Safet Penjić, mr sc
Filozofski fakultet u Zenici

Uloga spektralnih projektora u rješavanju sistema homogenih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima i jedna zanimljiva primjena u biologiji

Sažetak

Za podprostore $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ prostora $\mathcal{V}$ kažemo da su komplementarni kadgod $\mathcal{V} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$ i $\mathcal{X} \cap Y = \{0\}$ i u tom slučaju za $\mathcal{V}$ kažemo da je direktna suma od $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$, i ovo označavamo sa $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$. Ovo je ekvivalentno sa tvrdnjom da za svaki $v \in \mathcal{V}$ postoje jedinstveni vektori $x \in \mathcal{X}$ i $y \in \mathcal{Y}$ takvi da $v = x + y$. Za proizvoljan takav v možemo definisati operator P sa $Pv = x$ i ovo je jedinstven linearni operator sa osobinom $Pv = x$ ($v = x + y$, $x \in \mathcal{X}$ i $y \in \mathcal{Y}$) koji je poznat pod imenom projektor na $\mathcal{X}$ paralelno sa $\mathcal{Y}$.

U ovom radu posmatrati ćemo spektralne projektore i iskoristiti njihove osobine za rješavanje sistema diferencijalnih jednačina oblika $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ čije rješenje treba zadovoljavati inicijalni uslov $\mathbf{y}(0) = \mathbf{c}$, i razmatrati ćemo slučaj samo kada je matrica sistema $\mathbf{A}$ dijagonabilna. Da bi smo došli do odgovarajućeg rješenja prvo smo uveli definiciju funkcije na dijagonabilnim matricama. Poslije toga je prezentirana jedna njihova zanimljiva primjena - primjena kod difuzije (širenja) ćelija u medicini i biologiji.

Na kraju rada je prezentiran MatLab kod funkcije koja daje rješenje sistema diferencijalnih jednačina kada nam je data matricu sistema $\mathbf{A}$, dimenzija 3×3 i matrica kolona datog uslova $\mathbf{c}$.

Ključne riječi: spektralni projektori, dijagonabilna matrica, sistem homogenih linearnih diferencijalnih jednačina

Role of spectral projectors in solving systems of homogeneous linear differential equations with constant coefficients and one interesting application in biology

Abstract

Subspaces $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ of a space $\mathcal{V}$ are said to be complementary whenever $\mathcal{V} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$ and $\mathcal{X} \cap Y = \{\mathbf{0}\}$, in which case $\mathcal{V}$ is said to be the direct sum of $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$, and this is denoted by writing $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$. This is equivalent to saying that for each $v \in \mathcal{V}$ there is unique vectors $x \in \mathcal{X}$ and $y \in \mathcal{Y}$ such that $v = x + y$. For arbitrary such v we can define operator P by $Pv = x$, and this operator is unique linear operator with property $Pv = x$ ($v = x + y$, $x \in \mathcal{X}$ and $y \in \mathcal{Y}$) and is called the projector onto $\mathcal{X}$ along $\mathcal{Y}$.

In this paper we will consider spectral projectors and we will use their properties to solve a systems of first-order linear differential equations, which can be write in matrix form as $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ with given initial value $\mathbf{y}(0) = \mathbf{c}$, and we will examine only case when matrix $\mathbf{A}$ of given system is diagonalizable. For these purpose we had firs defined functions of diagonalizable matrices. After that we have presented one interesting application - an application to diffusion of cells in medicine and biology.

In the end of paper we give MatLab code of function which solves systems of first-order linear differential equations when we have matrix of system $\mathbf{A}$ of form 3×3 and matrix-column of initial value $\mathbf{c}$.

