Ortogonalni,
Hermiteovi i Jacobijevi polinomi

Safet Penjić
infoarrt@gmail.com

Naučno-istraživački rad* koji je razvijen kao parcijalno ispunjenje
obaveza prema izbornom predmetu Specijalne funkcije sa postdiplomskog studija

Odsjek za matematiku
Univerzitet u Sarajevu

Nadgledano od:
Prof. dr sc Mirjana Malenica
Prirodno-matematički fakultet
Univerzitet u Sarajevu

(Datum: 14 novembar 2012.)

*Ovo je rad u razvoju. Moguća je pojava štamparskih grešaka.

(ova stranica je ostavljena prazna)

Sadržaj

(ova stranica je ostavljena prazna)

I Ortogonalni polinomi

1. Težinska funkcija

Posmatrajmo polinome $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$ za $n = 0, 1, 2, ...$ i pokažimo da je

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 0 \quad \text{za } n \neq m.$$

Bez gubitka opštosti izračunaćemo integral za $m > n$. Imamo

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = (-1)^{m+n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2} dx.$$

Ako primjenimo parcijalnu integraciju, sa smjenama

$$u = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \qquad dv = \frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2} dx,$$

$$du = \frac{d}{dx}\left(e^{x^2}, \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) dx \qquad v = \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} e^{-x^2}$$

dobićemo

$$(-1)^{m+n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} e^{-x^2} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} e^{-x^2} dx.$$

Sad primjetimo da je

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx} e^{-x^2} = e^{-x^2}(-2x),\\
&\frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2} = e^{-x^2}(-2x)(-2x) + e^{-x^2}(-2) = e^{-x^2}((-2x)^2 - 2),\\
&\frac{d^3}{dx^3} e^{-x^2} = e^{-x^2}(-2x)(4x^2 - 2) + e^{-x^2}(8x) = e^{-x^2}((-2x)^3 + 12x),\\
&\qquad ...\\
&\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = e^{-x^2}((-2x)^n + ...)
\end{aligned}$$

pa imamo

$$e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} e^{-x^2} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} = e^{x^2} e^{-x^2}((-2x)^n + ...) e^{-x^2}((-2x)^{m-1} + ...)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

zato što za svaki fiksirani $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$x^k e^{-x^2} \longrightarrow 0 \quad \text{kad } x \to \infty.$$

Prema tome

$$(-1)^{m+n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} e^{-x^2} dx.$$

Ako parcijalnu integraciju ponovimo još $n-1$ puta dobićemo

$$(-1)^{m+n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = (-1)^n \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) \frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}} e^{-x^2} dx.$$

Sad primjetimo da je

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) = \frac{d^n}{dx^n} ((-2x)^n + ...) = (-1)^n 2^n n!,$$

iz čega slijedi

$$(-1)^{m+n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = (-1)^n (-1)^n 2^n n! \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}} e^{-x^2} dx = 2^n n! \left(\frac{d^{m-n-1}}{dx^{m-n-1}} e^{-x^2} \right) \Bigg|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Možemo zaključiti

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 0,$$

ako je $m \neq n$. Ovu relaciju možemo opisati tako što ćemo reći da su funkcije $(e^{-x^2})^{1/2} H_n(x)$, $(e^{-x^2})^{1/2} H_m(x)$ međusobno ortogonalne na intervalu $(-\infty, \infty)$. Istu relaciju možemo opisati i na drugi način, koji je mnogo važniji za tekst koji slijedi, tako što ćemo reći da su polinomi $H_n(x)$, $H_m(x)$ međusobno ortogonalni na intervalu $(-\infty, \infty)$ *u odnosu na težinsku funkciju* e^{-x^2}. Koncept sistema ortogonalnih polinoma u odnosu na težinsku funkciju će biti dominantan od sad pa nadalje. Formalizujmo prethodno napisano:

(1.01) Definicija (ortogonalnost u odnosu na težinsku funkciju)

Za dvije funkcije $f_1(x)$ i $f_2(x)$ kažemo da su međusobno ortogonalne na intervalu (a, b) u odnosu na težinsku funkciju $\rho(x)$ ako i samo ako

$$\int\limits_a^b \rho(x) f_1(x) f_2(x)\, dx = 0.$$

$\diamond$

(1.02) Problem

Pokazati da su polinomi

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

međusobno ortogonalni na intervalu $(-\infty, \infty)$ *u odnosu na težinsku funkciju* e^{-x^2} *za* $n = 0, 1, 2, ...$ $\diamond$

Sljedeće što želimo pokazati je da se funkcija $cos\, m\theta$, za proizvoljno $m \in \mathbb{N}_0$, može izraziti kao polinom C_m stepena m po promjenjivoj $cos\, \theta$, a poslije toga želimo pokazati da za takve polinome vrijedi sljedeća jednakost

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2} C_m(x) C_k(x) dx = 0.$$

Primjenom adicionih teorema na izraze $cos\,((n+1)\theta)$ i $cos((n-1)\theta)$ dobijamo

$$cos\,((n+1)\theta) = cos\,(n\theta+\theta) = cos\,n\theta\,cos\,\theta - sin\,n\theta \sin\,\theta,$$
$$cos\,((n-1)\theta) = cos\,(n\theta-\theta) = cos\,n\theta\,cos\,\theta + sin\,n\theta \sin\,\theta.$$

Sabiranjem zadnje dvije jednakosti i premještanjem elemenata, imamo

$$cos\,((n+1)\theta) = 2cos\,n\theta\,cos\,\theta - cos\,((n-1)\theta).$$

Ova jednakost će nam pomoći, da pomoću matematičke indukcije pokažemo sljedeću tvrdnju: Za svaki fiksirani ne-negativni cijeli broj n, postoje cijeli c_{ni}, $i = 0, 1, 2, ..., n$, takvi da

$$cos\,n\theta = \sum_{i=0}^{n} c_{ni}\,cos^i(\theta).$$

BAZA INDUKCIJE

Za $n = 0$ imamo $cos\,0\theta = 1 = 1 \cdot cos^0(\theta)$. Prema tome $c_{00} = 1$. Za $n = 1$ imamo $cos\,1\theta = cos\,\theta = 1 \cdot cos^1(\theta)$. Prema tome $c_{10} = 0$, $c_{11} = 1$. Jednakost je tačna za $n = 0$ i $n = 1$.

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je jednakost tačna za sve $k = 1, 2, ..., n$ tj. pretpostavimo da za svaki fiksiran cijeli k $(1 \le k \le n)$ postoje cijeli brojevi c_{ki}, $i = 0, 1, 2, ..., k$, takvi da

$$cos\,k\theta = \sum_{i=0}^{k} c_{ki}\,cos^i(\theta),$$

i na osnovu ove pretpostavke pokažimo da je jednakost tačna za $n + 1$. Imamo:

$$\begin{aligned} cos\,((n+1)\theta) &= 2cos\,n\theta\,cos\,\theta - cos\,((n-1)\theta) \overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{=\!=\!=} \\ &= 2\left(\sum_{i=0}^{n} c_{ni}\,cos^i(\theta)\right) cos\,\theta - \sum_{i=0}^{n-1} c_{n-1,i}\,cos^i(\theta) \\ &= \sum_{i=0}^{n} 2c_{ni}\,cos^{i+1}(\theta) - \sum_{i=0}^{n-1} c_{n-1,i}\,cos^i(\theta) \end{aligned}$$

iz čega možemo vidjeti da postoje cijeli brojevi $c_{n+1,i}$, $i = 0, 1, 2, ..., n+1$, takvi da

$$cos\,(n+1)\theta = \sum_{i=0}^{n+1} c_{n+1,i}\,cos^i(\theta).$$

Možemo zaključiti da je jednakost tačna za svaki $n \in \mathbb{N}_0$. Drugim riječima funkcija $cos\,n\theta$, za proizvoljno $n \in \mathbb{N}_0$, može izraziti kao polinom C_n stepena n po promjenjivoj $cos\,\theta$.

