički predstaviti sljedeće funkcije

(a) $y=\dfrac{x^3-2}{2x^2}$ (ima greška u rješenju ovog zadataka - prvi integral nije dobar);

(b) $y=\dfrac{x^2+10}{x^2+4x+4}$.

47. Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik $\qquad y=\dfrac{3x^3-1}{(x+1)^3}$.

48. Odrediti parametre a i b tako da je prava

(a) $y = x - 4$ kosa asimptota funkcije $y = \dfrac{(ax+b)^4}{x^3}$;

(b) $y = 27x + 9$ kosa asimptota funkcije $y = \dfrac{(ax+b)^3}{x^2}$;

(c) $y = 4x + 4$ kosa asimptota funkcije $y = \dfrac{(ax+b)^2}{x}$;

(d) $y = 64x - 27$ kosa asimptota funkcije $y = \dfrac{a^2x^3 + b^3x^2 + 1}{x^2}$.

49. Odrediti ekstreme, prevojne tačke te intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije

$$(a)\ y = \frac{\ln x}{x}; \qquad (b)\ y = \frac{1+\ln x}{x^2}; \qquad (c)\ y = \frac{1-\ln x}{x^2}; \qquad (d)\ y = \frac{1+\ln x}{\ln x};$$

$$(e)\ y = \frac{2+\ln x}{6x^2}; \qquad (f)\ y = \frac{3+\ln x}{x}.$$

50. Odrediti ekstreme, prevojne tačke te intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije

$$(a)\ y = x^2e^{-\frac{x}{3}}; \qquad (b)\ y = xe^{-\frac{1}{x}}; \qquad (c)\ y = xe^{-\frac{x^2}{4}}; \qquad (d)\ y = xe^{-\frac{x}{2}}.$$

51. Odrediti ekstreme, prevojne tačke te intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije

$$(a)\ y = \frac{e^{2x}}{x+1}; \qquad (b)\ y = \frac{e^{3x}}{1+e^{-x}}; \qquad (c)\ y = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}; \qquad (d)\ y = \frac{e^{3x}}{1-x}.$$

52. Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik $\qquad y = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x} - e^{-x}}$.

53. Ispitati i grafički predstaviti sljedeće funkcije

$$(a)\ y = (2x+1)\,e^{-\frac{2}{x}}; \qquad (b)\ y = (\frac{1}{2}x - 1)\,e^{-\frac{1}{x}}.$$

54. Odrediti definiciono područje, znak te ekstreme funkcije

$$(a)\ y = \ln\frac{x}{x^2-1}; \qquad (b)\ y = \ln\frac{x-1}{x^2+1}; \qquad (c)\ y = \ln\frac{x^2-1}{x+1}; \qquad (d)\ y = \ln\frac{x+1}{x-1}.$$

55. Ispitati i grafički predstaviti sljedeće funkcije

(a) $y = \dfrac{\ln^2 x + 1}{x^2}$;

(b) $y = \ln\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2+1}$.

56. Ispitati i grafički predstaviti sljedeće funkcije

$$(a)\ y = \frac{3x^2-1}{(x^2+1)^3}; \qquad (b)\ y = \ln(2x^2 - x^4); \qquad (c)\ y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

57. Ispitati i grafički predstaviti sljedeće funkcije

$$(a)\ y = \ln(2x - x^3); \qquad (b)\ y = \frac{3x-1}{(x^2+1)^2}; \qquad (c)\ y = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}.$$

58. Ispitati i grafički predstaviti sljedeće funkcije

$$(a)\ y=\frac{3x-1}{(x+1)^3};\qquad (b)\ y=\ln\frac{2-x^2}{x};\qquad (c)\ y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x}.$$

9 Ekstremi funkcija dvije promjenjive

59. Odrediti stacionarne tačke funkcije

$$(a)\ z=\frac{1}{2}x^2-xy+xy^2-\frac{1}{2}x^2y;\qquad (b)\ z=9x^2-\frac{9}{2}x^2y+6xy^2-12xy;$$

$$(c)\ z=x^2y-\frac{1}{2}xy^2-xy+\frac{1}{2}y^2;\qquad (d)\ z=6x^2y-\frac{9}{2}xy^2-12xy+9y^2.$$