Keywords: spectral projectors, diagonalizable matrix, systems of homogeneous linear differential equations

0 Osnovne definicije i rezultati

Definišimo oznake koje ćemo koristiti u nastavku teksta i prisjetimo se nekih osnovnih definicija i teorema iz Linearne algebre. Za $n\times n$ matricu $\mathbf{A}$, skalare λ i vektore $\mathbf{x}_{n\times 1}\neq \mathbf{0}$ koji zadovoljavaju jednakost $\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$, zovemo redom, _svojstvene vrijednosti_ i _svojstveni vektori_ matrice $\mathbf{A}$, i bilo koji takav par $(\lambda,\mathbf{x})$ nazivamo _svojstveni par_ matrice $\mathbf{A}$. Skup svih različitih svojstvenih vrijednosti ćemo označavati sa $\sigma(\mathbf{A})$.

Za dvije $n\times n$ matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ kažemo da su slične kadgod postoji nesingularna matrica $\mathbf{P}$ takva da je $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{B}$. Proizvod $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ se naziva _transformacija sličnosti_ na $\mathbf{A}$. Za kvadratnu matricu $\mathbf{A}$ kažemo da je _dijagonabilna_ kadgod je $\mathbf{A}$ slična dijagonalnoj matrici. _Potpun skup svojstvenih vektora_ matrice $\mathbf{A}$, koja je oblika $n\times n$, je bilo koji skup od n linearno nezavisnih svojstvenih vektora matrice $\mathbf{A}$. _Algebarska višestrukost_ svojstvene vrijednosti λ je broj puta u kojoj se ona ponovi kao korijen karakterističnog polinoma. Algebarsku višestrukost od λ ćemo označavati sa $alg\,mult_{\mathbf{A}}(\lambda)$. _Geometrijska višestrukost_ svojstvene vrijednosti λ je $dim\ ker(A-\lambda\mathbf{I})$. Geometrijsku višestrukost od λ ćemo označavati sa $geomult_{\mathbf{A}}(\lambda)$.

Tvrdnji (a.1)-(a.5) su poznate od ranije (iz Linearne algebre) a zainteresiranog čitaoca možemo uputiti na [2] (ili [5] ili [3]).

(a.1) $\lambda\in\sigma(\mathbf{A}) \iff \mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}$ je singularna matrica $\iff \det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0$

(a.2) $\{\mathbf{x}\neq\mathbf{0} \mid x\in ker(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\}$ je skup svih svojstvenih vektora pridruženih λ . Prostor $E=ker(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$ se naziva _svojstveni prostor_ matrice $\mathbf{A}$.

(a.3) Matrica $\mathbf{A}$, oblika $n\times n$, je dijagonabilna ako i samo ako $\mathbf{A}$ posjeduje potpun skup svojstvenih vektora.

(a.4) Matrica $\mathbf{A}$ oblika $n\times n$ sa k različitih svojstvenih vrijednosti $\sigma(\mathbf{A})=\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k\}$ je dijagonabilna ako i samo ako postoje matrice $\{\mathbf{G}_1,\mathbf{G}_2,...\mathbf{G}_k\}$ takve da

$$\mathbf{A}=\lambda_1\mathbf{G}_1+\lambda_2\mathbf{G}_2+...+\lambda_k\mathbf{G}_k \tag{1}$$

gdje matrice $\mathbf{G}_i$ imaju sljedeće osobine

(i) $\mathbf{G}_i$ je projektor na $ker(\mathbf{A}-\lambda_i I)$ paralelno sa $im(\mathbf{A}-\lambda_i I)$.

(ii) $\mathbf{G}_i\mathbf{G}_j=\mathbf{0}$ gdje je $i\neq j$.

(iii) $\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_2+...+\mathbf{G}_k=\mathbf{I}$.

Razvoj (1) je poznat pod imenom _spektralna dekompozicija_ matrice $\mathbf{A}$, a matrice $\mathbf{G}_i$ se nazivaju _spektralni projektori_ pridruženi matrici $\mathbf{A}$.

(a.5) Matrica $\mathbf{A}$, oblika $n\times n$, je dijagonabilna ako i samo ako je $alg\,mult_{\mathbf{A}}(\lambda)=geomult_{\mathbf{A}}(\lambda)$.