Za $m \neq k$ izračunajmo integral $\int_0^\pi cos\,m\theta \cos k\theta\, d\theta$:

$$\int_0^\pi cos\,m\theta \cos k\theta\, d\theta = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2}cos(m-k)\theta + \frac{1}{2}cos(m+k)\theta\right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi cos(m-k)\theta\, d\theta + \frac{1}{2}\int_0^\pi cos(m+k)\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2(m-k)}\; sin(m-k)\theta\Big|_0^\pi + \frac{1}{2(m+k)}\; sin(m+k)\theta\Big|_0^\pi = 0.$$

U relaciji

$$\int_0^\pi cos\, m\theta\, cosk\theta\, d\theta = 0, \quad m \neq k$$

neka je $x = cos\theta$. Tada je $dx = -sin\theta = -(1-x^2)^{1/2}\, d\theta$ tj. $d\theta = -(1-x^2)^{-1/2}\, dx$. Funkcija $cos\, m\theta$ se može izraziti kao polinom stemena m po promjenjivoj $cos\theta$:

$$cos\, m\theta = C_m(cos\theta) = C_m(x),$$

i slično imamo za $cos\, k\theta$. Prema tome $\int_0^\pi cos\, m\theta \cos k\theta\, d\theta = 0$ postaje

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2}\, C_m(x)\, C_k(x)\, dx = 0.$$

Polinomi $C_m(x)$, $m = 0, 1, 2, ...$, su međusobno ortogonalni na intervalu $[-1, 1]$ u odnosu na težinsku funkciju $(1-x^2)^{-1/2}$. Time smo dokazali Lemu 1.03 i riješili Problem 1.04.

(1.03) Lema

Funkcija $cos\, m\theta$, za proizvoljno $m \in \mathbb{N}_0$, se može izraziti kao polinom C_m stepena m po promjenjivoj $cos\,\theta$. ◇

(1.04) Problem

Pokazati da su polinomi C_m iz Leme 1.03 međusobno ortogonalni na intervalu $(-1, 1)$ u odnosu na težinsku funkciju $(1-x^2)^{-1/2}$. ◇

Skoro na isti način kao u tekstu iznad, se može pokazati sljedeće: Funkcija $sin(m+1)\theta$ zadovoljava jednakost

$$sin(m+1)\theta = sin\theta\, S_m(cos\theta),$$

gdje je S_m polinom stepena m po promjenjivoj $cos\theta$. Relacija

$$\int_0^\pi sin(m+1)\theta\, sin(k+1)\theta\, d\theta = 0, \quad m \neq k,$$

je ekvivalentna sa

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{1/2}\, S_m(x)\, S_k(x)\, dx = 0.$$

Polinomi $S_m(x)$ su međusobno ortogonalni na intervalu $[-1, 1]$ u odnosu na težinsku funkciju $(1-x^2)^{1/2}$.

Na kraju posmatrajmo polinome definisane sa

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Pokažimo da za ove polinome vrijedi

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x)\, dx = 0, \quad \text{za } n \neq m.$$

Zbog pogodnosti, pišemo $(x^2-1)^n = p_n(x)$ tako da

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, x^m\, dx = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{1} p_n(x)\, x^m\, dx.$$

Ovaj integral ćemo izračunati za $m < n$ pomoću rekurzije. Prvo primjetimo da

$$p_n^{(k)}(x) = 0 \quad \text{za } x = \pm 1 \ \text{ i } \ k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

Pa, parcijalnom integracijom, sa smjenama

$$u = x^m \qquad dv = p_n^{(n)}(x)\, dx$$

$$du = m x^{m-1}\, dx \qquad v = p_n^{(n-1)}(x)$$

dobijamo

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)\, x^m\, dx = -m \int_{-1}^{1} p_n^{(n-1)}(x)\, x^{m-1}\, dx.$$

Ponavljajući parcijalnu integraciju još $m-1$ puta dolazimo do

$$(-1)^m m! \int_{-1}^{1} p_n^{(n-m)}(x)\, dx = (-1)^m m! \left[p_n^{(n-m-1)}(x) \right]\Big|_{-1}^{1} = 0 \quad (m < n).$$

Prema tome,

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, x^m\, dx = 0, \qquad \text{za } m < n.$$

Kako je P_m polinom stepena m, slijedi da

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = 0, \qquad \text{za } n \neq m.$$

Polinomi $P_n(x)$ su međusobno ortogonalni na intervalu $[-1,1]$ u odnosu na težinsku funkciju 1.
U tekstu iznad smo pokazali rješenje Problema 1.05:

(1.05) Problem
Pokazati da su polinomi definisani sa

$$P_0(x) = 1,$$
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

međusobno ortogonalni na intervalu $(-1,1)$ u odnosu na težinsku funkciju 1. ◇

Napomena: Polinomi $H_n(x)$ se zovu Hermitovi polinomi reda n. Kasnije ćemo vidjeti da se ovi polinomi dobiju kao rješenja Hermit-ove diferencialne jednačine reda n

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

Prvih šest Hermitovih polinoma je

$H_0(x) = 1,$
$H_1(x) = 2x,$
$H_2(x) = 4x^2 - 2,$
$H_3(x) = 8x^3 - 12x,$
$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12,$

$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x.$

Polinomi $C_m(x)$ i $S_m(x)$ se zovu trigonometriski polinomi ili *Chebichef-ovi polinomi* prve i druge vrste reda n. Kasnije ćemo pokazati da su ovi polinomi rješenja Chebichef-ove diferencijalne jednačine reda n

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0.$$

Ime Chebichef-ovi polinomi se također, mnogo opštije, primjenjuju u sistemima ortogonalnih polinoma u odnosu na proizvoljnu težinsku funkciju. Čitava glava "Ortogonalni polinomi" je koncentrisana na osnove opšte teorije takvih ortogonalnih sistema. Prvih šest Chebichef-ovi polinomi prve vrste izraženih preko stepena promjenjive x je:

$C_0(x) = 1,$
$C_1(x) = x,$
$C_2(x) = 2x^2 - 1,$
$C_3(x) = 4x^3 - 3x,$
$C_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$
$C_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x.$

Polinomi $P_n(x)$ se zovu *Legendre-ovi polinomi* reda n. Kasnije ćemo vidjeti da se ovi polinomi dobiju kao rješenja Legendre-ove diferencijalne jednačine reda n

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

Prvih šest Legendre-ovi polinoma je

$P_0(x) = 1,$
$P_1(x) = x,$
$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$
$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$
$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$
$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$

Chebichef-ovi i Legendre-ovi polinomi su u stvari specijalni slučaj Jacobi-jevih polinoma, jedan od važnijih tipova polinoma koje ćemo razmatrati u jednoj od sljedećih glava.

2. Gram-Schmidt-ov proces ortonormalizacije

Neka je $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$, $\phi_2(x), \ldots$ proizvoljan niz funkcija na intervalu (a, b), takav da su sve funkcije u nizu integrabilne i linearno nezavisne. Kroz tekst koji slijedi, interval (a, b) se može zamjeniti beskonačnim intervalom (a, ∞) ili sa intervalom $(-\infty, \infty)$, ali pod uslovom da svi integrali koji se posmatraju postoje. Pretpostavićemo da je svaka linearna kombinacija $\psi = \alpha_0\phi_0 + \ldots + \alpha_m\phi_m$, konačnog broja ϕ-jeva sa konstantnim koeficijentima $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$ ne svi nula, različita od nule na skupu tački koje su dovoljne da naprave određen integral od ψ^2, nad posmatranim intervalom, različit od nule.

U tekstu koji slijedi simboli $\|\phi_0\|$, $\|G_1\|$, ..., $\|G_n\|$ predstavljaju realne brojeve, kao i simboli $\langle \phi_i, g_j \rangle$, za $i, j = 1, 2, \ldots n$. Neka je

$$d_0 = \|\phi_0\|^2 = \int_a^b [\phi_0(x)]^2 \, dx,$$

$$g_0(x) = \frac{\phi_0(x)}{d_0^{1/2}} = \frac{\phi_0(x)}{\|\phi_0\|},$$

tako da je $\int_a^b [g_0(x)]^2\,dx = 1$. Neka je

$$\begin{aligned}
c_{10} &= \langle \phi_1, g_0 \rangle = \int_a^b \phi_1(x) g_0(x)\,dx,\\
G_1(x) &= \phi_1(x) - c_{10} g_0(x) = \phi_1(x) - \langle \phi_1, g_0 \rangle g_0(x),\\
d_1 &= \|G_1\|^2 = \int_a^b [G_1(x)]^2\,dx,\\
g_1(x) &= \frac{G_1(x)}{d_1^{1/2}} = \frac{G_1(x)}{\|G_1\|}.
\end{aligned}$$

Tada je

$$\int_a^b G_1(x) g_0(x)\,dx = \int_a^b (\phi_1(x) - \langle \phi_1, g_0 \rangle g_0(x)) g_0(x)\,dx = 0,$$

$$\int_a^b g_1(x) g_0(x)\,dx = \int_a^b \frac{G_1(x)}{\|G_1\|} g_0(x)\,dx = \frac{1}{\|G_1\|} \int_a^b G_1(x) g_0(x)\,dx = 0,$$

$$\int_a^b [g_1(x)]^2\,dx = 1.$$

U opštem slučaju neka su funkcije $g_2(x)$, $g_3(x)$,... definisane uzastopno sa relacijama

$$\begin{aligned}
c_{nk} &= \langle \phi_n, g_k \rangle = \int_a^b \phi_n(x) g_k(x)\,dx,\\
G_n(x) &= \phi_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} c_{nk} g_k(x) = \phi_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \langle \phi_n, g_k \rangle g_k(x),\\
d_n &= \|G_n\|^2 = \int_a^b [G_n(x)]^2\,dx,\\
g_n(x) &= \frac{G_n(x)}{d_n^{1/2}} = \frac{G_n(x)}{\|G_n\|}.
\end{aligned}$$