60. Naći ekstreme funkcije $z=x^3+3xy^2-15x-12y$.

61. Odrediti ekstreme funkcije

$$(a)\ z=x^2+y^3+4x\sqrt{x^3}-3y;\qquad (b)\ z=3\ln\frac{x}{6}+\ln(12-y-x)+2\ln y;$$

$$(c)\ z=x^3+y^2-3x+4\sqrt{y^5};\qquad (d)\ z=2\ln x+\ln(12-x-y)+3\ln\frac{y}{6}.$$

62. Naći ekstreme funkcije $z=\frac{1}{3}x^3-2xy+x+3y^2-4y$

10 Neodređeni integrali

63. Odrediti integrale $(a)\ I=\displaystyle\int\frac{\sin x\cdot\cos x}{e^x}\mathrm{d}x,\quad (b)\ \int\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x.$

64. Odrediti integrale

$$(a)\ \int(x^2+2x)\ \cos 2x\,\mathrm{d}x,\qquad (b)\ \int(\frac{3}{2}x^2+3x)\ \sin 3x\,\mathrm{d}x,$$

$$(c)\ \int x\operatorname{arc\,tg}x\,\mathrm{d}x,\qquad (d)\ \int x\operatorname{arc\,ctg}x\mathrm{d}x.$$

65. Odrediti integrale

$$(a)\ \int\frac{(5x-3)\,dx}{\sqrt{-34+12x-x^2}},\qquad (b)\ \int\frac{(4x+2)\,dx}{\sqrt{-22+10x-x^2}},$$

$$(c)\ \int\frac{(2x-1)\,dx}{\sqrt{-7+6x-x^2}},\qquad (d)\ \int\frac{(3x-7)\,dx}{\sqrt{-33+12x-x^2}}.$$

66. Odrediti integrale

$$(a)\ \int\frac{\mathrm{d}x}{3x-4\sqrt{x}},\qquad (b)\ \int\frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x^3}+4},$$

$$(c)\ \int\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x}},\qquad (d)\ \int\frac{\sqrt[6]{x+1}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}.$$

67. Odrediti integrale

$$(a)\ \int x\ln(x-1)\mathrm{d}x,\qquad (b)\ \int\ln(1+x^2)\mathrm{d}x,$$

$$(c)\ \int\ln(x^2-1)\mathrm{d}x,\qquad (d)\ \int(x+1)\ln x\mathrm{d}x.$$

68. Odrediti integral

$$(a) \int \frac{7x-17}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x \qquad (b) \int \frac{9x-2}{x^2-x-6}\mathrm{d}x \qquad (c) \int \frac{11x+14}{x^2+3x-4}\mathrm{d}x$$

69. Odrediti integrale

$$(a) \int \frac{x-1}{\sqrt{-1+4x-x^2}}\mathrm{d}x; \qquad (b) \int \frac{4x^2+11x-2}{x^3-3x-2}\mathrm{d}x.$$

70. Odrediti integral

$$(a) \int \frac{6x^2-19x+9}{(x-2)(x^2-5x+6)}\mathrm{d}x \qquad (b) \int \frac{8x^2+39x+11}{(x+2)(x^2-x-6)}\mathrm{d}x \qquad (c) \int \frac{8x^2-35x+3}{(x^2+1)(x-7)}\mathrm{d}x$$

71. Odrediti integral $\displaystyle\int \frac{x^3-3}{x^4+10x^2+25}\mathrm{d}x$.

11 Određeni integral

72. Izračunati integrale

$$(a) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x|\cos x|\,\mathrm{d}x, \qquad (b) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x|\cos x|\,\mathrm{d}x,$$

$$(c) \int_{0}^{\pi} x|\sin x|\,\mathrm{d}x, \qquad (d) \int_{0}^{\pi} e^x|\sin x|\,\mathrm{d}x.$$

12 Primjena određenog integrala

73. Primjenom određenog integrala odrediti površinu figure koju ograničava

(a) x-osa zajedno sa linijama $x+3y-3=0$, $x=-3$ i $x=6$;

(b) x-osa zajedno sa linijama $-x-2y+2=0$, $x=-4$ i $x=2$;

(c) y-osa zajedno sa linijama $x+y-1=0$, $y=3$ i $y=-2$.