1 Funkcije definisane na dijagonabilnim matricama

Šta bi za kvadratnu matricu $\mathbf{A}$ značilo da napišemo $\sin\mathbf{A}$, $e^{\mathbf{A}}$, $\ln\mathbf{A}$ i slično. Naivan pristup bi mogao biti da jednostavno primijenimo danu funkciju na svaki element matrice $\mathbf{A}$ tako da

$$\sin\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} \sin a_{11} & \sin a_{12} \\ \sin a_{21} & \sin a_{22} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Ali radeći ovako ni jedna osobina kod matričnih funkcija se neće poklopiti sa njihovim skalarnim kolegama. Na primjer, kako je $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ za sve skalare x, voljeli bi da naša definicija od $\sin\mathbf{A}$ i $\cos\mathbf{A}$ kao rezultat dadne analogni matrični identitet $\sin^2\mathbf{A} + \cos^2\mathbf{A} = \mathbf{I}$ za sve kvadratne matrice $\mathbf{A}$. Jasno je da pristup po vrijednostima (2) neće imati ove osobine.

Drugi način da definišemo matričnu funkciju koja će imati iste osobine kao njihove skalarne kolege je da koristimo razvoje funkcija u beskonačne redove. Na primjer, posmatrajmo eksponencijalnu funkciju

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Formalno zamjenjivanje skalarnog argumenta z sa kvadratnom matricom $\mathbf{A}$ ($z^0 = 1$ je zamjenjeno sa $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$) kao rezultat daje beskonačan red matrica

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \dots \tag{3}$$

koji se naziva matrični eksponencijal. Iako ovaj pristup ima rezultat da matrične funkcije imaju iste osobine kao i njihove skalarne kolege, velika mana ovakvog pristupa je da svaki put moramo razmišljati o konvergenciji, i svaki put se sukobljavamo sa problemom opisa elemenata pomoću limesa.

Međutim, ako je $\mathbf{A}$ dijagonabilna matrica, tada je $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1} = \mathbf{P}\ diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\mathbf{P}^{-1}$, $\mathbf{A}^k = \mathbf{PD}^k\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\ diag(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)\mathbf{P}^{-1}$ gdje je

$$diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix},$$

pa je

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{PD}^k\mathbf{P}^{-1}}{k!} = \mathbf{P}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{D}^k}{k!}\right)\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\ diag(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})\mathbf{P}^{-1}.$$

Drugim riječima, ne moramo koristiti beskonačan red (3) da definišemo $e^{\mathbf{A}}$. Umjesto toga, definišemo $e^{\mathbf{D}} = diag(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n})$ i stavimo

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{P}e^{\mathbf{D}}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\ diag(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n})\mathbf{P}^{-1}.$$

Ova ideja se može poopštiti na bilo koju funkciju $f(z)$ koja je definisana na svojstvenim vrijednostima λ_i dijagonabilne matrice $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ definišući $f(\mathbf{D})$ da bude $f(\mathbf{D}) = diag(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n))$ i stavljajući

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{P}f(\mathbf{D})\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\ diag(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n))\mathbf{P}^{-1}.$$

Puno više o funkcijama definiranim na dijagonabilnim matricama možete pročitati u [2] na stranicama 525-540. Ovdje samo još sumirajmo tvrdnje koje ćemo koristiti u nastavku teksta:

Neka je $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ dijagonabilna matrica gdje su svojstvene vrijednosti u $\mathbf{D} = diag(\lambda_1 \mathbf{I}, \lambda_2 \mathbf{I}, \ldots, \lambda_k \mathbf{I})$ grupirane po ponavljanju. Za funkciju $f(z)$ koja ima konačnu vrijednost za svaki $\lambda_i \in \sigma(\mathbf{A})$ definišimo