Matematičkom indukcijom, nije teško pokazati da je svaka od funkcija $g_n(x)$ ortogonalna na $g_0(x)$, ..., $g_{n-1}(x)$

$$\int_a^b g_n(x) g_m(x)\,dx = \int_a^b \frac{G_n(x)}{\|G_n\|} g_m(x)\,dx = \frac{1}{\|G_n\|} \int_a^b G_n(x) g_m(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\|G_n\|} \int_a^b \left(\phi_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \langle \phi_n, g_k \rangle g_k(x) \right) g_m(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\|G_n\|} \int_a^b \phi_n(x) g_m(x)\,dx - \frac{1}{\|G_n\|} \sum_{k=0}^{n-1} \langle \phi_n, g_k \rangle \int_a^b g_k(x) g_m(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\|G_n\|} \langle \phi_n, g_m \rangle - \frac{1}{\|G_n\|} \sum_{k=0}^{n-1} \langle \phi_n, g_k \rangle \int_a^b g_k(x) g_m(x)\,dx,$$

i da je svaka od funkcija $g_0(x)$, ..., $g_n(x)$ normalizovana, tj. imaju vrjednost 1 kao integral njihovih kvadrata nad intervalom (a, b). Kako je relacija ortogonalnosti simetrična, isto tako možemo reći da su proizvoljne dvije funkcije g_i, g_j međusobno ortogonalne, za $i \neq j$. Činjenica da su g-ovi oboje, i međusobno ortogonalne i normalizovane, se sumira u jednu riječ, koju zovemo <u>*ortonormirane*</u> funkcije.

Ako kao ϕ-ove uzmemo konkretno funkcije 1, x, x^2 i x^3, na intervalu $(-1, 1)$ tada kao odgovarajuće g-ove ćemo dobiti $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{\frac{3}{2}}x$, $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2-1)$ i $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\left(5x^3-3x\right)$. Pokažimo ovo.

$$d_0 = \|\phi_0\|^2 = \|1\|^2 = \int_{-1}^{1} 1^2\,dx = 2$$

$$g_0(x) = \frac{\phi_0(x)}{d_0^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

tako da je $\int_{-1}^{1}[g_0(x)]^2\,dx = 1$. Dalje

$$c_{10} = \langle x, g_0\rangle = \int_{-1}^{1} x\frac{1}{\sqrt{2}}\,dx = 0,$$

$$G_1(x) = \phi_1(x) - c_{10}g_0(x) = x - 0\cdot g_0(x) = x,$$

$$d_1 = \|x\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3},$$

$$g_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x,$$

tako da je $\int_{-1}^{1} g_1(x)g_0(x)\,dx = 0$, $\int_{-1}^{1}[g_1(x)]^2\,dx = 1$. Dalje

$$c_{20} = \langle x^2, g_0\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\frac{1}{\sqrt{2}}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$c_{21} = \langle x^2, g_1\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\sqrt{\frac{3}{2}}x\,dx = 0,$$

$$G_2(x) = x^2 - c_{20}g_0(x) - c_{21}g_1(x) = x^2 - \frac{1}{3},$$

$$d_2 = \|x^2 - \frac{1}{3}\|^2 = \int_{-1}^{1}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \frac{8}{45},$$

$$g_2(x) = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2-1),$$

tako da je $\int_{-1}^{1} g_2(x)g_0(x)\,dx = 0$, $\int_{-1}^{1} g_2(x)g_1(x)\,dx = 0$, $\int_{-1}^{1}[g_2(x)]^2\,dx = 1$. Na kraju

$$c_{30} = \langle x^3, g_0\rangle = \int_{-1}^{1} x^3\frac{1}{\sqrt{2}}\,dx = 0,$$

$$c_{31} = \langle x^3, g_1\rangle = \int_{-1}^{1} x^3\sqrt{\frac{3}{2}}x\,dx = \frac{\sqrt{6}}{5},$$

$$c_{32} = \langle x^3, g_2\rangle = \int_{-1}^{1} x^3\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2-1)\,dx = 0,$$

$$G_3(x) = x^3 - c_{30}g_0(x) - c_{31}g_1(x) - c_{32}g_2(x) = x^3 - \frac{\sqrt{6}}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}x = x^3 - \frac{3}{5}x,$$

$$d_3 = \|x^3 - \frac{3}{5}x\|^2 = \int_{-1}^{1}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)^2 dx = \frac{8}{175},$$

$$g_3(x) = \sqrt{\frac{175}{8}}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\left(5x^3 - 3x\right),$$

tako da je $\int_{-1}^{1} g_3(x)g_0(x)\,dx = 0$, $\int_{-1}^{1} g_3(x)g_1(x)\,dx = 0$, $\int_{-1}^{1} g_3(x)g_2(x)\,dx = 0$, $\int_{-1}^{1}[g_3(x)]^2\,dx = 1$. Primjetimo da su dobijeni polinomi $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{\frac{3}{2}}x$, $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2-1)$ i $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\left(5x^3-3x\right)$ u stvari prva 4 normirana Lagendre-ova polinoma.

Opisana procedura za konstrukciju ortogonalnog sistema iz proizvoljnog datog skupa funkcija je poznata pod imenom *Gram-Schmidt-ov proces ortogonalizacije*. Formalizujmo prethodno napisani tekst:

(2.01) Teorema (Gram-Schmidt-ova postupak ortogonalizacije)

Neka je $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, ... $\phi_n(x)$, proizvoljan niz funkcija na intervalu (a,b), takav da su sve funkcije iz niza integrabilne na (a,b), i linearno nezavisne. Tada je Gram-Schmidt-ov niz definisan sa

$$g_0(x) = \frac{\phi_0(x)}{\int_a^b [\phi_0(x)]^2\, dx},$$

$$g_k(x) = \frac{\phi_k(x) - \sum\limits_{i=0}^{k-1} \left(\int\limits_a^b \phi_k(x) g_i(x) dx \right) g_i(x)}{\int\limits_a^b \left[\phi_k(x) - \sum\limits_{i=0}^{k-1} \left(\int\limits_a^b \phi_k(x) g_i(x) dx \right) g_i(x) \right]^2 dx} \quad za\ k = 1, 2, 3, ..., n$$

ortonormiran niz. ◇

(2.02) Vježba

Primjenom Gram-Schmidtovog postupka ortogonalizacije konstruisati ortonormiran sistem polazeći od skupa funkcija $\{1, x, x^2, x^3\}$, koristeći interval $(-1, 1)$. ◇

Funkcija g_n je u stvari linearna kombinacija od ϕ_0, ..., ϕ_n (pod frazom *linearna kombinacija* će se uvijek podrazumjevati *linearna kombinacija sa konstantnim koeficijentima*)

$$\begin{aligned}
g_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{d_0}}\phi_0(x),\\
g_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{d_1}}G_1(x) = \frac{1}{\sqrt{d_1}}\phi_1(x) - \frac{c_{10}}{\sqrt{d_1}}g_0(x),\\
g_2(x) &= \frac{1}{\sqrt{d_2}}G_2(x) = \frac{1}{\sqrt{d_2}}\phi_2(x) - \frac{c_{20}}{\sqrt{d_2}}g_0(x) - \frac{c_{21}}{\sqrt{d_2}}g_1(x),\\
&...\\
g_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{d_n}}G_n(x) = \frac{1}{\sqrt{d_n}}\phi_n(x) - \frac{c_{n0}}{\sqrt{d_n}}g_0(x) - \frac{c_{n1}}{\sqrt{d_n}}g_1(x) - ... - \frac{c_{n,n-1}}{\sqrt{d_n}}g_{n-1}(x),
\end{aligned}$$

i obrnuto, s obzirom da su koeficijenti uz ϕ_n u izrazu za g_n, u svim slučajima, različiti od nule, relaciska veza ϕ-eva sa g-ovima se može uspješno riješiti, svaki ϕ_n je linearna kombinacija od g_0, ..., g_n. Pokažimo ovo zadnje.