74. Izračunati površinu ravne figure koja je ograničena linijama $y=-x^2$ i $x-y-2=0$.

75. Izračunati površinu ravne figure koja je ograničena parabolama

(a) $y=4-x^2$ i $y=x^2-2x$; $\quad (b)$ $y=-x^2-4x$ i $y=x^2+2x$;

(c) $x=y^2-1$ i $x=-y^2-2y+3$; $\quad (d)$ $x=y^2-4y+3$ i $x=-y^2+2y+3$.

76. Odrediti površinu figure ograničene

(a) hiperbolom $xy=4$ i pravom $y=-x+5$.

(b) parabolom $y=x^2+4x$ i pravom $x-y+4=0$.

(c) parabolom $4y=8x-x^2$ i pravom $4y=x+6$.

(d) hiperbolom $xy=6$ i pravom $y=7-x$.

77. Odrediti površinu figure ograničene parabolom $4x=8y-y^2$ i pravom $4x=y+6$.

78. Primjenom određenog integrala izračunati površinu figure koju ograničavaju linije

(a) $x + 2y - 5 = 0$, $2x + y - 7 = 0$ i $y = x + 1$;

(b) $-2x - y + 8 = 0$, $-x - 2y + 7 = 0$ i $y = x + 2$;

(c) $y + 2x + 7 = 0$, $x + 2y + 5 = 0$ i $y = x - 1$.

79. Izračunati površinu ravne figure ograničene parabolom $y = ax^2 + bx$ koja sadrži tačke $A(-3; -3)$ i $B(-1; -3)$ i pravom $x = y - 4$.

13 Diferencijalne jednačine. Diferencijalne jednačine prvog reda.

80. Provjeriti da li je data funkcija rješenje date diferencijalne jednačine

(a) $y = \sqrt{x}$, $2yy' = 1$; (b) $\ln x \ln y = c$, $y \ln y \, \mathrm{d}x + x \ln x \, \mathrm{d}y = 0$;

(c) $s = -t - \frac{1}{2}\sin 2t$, $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \operatorname{tg} t \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sin 2t$.

81. Ako znamo opšte rješenje od $4x^2 + y^2 = C^2$ - neke diferencijalne jednačine prvog reda, odrediti i grafički prikazati integralne krive (parcijalne integrale), koje prolaze kroz tačke $B_1(-1; 0)$, $B_2(0; -3)$ i $B_3(2; 0)$.

82. Odrediti tip diferencijalne jednačine:

(a) $yy' + xe^y = 0$; (b) $y + xy' = 4\sqrt{y'}$; (c) $y' - y\operatorname{tg} x + 2\sin x - 1 = 0$;

(d) $xy' - y = (x + y)\ln\frac{x + y}{x}$; (e) $xy' = y - xy\sin x$; (f) $(x^2 + 1)y' - xy^2 = xy(x^2 y - 1)$.

13.1 Diferencijalne jednačine sa razdvojenim promjenjivim.

Ove jednačine se mogu svesti na jedan od sljedećih oblika

$$y' = f(x)g(y)$$

ili

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}\mathrm{d}x + \frac{f_2(x)}{\varphi_2(x)}\mathrm{d}x = 0.$$

Poslije razdvajanja varijabli će svaki član jednakosti zavisiti samo od jedne varijable, pa ćemo opšte rješenje dobiti tako što ćemo integrirati svaki član posebno.

83. Odrediti opšte rješenje sljedećih diferencijalnih jednačina:

(a) $(x + 1)^3 \mathrm{d}y - (y - 2)^2 \mathrm{d}x = 0$ (b) $\frac{1}{\cos^2 x \, \cos y}\mathrm{d}x = -\operatorname{ctg} x \, \sin y \mathrm{d}y$

(c) $(\sqrt{xy} + \sqrt{x})y' - y = 0$ (d) $2^{x+y} + 3^{x-2y}y' = 0$.

84. Odrediti partikularno rješenje diferencijalne jednačine koji zadovoljavaju inicijalni uslov:

(a) $y\mathrm{d}x + \operatorname{ctg} x \mathrm{d}y = 0$, $y(\frac{\pi}{3}) = -1$;

(b) $s = s' \cos^2 t \ln s$, $s(\pi) = 1$.