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{P} f(\mathbf{D}) \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} f(\lambda_1)\mathbf{I} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2)\mathbf{I} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & f(\lambda_k)\mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1}$$

$$= f(\lambda_1)\mathbf{G}_1 + f(\lambda_2)\mathbf{G}_2 + \ldots + f(\lambda_k)\mathbf{G}_k, \tag{4}$$

gdje su $\mathbf{G}_i$ -evi i -te spektralne projekcije koje se mogu izračunati na neki od sljedećih načina:

(i) $\mathbf{G}_i$ je projektor na $ker(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$ paralelno sa $im(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$;

(ii) $\mathbf{G}_i = \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^{\mathrm{T}}$ gdje kolone matrice $\mathbf{X}_i$ formiraju bazu za $ker(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$, dok su $\mathbf{Y}_i^{\mathrm{T}}$ dobijeni iz matrice $\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1^{\mathrm{T}} \\ \hline \mathbf{Y}_2^{\mathrm{T}} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{Y}_k^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$ gdje je $\mathbf{P} = \left(\mathbf{X}_1 \mid \mathbf{X}_2 \mid \ldots \mid \mathbf{X}_k \right)$;

(iii) $\mathbf{PP}^{-1} = \mathbf{I} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 + \ldots + \mathbf{G}_k$;

(iv) $\mathbf{G}_i = \frac{1}{\pi_i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I}),$ gdje je $\pi_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} (\lambda_i - \lambda_j).$

2 Primjena linearne algebre u rješavanju sistema diferencijalnih jednačina

Sad razmatramo kako riješiti sistem linearnih diferencijalnih jednačina prvog reda sa konstantnim koeficijentima uz dati inicijalni uslov korištenjem svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora. Za konstante a_{ij}, cilj nam je da riješimo sljedeći sistem po nepoznatim funkcijama $y_i(t)$.

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n; \quad & y_1(0) &= c_1, \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n; \quad & y_2(0) &= c_2, \\ &\vdots & &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n; \quad & y_n(0) &= c_n. \end{aligned} \tag{5}$$

Kako je skalarni eksponent $y(t) = e^{\alpha t}c$ jedinstveno rješenje jedne diferencijalne jednačine oblika $y'(t) = \alpha y(t)$ sa inicijalnim uslovom $y(0) = c$, sasvim je prirodno da pokušamo iskoristiti matrični eksponent na potpuno isti način da riješimo sistem diferencijalnih jednačina. Započet ćemo tako što ćemo napisati sistem (5) u matričnom obliku $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{c}$ gdje je

$$\mathbf{y}=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{pmatrix},\ \mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\ i\ \ \mathbf{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Ako je matrica $\mathbf{A}$ dijagonabilna sa $\sigma(\mathbf{A})=\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k\}$ tada (4) garantuje da je

$$e^{\mathbf{A}t}=e^{\lambda_1 t}\mathbf{G}_1+e^{\lambda_2 t}\mathbf{G}_2+\dots e^{\lambda_k t}\mathbf{G}_k.$$

Sljedeće jednakosti se izvode iz osobina matrica $\mathbf{G}_i$ koje smo naveli u (a.4).

(i) $de^{\mathbf{A}t}/dt=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i e^{\lambda_i t}\mathbf{G}_i=\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\mathbf{G}_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k}e^{\lambda_i t}\mathbf{G}_i\right)=\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$

(ii) $\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}$ (zbog sličnih argumenata).

(iii) $e^{-\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}t}=e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t}=\mathbf{I}=e^{\mathbf{0}}$ (zbog sličnih argumenata).

Osobina (i) iznad $de^{\mathbf{A}t}/dt=\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$ nam osigurava da je funkcija $\mathbf{y}=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c}$ jedno od rješenja sistema $\mathbf{y}'=\mathbf{A}\mathbf{y}$ sa inicijalnim uslovom $\mathbf{y}(0)=\mathbf{c}$. Da bi vidjeli da je $\mathbf{y}=e^{\mathbf{A}}\mathbf{c}$ jedino rješenje, pretpostavimo da je $\mathbf{v}(t)$ neko drugo rješenje tako da je $\mathbf{v}'=\mathbf{A}\mathbf{v}$ sa $\mathbf{v}(0)=\mathbf{c}$. Diferencirajući $e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{v}$ dobit ćemo