Već smo primjetili da je svaki $g_n(x)$ linearna kombinacija od $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$, ..., $\phi_n(x)$. Drugim riječima za svaki $g_n(x)$ postoje koeficijenti $a_{ni} \in \mathbb{R}$, $(i = 0, 1, ..., n)$ takvi da

$$g_n(x) = a_{n0}\phi_0(x) + a_{n1}\phi_1(x) + ... + a_{nn}\phi_n(x),$$

tj. ako posmatramo funkcije $g_0(x)$, $g_1(x)$, ..., $g_n(x)$ imamo

$$\begin{aligned}
g_0(x) &= a_{00}\phi_0(x),\\
g_1(x) &= a_{10}\phi_0(x) + a_{11}\phi_1(x),\\
g_2(x) &= a_{20}\phi_0(x) + a_{21}\phi_1(x) + a_{22}\phi_2(x)\\
&...\\
g_n(x) &= a_{n0}\phi_0(x) + a_{n1}\phi_1(x) + ... + a_{nn}\phi_n(x).
\end{aligned}$$

Jednakosti iznad možemo napisati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} g_0(x) \\ g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{00} & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} \phi_0(x) \\ \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix}.$$

Ako napisanu gornje-trougaonu matricu označimo sa A, kako je a_{ii} različit od nule za svaki $i = 0, 1, 2, .., n$, matrica A je nesingularna, pa dati sistem ima jedinstveno rješenje. Matrica koja je inverzna gornje-trougaonoj matrici mora biti gornje-trougona. Prema tome svaki ϕ_n se može napisati kao linearna kombinacija od g_0, g_1, ..., g_n. Iz ovoga slijedi da je g_n *ortogonalan na svaku linearnu kombinaciju od* ϕ_0, ..., ϕ_{n-1}. Time smo dokazali sljedeće dvije leme:

(2.03) Lema

Neka su ϕ_0, ..., ϕ_n, g_0, ..., g_n, *funkcije iz Teoreme 2.01. Tada svaka funkcija* g_k, $k = 0, 1, ..., n$, *se može napisati kao linearna kombinacija od* ϕ_0, ..., ϕ_k, *i obrnuto, svaka funkcija* ϕ_k, $k = 0, 1, ..., n$, *se može napisati kao linearna kombinacija od* g_0, ..., g_k. ◇

(2.04) Lema

Neka su ϕ_0, ..., ϕ_n, g_0, ..., g_n, *funkcije iz Teoreme 2.01. Tada je funkcija* g_k, $k = 0, 1, ..., n$, *ortogonalna na svaku linearnu kombinaciju od* ϕ_0, ..., ϕ_{k-1}. ◇

Ako je $\gamma(x)$ neka linearna kombinacija od ϕ_0, ..., ϕ_n koja je ortogonalna na svaku od funkcija ϕ_0, ..., ϕ_{n-1}, ona mora biti konstanta pomnožena sa $g_n(x)$. Ovo možemo vidjeti iz procesa konstrukcije $g_n(x) = G_n(x)/d_n^{1/2}$, gdje su c_{10} i ostali koeficijenti niza c_{nk} u funkcijama $G_n(x)$ jedinstveno određeni zbog zahtjeva ortogonalnosti u svakom koraku, a koeficijenti uz $\phi_n(x)$ su jedinice ($G_n(x) = \phi_n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_{nk} g_k$). Iako osobina ortogonalnosti sama po sebi dozvoljava množenje čitavog izraza $G_n(x)$ sa proizvoljnim konstantnim faktorom, da je $\gamma(x)$ konstanta pomnožena sa $g_n(x)$ možemo pokazati i na sljedeći način. Ako su $a_n > 0$ i a'_n koeficijenti uz ϕ_n u g_n i γ-i redom

$$\begin{aligned} g_n(x) &= a_n\phi_n(x) + ... + a_0\phi_0(x), \\ \gamma(x) &= a'_n\phi_n(x) + ... + a'_0\phi_0(x), \end{aligned}$$

izraz $\gamma - \frac{a'_n}{a_n} g_n$ ne sadrži ϕ_n; i on je linearna kombinacija od ϕ_0, ..., ϕ_{n-1} koji je ortogonalan na svaku od ovih funkcija (kako je γ ortogonalna na svaku od ϕ_0, ..., ϕ_{n-1} i kako je g_n ortogonalna na svaku od ϕ_0, ..., ϕ_{n-1} slijedi da je i $\gamma - \frac{a'_n}{a_n} g_n$ ortogonalna na svaku od ϕ_0, ..., ϕ_{n-1}), pa je ortogonalna i na sebe, tj. integral njezinog kvadrata nad posmatranim intervalom je nula. Ovo znači da je $\gamma - \frac{a'_n}{a_n} g_n = 0$, pa kako su ϕ-jevi linearno nezavisni svi koeficijenti po kojima je ova funkcija izražena, preko članova od ϕ_0, ..., ϕ_{n-1}, moraju biti nula. Dalje, ako je posmatrana γ normalizovana i vrijedi da je $a'y_n \leq 0$, γ mora biti identički jednaka sa g_n. Time smo dokazali Lemu 2.05:

(2.05) Lema

Ako je $\gamma(x)$ *linearna kombinacija od* ϕ_0, ..., ϕ_n *koja je ortogonalna na svaku od funkcija* ϕ_0, ..., ϕ_{n-1}, *tada postoji konstanta* $\alpha \in \mathbb{R}$ *takva da* $\gamma(x) = \alpha g_n(x)$, *za svako* x. ◇

3. Ortogonalni polinomi koji odgovaraju proizvoljnoj težinskoj funkciji

Neka je $\rho(x)$ ne-negativna funkcija koja je integrabilna nad (a,b), i koja ima osobinu da je vrijednost određenog integrala $\rho(x)$ nad (a,b) u stvari pozitivan. U većini važnih primjena $\rho(x)$ će biti neprekidan i pozitivan kroz čitav interval, osim možda u krajnjim tačkama, gdje može nestati ili postati beskonačan. U slučaju beskonačnog intervala obično se pretpostavi da je proizvod $\rho(x)$ sa proizvoljnim polinomom, integrabilan, nad posmatranim intervalom. Neka je proizvod $[\rho(x)]^{1/2}x^k$, $k=0,1,2,...$ uzeta kao funkcija iz Teoreme 2.01. Odgovarajuće funkcije $g_n(x)$, koje su u stvari linearne kombinacije ovih (Lema 2.03), će biti oblika $[\rho(x)]^{1/2}p_n(x)$, gdje su $p_n(x)$ polinomi stepena n. Izračunajmo prvih nekoliko polinoma.

$$d_0 = \|\phi_0\|^2 = \|[\rho(x)]^{1/2}x^0\|^2 = \int_a^b \rho(x)\,dx,$$

$$g_0(x) = \frac{[\rho(x)]^{1/2}x^0}{d_0^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{d_0}}[\rho(x)]^{1/2} = [\rho(x)]^{1/2}p_0(x),$$

gdje je $p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{d_0}}$. Izračunajmo $g_1(x)$

$$c_{10} = \langle \phi_1, g_0\rangle = \int_a^b [\rho(x)]^{1/2}x^1\frac{1}{\sqrt{d_0}}[\rho(x)]^{1/2}\,dx, = \frac{1}{\sqrt{d_0}}\int_a^b \rho(x)x\,dx,$$

$$G_1(x) = \phi_1(x) - c_{10}g_0(x) = [\rho(x)]^{1/2}x^1 - c_{10}\frac{1}{\sqrt{d_0}}[\rho(x)]^{1/2} = [\rho(x)]^{1/2}\left(x - \frac{c_{10}}{\sqrt{d_0}}\right),$$

$$d_1 = \|G_1\|^2 = \int_a^b [G_1(x)]^2\,dx,$$

$$g_1(x) = \frac{G_1(x)}{d_1^{1/2}} = [\rho(x)]^{1/2}\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}}x - \frac{c_{10}}{\sqrt{d_1d_0}}\right) = [\rho(x)]^{1/2}p_1(x),$$

gdje je $p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{d_1}}x - \frac{c_{10}}{\sqrt{d_1d_0}}$. Izračunajmo $g_2(x)$

$$c_{20} = \langle \phi_2, g_0\rangle = \int_a^b [\rho(x)]^{1/2}\,x^2[\rho(x)]^{1/2}\,p_0(x)\,dx = \int_a^b \rho(x)x^2p_0(x)\,dx,$$

$$c_{21} = \langle \phi_2, g_1\rangle = \int_a^b [\rho(x)]^{1/2}\,x^2[\rho(x)]^{1/2}\,p_1(x)\,dx = \int_a^b \rho(x)x^2p_1(x)\,dx,$$

$$\begin{aligned}G_2(x) &= \phi_2(x) - c_{20}g_0(x) - c_{21}g_1(x) = [\rho(x)]^{1/2}x^2 - c_{20}[\rho(x)]^{1/2}p_0(x) - c_{21}[\rho(x)]^{1/2}p_1(x) = \\ &= [\rho(x)]^{1/2}\left(x^2 - c_{20}p_0(x) - c_{21}p_1(x)\right) = [\rho(x)]^{1/2}\left(x^2 - \frac{c_{20}}{\sqrt{d_0}} - \frac{c_{21}}{\sqrt{d_1}}x - \frac{c_{21}c_{10}}{\sqrt{d_1d_0}}\right),\end{aligned}$$