85. Odrediti opšte rješenje sljedećih diferencijalnih jednačina:

(a) $xy' = y - xy\sin x;$ (b) $(xy^2 + 3x)\mathrm{d}x + (2x^2y - 5y)\mathrm{d}y = 0;$

(c) $3y'(x^2 - 1) - 2xy = 0;$ (d) $y - xy' = a(1 + x^2y');\ a = const.$

86. Odrediti opšte rješenje diferencijalnih jednačina:

(a) $(x^2y + x^2)\mathrm{d}x + (x^4y - y)\mathrm{d}y = 0;$ (b) $y' = 2^{2x+y}.$

87. Odrediti opšte rješenje sljedećih diferencijalnih jednačina

(a) $x^2(y+1)\mathrm{d}x + y^2(x-1)\mathrm{d}y = 0;$ (b) $4x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = x^2\mathrm{d}y;$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{4y}{x(y-3)}.$

88. Odrediti partikularno rješenje diferencijalne jednačine $(1 + x^3)\mathrm{d}y - x^2y\mathrm{d}x = 0$ koje zadovoljava inicijalni uslov $x = 1$, $y = 2$.

13.2 Homogene jednačine prvog reda.

Ove jednačine se mogu svesti na sljedeći oblika

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Homogene diferencijalne jednačine rješavamo tako što uvorimo smjenu $\dfrac{y}{x} = u$, iz čega slijedi da je $y = ux$, $y' = u'x + u$.

89. Odrediti opšte rješenje sljedećih diferencijalnih jednačina:

(a) $xy' + y = -x;$

(b) $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$ tako da zadovoljava uslov $y(1) = e;$

90. Odrediti opšte rješenje diferencijalnih jednačina:

(a) $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y;$ (b) $y^3y' + 3xy^2 + 2x^3 = 0;$

(c) $(3y^2 + 3xy + x^2)\mathrm{d}x = (x^2 + 2xy)\mathrm{d}y;$ (d) $(5y + 7x)\mathrm{d}y + (8y + 10x)\mathrm{d}x = 0.$

91. Odrediti opšte rješenje date diferencijalne jednačine

(a) $y' = \dfrac{x+y}{x-y};$ (b) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2;$

(c) $x\,dy - y\,dx = y\,dy;$ (d) $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}.$

13.3 Diferencijalne jednačine koje se svode na homogene.

Ove jednačine se mogu svesti na sljedeći oblika

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right).$$

Diferencijalne jednačine koje se svode na homogene rješavamo na sljedeći način:

(a) Ako je $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ tada uvodimo smjenu $a_1x + b_1y = u$ i kao rezultat dobijamo diferencijalnu jednačinu sa razdvojenim promjenjivim.

(b) Ako je $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ tada uvodimo smjenu $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$ gdje brojeve α i β dobijamo rejšenjem sistema:

$$\begin{aligned} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 &= 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

92. Odrediti opšte rješenje diferencijalnih jednačina:

(a) $(x - 2y + 1)y' = 2x - y + 1$; ($b$) $(2x + y + 1)y' = 4x + 2y + 3$;

(c) $(2x - 4y + 6)\mathrm{d}x + (x + y - 3)\mathrm{d}y = 0$; ($d$) $(x - y - 2)\mathrm{d}x + (2x - y - 5)\mathrm{d}y = 0$.

93. Rješiti diferencijalnu jednačinu

(a) $(2x - 5y + 3)\mathrm{d}x - (2x + 4y - 6)\mathrm{d}y = 0$;

(b) $(x - y - 1)\mathrm{d}x + (4y + x - 1)\mathrm{d}y = 0$;

(c) $(x + y)\mathrm{d}x + (3x + 3y - 4)\mathrm{d}y = 0$.

13.4 Linearne diferencijalne jednačina.

Ove jednačine se mogu svesti na sljedeći oblika

$$y' + p(x)y = q(x)$$

gdje su $p(x)$ i $q(x)$ neke funkcije po x-u. Rješavamo ih uvođenjem smjene $y = uv$, gdje su u i v dvije pomoćne funkcije, nakon čega dobijamo dvije jednačine sa razdvojenim promjenjivim, u odnosu na svaku od pomočnih funkcija.

94. Odrediti opšte rješenje diferencijalnih jednačina:

(a) $(1 + x^2)y' = x(2y + 1)$; (b) $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x$, tako da $y(1) = -1$;

(c) $y' + y\cos x = 0,5\sin 2x$; ($d$) $y' - \dfrac{xy}{1 + x^2} = \dfrac{x\sqrt{1 + x^2}}{x^2 - 2x + 2}$.