$$\frac{d[e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{v}]}{dt}=-e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{A}\mathbf{v}+e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{v}'=\mathbf{0},$$

pa je $e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{v}$ konstanta za sve t. Za $t=0$ imamo $e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{v}\big|_{t=0}=e^{\mathbf{0}}\mathbf{v}(0)=\mathbf{I}\mathbf{c}=\mathbf{c}$, i time $e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{v}=\mathbf{c}$ za sve t. Množeći obe strane ove jednakosti sa $e^{\mathbf{A}t}$ i koristeći osobinu (iii) iznad $e^{-\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}t}=\mathbf{I}=e^{\mathbf{0}}$ možemo zaključiti da je $\mathbf{v}=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c}$. Time smo dobili da je $\mathbf{y}=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c}$ jedinstveno rješenje sistema diferencijalnih jednačina $\mathbf{y}'=\mathbf{A}\mathbf{y}$ sa inicijalnim uslovom $\mathbf{y}(0)=\mathbf{c}$.

Na kraju primijetimo da je $\mathbf{v}_i=\mathbf{G}_i\mathbf{c}\in ker(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})$ svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_i, tako da je rješenje za $\mathbf{y}'=\mathbf{A}\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(0)=\mathbf{c}$ u stvari

$$\mathbf{y}=e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1+e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2+\dots+e^{\lambda_k t}\mathbf{v}_k$$

i ovo rješenje je potpuno određeno svojstvenim parovima $(\lambda_i,\mathbf{v}_i)$. Može se dokazati da se $\mathbf{y}$ također može izraziti u obliku bilo kojeg potpunog skupa nezavisnih svojstvenih vektora. U sljedećoj teoremi sumirajmo prethodnu priču.

(2.01) Teorema (rješenje sistema diferencijalnih jednačina)

Ako je $\mathbf{A}$ *matrica oblika* $n\times n$ *koja je dijagonabilna sa* $\sigma(\mathbf{A})=\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k\}$ *tada jedinstveno rješenje sistema diferencijalnih jednačina* $\mathbf{y}'=\mathbf{A}\mathbf{y}$ *koje zadovoljava uslov* $\mathbf{y}(0)=\mathbf{c}$ *je dano sa*

$$\mathbf{y}=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c}=e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1+e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2+\dots+e^{\lambda_k t}\mathbf{v}_k$$

gdje je $\mathbf{v}_i$ *svojstveni vektor* $\mathbf{v}_i=\mathbf{G}_i\mathbf{c}$, *a* $\mathbf{G}_i$ *je i-ti spektralni projektor.*

(2.02) Problem

Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$x'=3x-y+z$$
$$y'=-x+5y-z$$
$$z'=x-y+3z$$

tako da rješenja zadovoljavaju inicijalne uslov $x(0)=1$, $y(0)=2$ i $z(0)=3$.

Rješenje: Dati sistem možemo napisati u obliku $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{b}$ gdje je

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ \mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ i\ \ \mathbf{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Lagano računanje nam daje svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$, $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2\}$.
Korištenjem formule

$$\mathbf{G}_i = \frac{1}{\pi_i}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(\mathbf{A}-\lambda_j\mathbf{I}),$$

za računanje spektralnih projektora, gdje je $\pi_i = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(\lambda_i - \lambda_j)$, imamo

$$\pi_1 = (\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3) = 3\cdot 4 = 12;$$
$$\pi_2 = (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3) = (-3)\cdot 1 = -3;$$
$$\pi_3 = (\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2) = (-4)\cdot(-1) = 4;$$