$$d_2 = \|G_2\|^2 = \int_a^b [G_2(x)]^2\,dx,$$

$$g_2(x) = \frac{G_2(x)}{d_2^{1/2}} = [\rho(x)]^{1/2}\left(\frac{1}{\sqrt{d_2}}x^2 - \frac{c_{21}}{\sqrt{d_2d_1}}x - \frac{c_{21}c_{10}}{\sqrt{d_2d_1d_0}} - \frac{c_{20}}{\sqrt{d_2d_0}}\right) = [\rho(x)]^{1/2}p_2(x),$$

gdje je $p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{d_2}}x^2 - \frac{c_{21}}{\sqrt{d_2d_1}}x - \frac{c_{21}c_{10}}{\sqrt{d_2d_1d_0}} - \frac{c_{20}}{\sqrt{d_2d_0}}$. Ako pretpostavimo da su $g_k(x) = [\rho(x)]^{1/2}p_k(x)$, $k=0,1,...,n-1$, funkcije dobijene Gram-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije pomoću funkcija $\phi_k(x) = [\rho(x)]^{1/2}x^k$, $k=0,1,2,...,n-1$, gdje je svaki $p_k(x)$ polinomi stepena k, tada za $g_n(x)$ imamo

$$c_{nk} = \langle \phi_n, g_k\rangle = \int_a^b [\rho(x)]^{1/2}\,x^n[\rho(x)]^{1/2}\,p_k(x)\,dx = \int_a^b \rho(x)x^np_k(x)\,dx,$$

$$
\begin{aligned}
G_n(x) &= \phi_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} c_{nk} g_k(x) = [\rho(x)]^{1/2}\, x^n - \sum_{k=0}^{n-1} [\rho(x)]^{1/2}\, p_k(x) = [\rho(x)]^{1/2} \left(x^n - \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x) \right) \\
d_n &= \|G_n\|^2 = \int_a^b [G_n(x)]^2\, dx, \\
g_n(x) &= \frac{G_n(x)}{d_n^{1/2}} = [\rho(x)]^{1/2} \left(\frac{1}{\sqrt{d_n}} x^n - \frac{1}{\sqrt{d_n}} \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x) \right).
\end{aligned}
$$

Prema tome matematičkom indukcijom sad nije teško pokazati Teoremu 3.01.

(3.01) Teorem

Neka je dat skup funkcija

$$\left\{ [\rho(x)]^{1/2}, [\rho(x)]^{1/2} x, [\rho(x)]^{1/2} x^2, ..., [\rho(x)]^{1/2} x^n, ... \right\}$$

i neka je $\rho(x)$ ne-negativna funkcija takva da integral proizvoda proizvoljnog polinoma sa $\rho(x)$ nad intervalom (a, b) uvijek postoji. Tada Gram-Schmidtovim postupkom iz datog skupa funkcija možemo konstruisati ortonormiran sistem

$$\left\{ [\rho(x)]^{1/2} p_0(x), [\rho(x)]^{1/2} p_1(x), [\rho(x)]^{1/2} p_2(x), ..., [\rho(x)]^{1/2} p_n(x), ... \right\}$$

gdje su $p_k(x)$, $k = 0, 1, 2, ..., n, ...$, polinomi stepena k. ◇

Polinomi $p_n(x)$ su normirani ortogonalni ili ortonormirani polinomi sa $\rho(x)$ kao težinskom funkcijom. Oni zadovoljavaju uslove

$$\int_a^b \rho(x) p_m(x) p_n(x)\, dx = 0, \qquad m \neq n,$$

$$\int_a^b \rho(x) [p_n(x)]^2\, dx = 1.$$

Svaki od polinoma je stepena prikazan kao njegov subskript, i koeficijent uz član x^n je pozitivan. Ove osobine potpuno određuju sistem polinoma $p_n(x)$.

Pokažimo da je proizvoljan ortogonalan sistem funkcija $\{f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)\}$ linearno nezavisan. Pretpostavimo da je suma $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(x) = 0$ za neke $\alpha_1, ..., \alpha_k$. Tada

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b 0 \cdot \alpha_k f_k(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) \right) \alpha_k f_k(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \int_a^b [f_k(x)]^2\, dx.$$

Ovo povlači da je $\alpha_k = 0$ za svaki $k = 1, 2, ..., n$. prema tome $\{f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)\}$ je linearno nezavisan skup. Time je dokazana Teroema 3.02.

(3.02) Teorem

Ortogonalni sistemi su linearno nezavisni. ◇

Prema tome možemo zaključiti da je sistem

$$\left\{ [\rho(x)]^{1/2} p_0(x), [\rho(x)]^{1/2} p_1(x), [\rho(x)]^{1/2} p_2(x), ..., [\rho(x)]^{1/2} p_n(x) \right\}$$

linearno nezavisan, pa je i skup polinoma

$$\{p_0(x), p_1(x), p_2(x), ..., p_n(x)\}$$

linearno nezavisan. Ili drugim riječima, svaki polinom n-tog stepena se može izraziti kao linearna kombinacija od $p_0(x)$, ..., $p_n(x)$. Svaki $p_n(x)$ je ortogonalan na svaki polinom nižeg stepena u odnosu na težinsku funkciju $\rho(x)$, tj. ako je $q(x)$ bilo koji takav polinom,

$$\int_a^b \rho(x)p_n(x)q(x)\,dx = 0.$$

Ove činjenice su direktne posljedice opštih rezultata dobijenih u Lemama 2.03 i 2.04. U tekstu iznad smo pokazali sljedeće dvije tvrdnje:

(3.03) Propozicija

Neka su $p_k(x)$, $k = 0, 1, ..., n$, polinomi iz Teoreme 3.01. Tada se svaki polinom n-tog stepena može napisati kao linearna kombinacija od $p_0(x)$, ..., $p_n(x)$. ◇

(3.04) Posljedica

Neka su $p_k(x)$, $k = 0, 1, ..., n$, polinomi iz Teoreme 3.01. Tada je svaki $p_k(x)$ ortogonalan na proizvoljan polinom nižeg stepena, u odnosu na težinsku funkciju $\rho(x)$. ◇

4. Razvijanje proizvoljne funkcije u red

Polinomi $p_n(x)$ iz Teoreme 3.01 se mogu koristiti za formalno razlaganje proizvoljne funkcije u red. Formule su komplikovanije zbog prisustva težinske funkcije, ali su u drugu ruku, jednostavnije zbog činjenice da su p-ovi normalizovani. Želimo znati kada se proizvoljna funkcija $f(x)$ može napisati u obliku reda

$$f(x) = c_0p_0(x) + c_1p_1(x) + ... = \sum_{n=0}^{\infty} c_np_n(x)$$

tj. kada se funkcija $f(x)$ može razviti u red po ortogonalnim polinomima $p_n(x)$. Pretpostavimo da se $f(x)$ može razviti u ovakav red i da su sljedeće operacije opravdane. Množenjem sa $\rho(x)p_k(x)$ i integriranjem u granicama od a do b dobijemo

$$\int_a^b \rho(x)f(x)p_k(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b \rho(x)p_k(x)p_n(x)\,dx.$$

Zbog ortonormiranih osobina polinoma $p_k(x)$, svi integrali na desnoj strani jednaki su nuli, osim kada je $k = n$, i u tom slučaju $\int_a^b \rho(x)p_k(x)p_k(x)\,dx = 1$. Prema tome

$$c_k = \int_a^b \rho(x)f(x)p_k(x)\,dx.$$

Koeficijenti $c_n(x)$ se nazivaju <u>*Furijerovi koeficijeni*</u> koeficijenti funkcije $f(x)$ u odnosu na ortonorirane polinome $p_n(x)$ sa težinskom funkcijom $\rho(x)$. Red $\sum_{n=0}^{\infty} c_np_n(x)$, gdje su c_n Furijeovi koeficijenti funkcije $f(x)$ naziva se <u>*Furijeov red*</u> funkcije $f(x)$. Furijeovi koeficijenti postoje za svaku funkciju $f(x)$ koja je kvadratno sumabilna na (a, b) sa težinskom funkcijom $\rho(x)$. Na osnovu nejednakosi Cauchy-Bunjakovskog

$$\left|\int_a^b f_1(x)f_2(x)\,dx\right| \le \left(\int_a^b [f_1(x)]^2\,dx\right)^{1/2} \left(\int_a^b [f_2(x)]^2\,dx\right)^{1/2}$$

integral $\int_a^b \rho(x)f(x)p_k(x)\,dx$ konvergira za ovakve funkcije. Dalke, za svaku ovakvu funkciju $f(x)$ možemo napisati njen Fourierov red, ali bez daljeg ispitivanja ne znamo da li je red konvergira i ako konvergira da li mu je suma $f(x)$.