95. Odrediti opšte rješenje diferencijalnih jednačina:

(a) $(x^2 + 2x - 2y)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$; ($b$) $y'\cos x - y\sin x = x^3e^{x^2}$, uz uslov $y(0) = 1$.

96. Odrediti opšte rješenje diferencijalne jednačine

(a) $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x$ koje zadovoljava uslov $y(1) = 0$;

(b) $y' - y\,tg\,x = \dfrac{1}{cos\,x}$ koje zadovoljava uslov $y(0) = 0$;

(c) $xy' + y - e^x = 0$ koje zadovoljava uslov $y(a) = b$;

(d) $xy' - 3y = x^4 e^x$ koje zadovoljava uslov $y(1) = e$.

97. Rješiti diferencijalnu jednačinu $y' - y\operatorname{ctg} x = \sin x$.

98. Rješiti diferencijalnu jednačinu

(a) $y' + y\operatorname{tg} x = \cos x$;

(b) $x^2y^2y' + xy^3 = y^2$;

(c) $y' - y\,\sin 2x = e^{\sin^2 x}$.

99. Rješiti diferencijalnu jednačinu $(x-2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y + 2(x-2)^3$.

100. Rješiti diferencijalnu jednačinu

(a) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2xy = 4x$;

(b) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y + x^3 + 3x^2 - 2x$.

13.5 Bernulijeva diferencijalna jednačina.

Jednačina Bernulija

$$y' + p(x)y = y^n q(x)$$

se od linearne jednačine razlikuje samo u desnoj strani, i rješava se na potpuno isti način kao i linearna diferencijalna jednačina - pomoću smjene $y = uv$ ona se također svodi na dvije jednačine sa razdvojenim promjenjivim.

101. Riješiti diferencijalne jednačine:

(a) $xy' - x^2\sqrt{y} = 4y$; (b) $y' = xy^3 - y$, tako da prolazi kroz $A(0,1)$;

(c) $(1-x^2)y' = xy + xy^2$; (d) $y' + \dfrac{y}{4x} + y^3e^{\sqrt{x}} = 0$, ako je $y(1) = 1$.

102. Odrediti opšte rješenje diferencijalnih jednačina:

(a) $y' = y^4\cos x + y\operatorname{tg} x$; (b) $y' = \dfrac{3x^2}{x^3 + y + 1}$.

103. Odrediti opšte rješenje diferencijalne jednačine $2x^3y' = 2x^2y - y^3$.

104. Rješiti diferencijalnu jednačinu

(a) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{y}{x} = y^2$;

(b) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{1}{3}y = e^x y^4$;

(c) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = xy^3$.

13.6 Lagranžova diferencijalna jednačina.

Ove jednačine su oblika
$$y = xf(y') + g(y')$$
Rješavamo ih tako što uvodimo smjenu $y' = p$ ($\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x$), poslije čega obično dobijamo linearnu diferencijalnu jednačinu po x-u, pa uvodimo novu smjenu $x = uv$.

105. Riješiti diferencijalne jednačine:

(a) $y + xy' = 4\sqrt{y'}$; (b) $y'(2x - y) = y$;

(c) $y = xy' - 2 - y'$, tako da prolazi kroz $A(2, 5)$.

106. Odrediti opšte rješenje diferencijalnih jednačina:

(a) $2y + y'(2x + y') = 0$; (b) $y + \dfrac{1}{y'} = \dfrac{y}{x}$.

13.7 Klerova diferencijalna jednačina.

Ove jednačine su oblika
$$y = xy' + f(y')$$
i rješavaju se na potpuno isti način kao i Lagranžove diferencijalne jednačine - uvodimo smjenu $y' = p$ ($\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x$)...

107. Riješiti diferencijalne jednačine:

(a) $xy' + \sin y' - y = 0$; (b) $y - xy' - \dfrac{y'^2}{2} = 0$;

(c) $2y - 2xy' = a(\sqrt{1 + (y')^2} - y')$.

108. Odrediti opšte rješenje datih diferencijalnih jednačina

(a) $y - xy' - \dfrac{1}{2}y'^2 = 0$;

(b) $y'^2 - xy' + y = 0$;

(c) $(y - y'x)^2 = 1 + y'^2$;

(d) $y = y'x + \sqrt{4 + y'^2}$.