$$\mathbf{G}_1 = \frac{1}{12}(\mathbf{A}-3\mathbf{I})(\mathbf{A}-2\mathbf{I}) = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/3 & 1/6 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/6 & -1/3 & 1/6 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}_2 = \frac{1}{-3}(\mathbf{A}-6\mathbf{I})(\mathbf{A}-2\mathbf{I}) = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}_3 = \frac{1}{4}(\mathbf{A}-6\mathbf{I})(\mathbf{A}-3\mathbf{I}) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Lagana provjera nam pokazuje da je

$$\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_2+\mathbf{G}_3=\mathbf{I},\ \ \mathbf{G}_i\cdot\mathbf{G}_j=\mathbf{0}\ za\ i\neq j$$

kao i

$$\mathbf{A}=\lambda_1\mathbf{G}_1+\lambda_2\mathbf{G}_2+\lambda_3\mathbf{G}_3$$

pa su dobivene matrice $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ i $\mathbf{G}_3$ zaista spektralni projektori pridruženi matrici $\mathbf{A}$. Sad izračunajmo vektore $\mathbf{v}_1=\mathbf{G}_1\mathbf{b}$, $\mathbf{v}_2=\mathbf{G}_2\mathbf{b}$ i $\mathbf{v}_3=\mathbf{G}_3\mathbf{b}$:

$$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Možemo zaključiti da je

$$x(t) = 2e^{3t} - e^{2t}$$
$$y(t) = 2e^{3t}$$
$$z(t) = 2e^{3t} + e^{2t}$$

rješenje datog sistema diferencijalnih jednačina koje zadovoljava date inicijalne uslove. ◊

(2.03) Problem

Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$x' = 2x - y + z$$
$$y' = x + 2y - z$$
$$z' = x - z + 2z$$

tako da rješenja zadovoljavaju uslov $x(0) = 2$, $y(0) = 3$ *i* $z(0) = 4$.

Rješenje: Dati sistem možemo napisati u obliku $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{b}$ gdje je

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad i \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ su $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1\}$.

Uz pomoć formule

$$\mathbf{G}_i = \frac{1}{\pi_i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I}),$$

za računanje spektralnih projektora, gdje je $\pi_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} (\lambda_i - \lambda_j)$, dobijamo

$$\pi_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3) = 2;$$
$$\pi_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3) = -1;$$
$$\pi_3 = (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) = 2;$$

$$\mathbf{G}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}_2 = \frac{1}{-1}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}_3 = \frac{1}{4}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lagana provjera nam pokazuje da je

$$\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_3 = \mathbf{I}, \quad \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j = \mathbf{0} \ \textit{za } i \neq j$$

kao i

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{G}_1 + \lambda_2 \mathbf{G}_2 + \lambda_3 \mathbf{G}_3$$

pa su dobivene matrice $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ i $\mathbf{G}_3$ zaista spektralni projektori pridruženi matrici $\mathbf{A}$. Sad izračunajmo vektore $\mathbf{v}_1 = \mathbf{G}_1 \mathbf{b}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{G}_2 \mathbf{b}$ i $\mathbf{v}_3 = \mathbf{G}_3 \mathbf{b}$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Možemo zaključiti da je

$$x(t) = e^{3t} + e^{2t}$$
$$y(t) = e^{2t} + 2e^{t}$$
$$z(t) = e^{3t} + e^{2t} + 2e^{t}$$

rješenje datog sistema diferencijalnih jednačina koje zadovoljava date inicijalne uslove. ◊

3 Primjena kod difuzije

Važna tema u medicini i biologiji uključuje pitanje kako droga ili hemijski sastavi utiču na pomjeranje jedne ćelije na drugu u smislu širenja kroz zidove ćelije. Posmatrajmo dvije ćelije, kao što je prikazano na Figuri 1, gdje su obe izgubile dio nekog svog sastava. Jedinična količina sastava je ubačena u prvu ćeliju u vremenu $t = 0$, i kako vrijeme prolazi, njezin sastav se širi prema sljedećim pretpostavkama.