Ako je $\sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x)$ Furierov red funkcije $f(x)$ (tj. ako su $c_n = \int_a^b \rho(x) f(x) p_n(x)\,dx$) onda pišemo

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x).$$

Prethodni tekst možemo sumirati sljedećom teoremom:

(4.01) Teorema (Furierovo razlaganje u odnosu na ortogonalne polinome)
Neka je

$$\left\{[\rho(x)]^{1/2} p_0(x), [\rho(x)]^{1/2} p_1(x), [\rho(x)]^{1/2} p_2(x), ..., [\rho(x)]^{1/2} p_n(x), ...\right\}$$

ortonormirani sistem iz Teoreme 3.01. Tada se svaka kvadratno sumabilna funkcija $f(x)$ na (a,b) može napisati u obliku

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x).$$

Ovo zovemo Furijerovo razlaganje funkcije $f(x)$ na intervalu (a,b) u odnosu na ortogonalne polinome i pišemo

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x).$$

Skalare

$$c_n = \int_a^b \rho(x) f(x) p_n(x)\,dx,$$

zovemo Furierovi koeficijenti funkcije $f(x)$ u odnosu na ortogonalne polinome $p_n(x)$ sa težinskom funkcijom $\rho(x)$. ◇

Neka $s_n(x)$ označavaju parcijalnu sumu reda $\sum_{k=0}^{\infty} c_k p_k(x)$ sve do člana n-tog stepena:

$$s_n(x) = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + ... + c_n p_n(x).$$

Ako umjesto x uzmemo varijablu t u formuli za Furijerove koeficijenet $c_k = \int_a^b \rho(t) f(t) p_k(t)\,dx$, i dobijeni izraz zamjenimo umjesto c-ova u prethodnu jednakost, dobićemo

$$s_n(x) = p_0(x) \int_a^b \rho(t) f(t) p_0(t)\,dx + \int_a^b p_1(x) \rho(t) f(t) p_1(t)\,dx + ... + p_n(x) \int_a^b \rho(t) f(t) p_n(t)\,dx,$$

$$s_n(x) = \int_a^b \rho(t) f(t) \left[p_0(x) p_0(t) + p_1(x) p_1(t) + ... + p_n(x) p_n(t)\right]\,dx,$$

$$s_n(x) = \int_a^b \rho(t) f(t) K_n(x,t)\,dt,$$

gdje je

$$K_n(x,t) = K_n(t,x) = \sum_{k=0}^{n} p_k(t) p_k(x).$$

U stvari, ako je $f(x)$ polinom n-tog ili nižeg stepena, $f(x) = \pi_n(x)$, iz prethodnog dijela je poznato da postoji reprezentacija oblika $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x)$ gdje je desna strana konačna suma umjesto beskonačnog reda. Procedura za određivanje koeficijenata tada se primjenjuje ez pitanja konvergencije, i koeficijenti su dati sa $c_k = \int_a^b \rho(x) f(x) p_k(x)\, dx$. U ovom slučaju $s_n(x)$ je isti kao $\pi_n(x)$, i $\pi_n(x)$ je identički proizveden pomoću formule

$$\pi_n(x) = \int_a^b \rho(t)\pi_n(t) K_n(x,t)\, dt.$$

Na primjer, posmatrajmo ortonormirane Lagendreove polinome koje smo dobili u Vježbi 2.02

$$P_0(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2}},$$
$$P_1(x) = \sqrt{\tfrac{3}{2}}x,$$
$$P_2(x) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{5}{2}}(3x^2 - 1)$$
$$P_3(x) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{7}{2}}\,(5x^3 - 3x).$$

Ako razvijamo polinom $p(x) = x^3 - 1$ preko P_0, P_1, P_2 i P_3 imamo

$$c_0 = \int_{-1}^1 (x^3 - 1) P_0(x)\, dx = -\sqrt{2},$$
$$c_1 = \int_{-1}^1 (x^3 - 1) P_1(x)\, dx = \tfrac{\sqrt{6}}{5},$$
$$c_2 = \int_{-1}^1 (x^3 - 1) P_2(x)\, dx = 0,$$
$$c_3 = \int_{-1}^1 (x^3 - 1) P_2(x)\, dx = \tfrac{2\sqrt{14}}{35}.$$

Prema tome

$$x^3 - 1 = -\sqrt{2}P_0(x) + \frac{\sqrt{6}}{5}P_1(x) + 0P_2(x) + \frac{2\sqrt{14}}{35}P_3(x).$$

Time smo riješili sljedeći zadatak.

(4.02) Zadatak

Plinom $p(x) = x^3 - 1$ napisati kao linearnu kombinacju Lagendreove ortonormiranih polinoma $P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $P_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1)$ i $P_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\,(5x^3 - 3x)$. ◇

5. Povratna (rekurentna) formula

Prema Teoremi 4.01 proizvod $xp_n(x)$, kao polinom $(n+1)$-og stepena, se može izraziti u obliku

$$xp_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_{nk} p_k(x),$$

sa

$$c_{nk} = \int_a^b \rho(x) x p_n(x) p_k(x)\, dx.$$

Ako je $k < n-1$, $xp_k(x)$ je polinom stepena $k+1 < n$, i kako je $p_n(x)$ ortogonalan na svaki takav polinom u odnosu na težinsku funkciju $\rho(x)$ (Posljedica 3.04) svi koeficijenti c_{nk} sa osobinom $k < n-1$ nestaju, pa formula $xp_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n+1} c_{nk}p_k(x)$, postaje

$$xp_n(x) = c_{n,n-1}p_{n-1}(x) + c_{nn}p_n(x) + c_{n,n+1}p_{n+1}(x).$$

Neka a_{kk} označavaju koeficijent uz x^k u polinomu $p_k(x)$ za svaku vrijednost k,

$$p_k(x) = a_{kk}x^k + a_{k,k-1}x^{k-1} + ... + a_{k1}x + a_{k0}.$$

Izjednačavanje sa koeficijentima uz x^{n+1} u

$$xp_n(x) = c_{n,n-1}p_{n-1}(x) + c_{nn}p_n(x) + c_{n,n+1}p_{n+1}(x)$$

nam daje

$$a_{nn} = c_{n,n+1}a_{n+1,n+1}$$

tj.

$$c_{n,n+1} = \frac{a_{nn}}{a_{n+1,n+1}}.$$

Kako je dalje $c_{nk} = c_{kn}$ za sve vrijednosti n i k, prema $c_{nk} = \int_a^b \rho(x)xp_n(x)p_k(x)\,dx$, imamo $c_{n,n-1} = c_{n-1,n} = \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{nn}}$. Prema tome $xp_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n+1} c_{nk}p_k(x)$ se svodi na sljedeću formulu povratka koja povezuje proizvoljna tri p-a:

$$xp_n(x) = \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{nn}}p_{n-1}(x) + c_{nn}p_n(x) + \frac{a_{nn}}{a_{n+1,n+1}}p_{n+1}(x).$$

Ako zbog ljepšeg zapisa uvedemo simbol $p_{-1}(x)$ i definišemo ga tako da je identički jednak 0, sa $a_{-1,-1} = 0$, prethodna jednakost se može posmatrati da vrijedi za $n = 0$ isto tako kao i za pozitivne vrijednosti od n. Time smo dokazali Teorem 5.01.