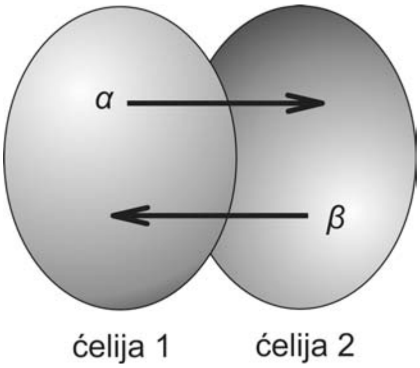

FIGURA 1
Širenje zidova jedne ćelija u odnosu na drugu.

U svakom trenutku vremena omjer (količina po sekundi) širenja jedne ćelije prema drugoj je proporcionalna koncentraciji (količina po jediničnoj zapremini) smjese ćeliji koja preda dio svog sastava - recimo omjer širenja ćelije 1 prema ćeliji 2 je α puta koncentracija u ćeliji 1, a omjer širenja ćelije 2 prema ćeliji 1 je β puta koncentracija u ćeliji 2. Pretpostavimo da je $\alpha, \beta > 0$.

(3.01) Problem

Odrediti koncentraciju smjese svake od ćelija u bilo kojem trenutku vremena t, i, posmatrajući duži vremenski period, odrediti koncentraciju stabilnog stanja.

Rješenje: Ako $u_k = u_k(t)$ označava koncentraciju sastava u ćeliji k u trenutku t, tada tvrdnja u gornjoj pretpostavci se može prevesti na sljedeći način:

$$\frac{du_1}{dt} = \textit{omjer koji ulazi} - \textit{omjer koji izlazi} = \beta u_2 - \alpha u_1,\ \textit{gdje}\ u_1(0) = 1,$$
$$\frac{du_2}{dt} = \textit{omjer koji ulazi} - \textit{omjer koji izlazi} = \alpha u_1 - \beta u_2,\ \textit{gdje}\ u_2(0) = 0.$$

U matričnim oznakama ovaj sistem je $\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u}$, $\mathbf{u}(0) = \mathbf{c}$, gdje

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix},\ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},\ i\ \ \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Karakteristična jednačina za $\mathbf{A}$ je $\lambda^2 + (\alpha + \beta)\lambda = 0$, tako da su svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = -(\alpha+\beta)$. Primijetimo da se svojstvene vrijednosti ne ponavljaju, pa je matrica $\mathbf{A}$ dijagonabilna. Koristeći funkciju $f(z) = e^{zt}$, spektralna reprezentacija (4) nam kaže da je

$$e^{\mathbf{A}t} = f(\mathbf{A}) = f(\lambda_1)\mathbf{G}_1 + f(\lambda_2)\mathbf{G}_2 = e^{\lambda_1 t}\mathbf{G}_1 + e^{\lambda_2 t}\mathbf{G}_2.$$

Spektralni projektori $\mathbf{G}_1$ i $\mathbf{G}_2$ se mogu izračunati po formuli $\mathbf{G}_i = \frac{1}{\pi_i}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(\mathbf{A}-\lambda_j\mathbf{I}),$ gdje je $\pi_i = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(\lambda_i - \lambda_j)$, gdje ćemo dobiti da je

$$\mathbf{G}_1 = \frac{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}}{-\lambda_2} = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix}\beta & \beta\\ \alpha & \alpha\end{pmatrix} \quad i \quad \mathbf{G}_2 = \frac{\mathbf{A}}{\lambda_2} = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ -\alpha & \beta\end{pmatrix},$$

pa je

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{G}_1 + e^{-(\alpha+\beta)t}\mathbf{G}_2 = \frac{1}{\alpha+\beta}\left[\begin{pmatrix}\beta & \beta\\ \alpha & \alpha\end{pmatrix} + e^{-(\alpha+\beta)t}\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ -\alpha & \beta\end{pmatrix}\right]$$

Sad imamo

$$\mathbf{u}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c} = \frac{1}{\alpha+\beta}\left[\begin{pmatrix}\beta & \beta\\ \alpha & \alpha\end{pmatrix} + e^{-(\alpha+\beta)t}\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ -\alpha & \beta\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},$$

iz čega slijedi

$$u_1(t) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}e^{-(\alpha+\beta)t} \quad i \quad u_2(t) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-e^{-(\alpha+\beta)t}).$$

Posmatrajući duži period, koncentracija u ćeliji će se stabilizirati u smislu da

$$\lim_{t\to\infty} u_1(t) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \quad i \quad \lim_{t\to\infty} u_2(t) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}. \qquad \Diamond$$

4 MatLab kod

Kod funkcije koja kao ulazne vrijednosti ima matricu sistema $\mathbf{A}$, i kolona matricu inicijalnog uslova $\mathbf{b}$ je:

```
 function [rjesenje] = rjesi_sistem(A,b)
% MatLab kod funkcije koja daje rješenje
% sistema diferencijalnih jednačina kada nam
% je data matricu sistema $A$, dimenzija
% $3\times 3$ i matrica kolona datog uslova $c$

I=[1 0 0; 0 1 0; 0 0 1];
syms x;
a=[0 0 0 0];
karak_pol=det(A-x*I);
% izvadimo koeficijente iz karakterističnog polinma
[koeficijenti,t]=coeffs(karak_pol);

% dodajmo koeficijente u vektor a
for i=1:numel(koeficijenti)
    a(i)=koeficijenti(i);
end

% odredimo nule karakterističnog polinoma
korijen=roots(a);
lambda1=(korijen(1));
```

```
lambda2=(korijen(2));
lambda3=(korijen(3));

% zaokružimo svojstvene vrijednosti na 4 decimalna mjesta
lambda1=round(lambda1*1000)/1000;
lambda2=round(lambda2*1000)/1000;
lambda3=round(lambda3*1000)/1000;

% izračunajmo pi_1, pi_2 i pi_3
pi_1=(lambda1-lambda2)*(lambda1-lambda3);
pi_2=(lambda2-lambda1)*(lambda2-lambda3);
pi_3=(lambda3-lambda1)*(lambda3-lambda2);

% izračunajmo G1, G2 i G3
G1=sym(1/pi_1)*(A-lambda2*I)*(A-lambda3*I);
G2=sym(1/pi_2)*(A-lambda1*I)*(A-lambda3*I);
G3=sym(1/pi_3)*(A-lambda1*I)*(A-lambda2*I);

% izračunajmo vektore v1, v2, v3
v1=G1*b;
v2=G2*b;
v3=G3*b;

% ispišimo rješenje diferencijalne jednačine
syms t;
disp('Rješenje datog sistema u matričnom obliku je');
rjesenje=exp(lambda1*t)*v1+exp(lambda2*t)*v2+exp(lambda3*t)*v3;
pretty(rjesenje)
end
```

Pažljivi čitalac će primijetiti da dati MatLab kod ne provjerava da li je unesena matrica dijagonabilna. Naravno funkcija i bez tog dijela radi dovoljno dobro a umetanje tog dijela koda ostavljamo kao zanimljivu vježbu.

Literatura

[1] J. L. Massey: *"Applied Digital Information Theory II"*, bilješke sa predavanja, skripta koja je korištena na predavanjima koje je držao prof. dr James L. Massey od 1981 do 1997 na ETF-u u Cirihu, skinuto sa http://www.isiweb.ee.ethz.ch/archive/massey_scr/, str. 1-59

[2] C. D. Meyer: *"Matrix analysis and applied linear algebra"*, SIAM, 2000., str. 489-642

[3] L. Mirsky: *"An introduction to linear algebra"*, Oxford University Press, 1955., str. 327-353

[4] P. J. Olver i C. Shakiban: *"Applied linear algebra"*, Pearson Prentice Hall, 2006., str. 390-510

[5] V. Perić: *"Algebra I (prsteni i moduli, linearna algebra)"*, Svjetlost, 1987., str. 281-327

[6] V. V. Prasolov: *"Problems and theorems in Linear Algebra"*, American Mathematical Society, 2000., str 97-121