(5.01) Teorem (rekurentna formula za ortogonalne polinome)

Neka je dat proizvoljan niz $p_0(x)$, $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$,... ortonormiranih polinoma na intervalu (a, b) u odnosu na težinsku funkcijeu $\rho(x)$. Tada ovaj niz zadovoljava tročlanu povratnu formulu

$$xp_k(x) = \frac{a_{k-1,k-1}}{a_{kk}}p_{k-1}(x) + c_{kk}p_k(x) + \frac{a_{kk}}{a_{k+1,k+1}}p_{k+1}(x), \qquad za\ k = 0, 1, 2, ..., n, ...$$

gdje su a_{kk} koeficijenti uz x^k u $p_k(x)$, c_{kk} su Furier-ov koeficijenti od $xp_k(x)$ u odnosu na ortogonalne polinome $p_k(x)$ sa težinskom funkcijom $\rho(x)$, $p_{-1}(x) \equiv 0$ i $a_{-1,-1} = 0$. ◇

Detaljno raspisana tročlana povratna (rekurentna) formula izgleda

$$\begin{aligned}
xp_0(x) &= c_{00}p_0(x) + \tfrac{a_{00}}{a_{11}}p_1(x),\\
xp_1(x) &= \tfrac{a_{00}}{a_{11}}p_0(x) + c_{11}p_1(x) + \tfrac{a_{11}}{a_{22}}p_2(x),\\
xp_2(x) &= \tfrac{a_{11}}{a_{22}}p_1(x) + c_{22}p_2(x) + \tfrac{a_{22}}{a_{33}}p_3(x),\\
&...\\
xp_n(x) &= \tfrac{a_{n-1,n-1}}{a_{nn}}p_{n-1}(x) + c_{nn}p_n(x) + \tfrac{a_{nn}}{a_{n+1,n+1}}p_{n+1}(x).
\end{aligned}$$

Ako $a_{k,k-1}$ označava koeficijent od x^{k-1} u $p_k(x)$, tako da $p_k(x) = a_{kk}x^k + a_{k,k-1}x^{k-1} + ... + a_{k0}$ za svaki k, tada možemo odrediti c_{kk} tako što ćemo porediti koeficijente od x^k u tročlanoj povratnoj formuli

$$xp_k(x) = \frac{a_{k-1,k-1}}{a_{kk}}p_{k-1}(x) + c_{kk}p_k(x) + \frac{a_{kk}}{a_{k+1,k+1}}p_{k+1}(x),$$

$$\begin{aligned}
x(a_{kk}x^k + a_{k,k-1}x^{k-1} + ...) &= \tfrac{a_{k-1,k-1}}{a_{kk}}(a_{k-1,k-1}x^{k-1} + a_{k-1,k-2}x^{k-2} + ...) +\\
&+ c_{kk}(a_{kk}x^k + a_{k,k-1}x^{k-1} + ...) + \tfrac{a_{kk}}{a_{k+1,k+1}}(a_{k+1,k+1}x^{k+1} + a_{k+1,k}x^k + ...),
\end{aligned}$$

da bi dobili

$$a_{k,k-1}x^k = c_{kk}a_{kk}x^k + \frac{a_{kk}}{a_{k+1,k+1}}a_{k+1,k}x^k,$$

$$c_{kk} = \frac{a_{k,k-1}}{a_{kk}} - \frac{a_{k+1,k}}{a_{k+1,k+1}}.$$

Prema tome vrijedi Teorema 5.02.

(5.02) Teorem

Neka je

$$\{p_0(x), p_1(x), p_2(x), ..., p_n(x), ...\}$$

ortonormiran sistem polinoma na intervalu (a,b) *u odnosu na težinsku funkciju* $\rho(x)$*, oblika* $p_k(x) = a_{kk}x^k + a_{k,k-1}x^{k-1} + ... + a_{k0}$ $(k = 0, 1, 2, ...)$ *za koji vrijedi*

$$xp_n(x) = \sum_{n=0}^{n+1} c_{nk}p_k(x).$$

gdje su

$$c_{nk} = \int_a^b \rho(x)xp_n(x)p_k(x)\,dx$$

Furierovi koeficijenti polinoma $xp_n(x)$ *u odnosu na ortogonalne polinome* $p_n(x)$ *sa težinskom funkcijom* $\rho(x)$*. Tada koeficijente* c_{nn} *možemo izračunati po formuli*

$$c_{nn} = \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} - \frac{a_{n+1,n}}{a_{n+1,n+1}}.$$

◇

6. Christoffel-Darboux-ov identitet

Izraz

$$xp_n(x) = \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{nn}}p_{n-1}(x) + c_{nn}p_n(x) + \frac{a_{nn}}{a_{n+1,n+1}}p_{n+1}(x).$$

Pomnožimo sa $p_n(t)$:

$$xp_n(x)p_n(t) = \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{nn}}p_{n-1}(x)p_n(t) + c_{nn}p_n(x)p_n(t) + \frac{a_{nn}}{a_{n+1,n+1}}p_{n+1}(x)p_n(t).$$

Ako ovo oduzmemo od sljedeće jednakosti (u kojoj smo, za razliku od prethodne, zamjenili mjesta od t i x)

$$tp_n(t)p_n(x) = \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{nn}}p_{n-1}(t)p_n(x) + c_{nn}p_n(t)p_n(x) + \frac{a_{nn}}{a_{n+1,n+1}}p_{n+1}(t)p_n(x)$$

članovi $c_{nn}p_n(t)p_n(x)$ će se poništiti, i kao rezultat ćemo dobiti sljedeći oblik

$$(t-x)p_n(t)p_n(x) = \frac{a_{nn}}{a_{n+1,n+1}}[p_{n+1}(t)p_n(x) - p_n(t)p_{n+1}(x)] - \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{nn}}[p_n(t)p_{n-1}(x) - p_{n-1}(t)p_n(x)]$$

Napišimo ovu jednakost tako što ćemo n uzastopno zamjeniti sa $n-1$, $n-2$, ..., 1, 0:

$$\begin{aligned}(t-x)p_{n-1}(t)p_{n-1}(x) &= \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{n,n}}[p_n(t)p_{n-1}(x) - p_{n-1}(t)p_n(x)] \\ &\quad - \frac{a_{n-2,n-2}}{a_{n-1,n-1}}[p_{n-1}(t)p_{n-2}(x) - p_{n-2}(t)p_{n-1}(x)] \\ (t-x)p_{n-2}(t)p_{n-2}(x) &= \frac{a_{n-2,n-2}}{a_{n-1,n-1}}[p_{n-1}(t)p_{n-2}(x) - p_{n-2}(t)p_{n-1}(x)]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \qquad -\frac{a_{n-3,n-3}}{a_{n-2,n-2}}[p_{n-2}(t)p_{n-3}(x)-p_{n-3}(t)p_{n-2}(x)] \\
& \dots \\
(t-x)p_1(t)p_1(x) &= \frac{a_{11}}{a_{2,2}}[p_2(t)p_1(x)-p_1(t)p_2(x)] \\
& \quad -\frac{a_{00}}{a_{11}}[p_1(t)p_0(x)-p_0(t)p_1(x)] \\
(t-x)p_0(t)p_0(x) &= \frac{a_{00}}{a_{11}}[p_1(t)p_0(x)-p_0(t)p_1(x)] \\
& \quad -0
\end{aligned}
$$

Ako saberemo svih $n+1$ napisanu jednakost dobićemo

$$(t-x)\sum_{k=1}^{n} p_k(t)p_k(x) = \frac{a_{nn}}{a_{n+1,n+1}}[p_{n+1}(t)p_n(x)-p_n(t)p_{n+1}(x)]$$

ili ako uvedemo oznaku $K_n(x,t)=\sum_{k=1}^{n} p_k(t)p_k(x)$

$$K_n(x,t)=\frac{a_{nn}}{a_{n+1,n+1}}\cdot\frac{[p_{n+1}(t)p_n(x)-p_n(t)p_{n+1}(x)]}{t-x}\quad .$$

Sve napisano možemo objediniti u sljedeću teoremu:

(6.01) Teorem (Christoffel-Darboux-ov jednakost)
Neka je dat proizvoljan niz $p_0(x)$, $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$,... ortonormiranih polinoma na intervalu (a,b) u odnosu na težinsku funkciju $\rho(x)$. Tada ovaj niz zadovoljava Christoffel-Darboux-ovu jednakost

$$K_n(x,t)=\frac{a_{nn}}{a_{n+1,n+1}}\cdot\frac{[p_{n+1}(t)p_n(x)-p_n(t)p_{n+1}(x)]}{t-x},$$

gdje je $K_n(x,t)=\sum_{k=1}^{n} p_k(t)p_k(x)$, a a_{nn} koeficijent koji stoji uz x^n u $p_k(x)$:
$p_n(x)=a_{nn}x^n+a_{n,n-1}x^{n-1}+\dots+a_{n0}$. ◇

Ova jednakost, koja je u slučaju Lagendre-ovih polinoma vrlo bitna, je od Christoffel-a, i poopštena je od Darboux-a za sistem ortogonalnih polinoma sa proizvoljnom težinskom funkcijom.

7. Simetrija

Kao poseban slučaj od nekog interesa, je ako pretpostavimo da je interval ortogonalnosti $(-c,c)$ (ili $(-\infty,\infty)$), *simetričan u odnosu na koordinatni početak.* Za ovaj slučaj pretpostavimo da je $\rho(x)$ parna funkcija i neka $q(x)$ označava proizvoljan polinom stepena manjeg od n. Ako je $q(x)$ polinom, $q(-x)$ je polinom istog stepena. Posmatrajmo integral

$$I=\int_{-c}^{c}\rho(x)p_n(-x)q(x)\,dx.$$

Ako uvedemo smjenu $t=-x$, tada

$$I=\int_{-c}^{c}\rho(-t)p_n(t)q(-t)\,dx=\int_{-c}^{c}\rho(t)p_n(t)q(-t)\,dx=0,$$

s obzirom da je polinom $p_n(t)$ ortogonalan na svaki polinom nižeg stepena, u odnosu na težinsku funkciju. Nestajanje integrala $\int_{-c}^{c}\rho(x)p_n(-x)q(x)\,dx$ znači da $p_n(-x)$ ima iste osobine ortogonalnosti kao i $p_n(-x)$. Štaviše, $p_n(-x)$ je normalizovana

$$\int_{-c}^{c}\rho(x)[p_n(-x)]^2\,dx = \int_{-c}^{c}\rho(-x)[p_n(-x)]^2\,dx = \int_{-c}^{c}\rho(t)[p_n(t)]^2\,dx = 1.$$

Sad primjetimo da obe funkcije $p_n(x)$ i $(-1)^n p_n(x)$ imaju isti koeficijent uz x^n, obe zadovoljavaju iste osobine ortogonalnosti i obe su normalizovane. Možemo zaključiti da je $(-1)^n p_n(x)$ *identički jednaka sa* $p_n(x)$. Šta ovo znači? Posmatrajmo

$$p_n(x) = a_{nn}x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + ... + a_{n1}x + a_{n0},$$

$$\begin{aligned} p_n(-x) &= a_{nn}(-x)^n + a_{n,n-1}(-x)^{n-1} + ... + a_{n1}(-x) + a_{n0} = \\ &= (-1)^n a_{nn}x^n + (-1)^{n-1}a_{n,n-1}x^{n-1} + ... + (-1)a_{n1}(x) + a_{n0}, \\ (-1)^n p_n(-x) &= (-1)^{2n}a_{nn}x^n + (-1)^{2n-1}a_{n,n-1}x^{n-1} + ... + (-1)^{2n-(n-1)}a_{n1}(x) + a_{n0}. \end{aligned}$$

Ako je $(-1)^n p_n(x) = p_n(x)$ za svaki x, tada $p_n(x)$ sadrži samo parne stepene od x ili samo neparne stepene od x, u zavisnosti da li je n paran ili neparan. Ovim smo dokazali Teoremu 7.01.

(7.01) Teorem

Neka je

$$\{p_0(x), p_1(x), p_2(x), ..., p_n(x), ...\}$$

ortonormirani sistem polinoma na intervalu $(-c, c)$, *u odnosu na težinsku funkciju* $\rho(x)$, *neka je* $\rho(x)$ *parna funkcija i neka su polinomi* $p_k(x)$ *oblika* $p_k(x) = a_{kk}x^k + a_{k,k-1}x^{k-1} + ... + a_{k0}$ $(k = 0, 1, 2, ...)$. *Tada* $p_n(x)$ *sadrži samo parne stepene od* x *ili samo neparne stepene od* x, *u zavisnosti da li je* n *paran ili neparan.* ◇

Ovo u stvari znači da su koeficijenti koje smo u Teoremi 7.01 označili sa $a_{k,k-1}$ nula za svaku vrijednost k, u slučaju simetričnosti o kojoj diskutujemo, pa prema tome, kao posljedicu Teorema 5.01 i 5.02, imamo:

(7.02) Posljedica

Neka je

$$\{p_0(x), p_1(x), p_2(x), ..., p_n(x), ...\}$$

ortonormiran sistem polinoma na intervalu $(-c, c)$ *u odnosu na težinsku funkciju* $\rho(x)$, *neka je* $\rho(x)$ *parna funkcija i neka su polinomi* $p_n(x)$ *oblika* $p_n(x) = a_{nn}x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + ... + a_{n0}$ $(n = 0, 1, 2, ...)$. *Tada su Furier-ovi koeficijenti*

$$c_{nn} = \int_{-c}^{c}\rho(x)xp_n(x)p_n(x)\,dx$$

polinoma $xp_n(x)$ *u odnosu na ortogonalne polinome* $p_n(x)$ *sa težinskom funkcijom* $\rho(x)$ *jednaki nuli, pa imamo*

$$xp_n(x) = \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{nn}}p_{n-1}(x) + \frac{a_{nn}}{a_{n+1,n+1}}p_{n+1}(x), \qquad za\ n = 0, 1, 2, 3, ...$$

gdje je po dogovoru $p_{-1}(x) \equiv 0$ *i* $a_{-1,-1} = 0$. ◇

8. Nule

Sljedeće što želimo pokazati je da su svi korijeni jednačine $p_n(x) = 0$ realni i različiti i nalaze se u unutrašnjosti intervala (a, b). Ako je posmatrani interval $(-\infty, \infty)$, zaključak je sveden samo na to da su korijeni realni i različiti.

Posmatrajmo sljedeću tvrdnju: Polinom $p_n(x)$ je polinom n-tog stepena akko $p_n(x)$ mijenja znak n puta u unutrašnjosti intervala. Imamo da, kako je $p_n(x)$ ortogonalan na polinom nultog stepena u odnosu na težinsku funkciju, ako je $n > 1$,

$$\int_a^b \rho(x) p_n(x)\, dx = 0.$$

Ovo sigurno ne bi bilo tačno ako $p_n(x)$ nikako ne mjenja znak na posmatranom intervalu. Pretpostavim da $p_n(x)$ mjenja znak između a i b u tačno m tački x_1, x_2, ..., x_m $(m < n)$. Neka je

$$\pi(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_m),$$

polinom m-tog stepena. Tada proizvod $p_n(x)\pi(x)$ neće mijenjati znak na posmatranom intervalu. Zašto? Kako su x_1, x_2, ..., x_m nule polinoma $p_n(x)$, to ovaj polinom možemo napisati u obliku $p_n(x) = \pi(x)q(x)$ za neki polinom $q(x)$ stepena $n - m$. Pa imamo

$$\int_a^b \rho(x) p_n(x) \pi(x)\, dx = \int_a^b \rho(x) q(x) [\pi(x)]^2\, dx \neq 0,$$

s obzirom da su $\rho(x)$ i $[\pi(x)]^2$ ne-negativne funkcije. Prema tome, ako je $m < n$ vrijednost prethodnog integrala je u kontradikciji sa osobinom ortogonalnosti polinoma $p_n(x)$. Zaključujemo da mora biti $m = n$, i time smo dokazali sljedeću teoremu:

(8.01) Teorema

Neka je

$$\{p_0(x), p_1(x), p_2(x), ..., p_n(x), ...\}$$

ortonormiran sistem polinoma na intervalu (a, b) u odnosu na težinsku funkciju $\rho(x)$ i neka je $\rho(x)$ nenegativna funkcija. Tada su svi korijeni jednačine $p_n(x) = 0$ realni i različiti i nalaze se u unutrašnjosti intervala (a, b). ◇

9. Osobine najmanjeg-kvadrata

Neka je $f(x)$ proizvoljna funkcija, koja zadovoljava osobinu integrabilnosti na (a, b), i neka su c_k i $s_n(x)$ definisani, kao i ranije, sa

$$c_k = \int_a^b \rho(x) f(x) p_k(x)\, dx.$$

$$s_n(x) = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + ... + c_n p_n(x).$$

Neka je $r_n(x) = f(x) - s_n(x)$. Kao direktna posjedica definicije,

$$\int_a^b \rho(x) s_n(x) p_k(x)\, dx = \int_a^b \rho(x)[c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + ... + c_n p_n(x)] p_k(x)\, dx = c_k,$$

$$\int_a^b \rho(x) r_n(x) p_k(x)\, dx = \int_a^b \rho(x)[f(x) - s_n(x)] p_k(x)\, dx = 0, \quad k = 0, 1, ..., n.$$

Neka je $\pi_n(x)$ polinom najviše n-tog stepena. Neka je

$$\pi_n(x) - s_n(x) = \delta_n(x) = \sum_{k=0}^{n} d_k p_k(x),$$

tako da se $\pi_n(x)$ svodi na $s_n(x)$ ako su svi d-ovi nula, i imamo

$$f(x) - \pi_n(x) = [r_n(x) + s_n(x)] - [\delta_n(x) + s_n(x)] = r_n(x) - \delta_n(x).$$

Ako sad polinom $\pi_n(x)$ tumačimo kao aproksimacija funkcije $f(x)$, tada integral kvadrata greške od $\pi_n(x)$ sa težinskom funkcijom $\rho(x)$ od jedne do druge tačke na posmatranom intervalu je

$$\int_a^b \rho(x)[f(x) - \pi_n(x)]^2 \, dx = \int_a^b \rho(x)[r_n(x) - \delta_n(x)]^2 \, dx =$$
$$= \int_a^b \rho(x)[r_n(x)]^2 \, dx - 2\int_a^b \rho(x) r_n(x)\delta_n(x) \, dx + \int_a^b \rho(x)[\delta_n(x)]^2 \, dx.$$

Ali s obzirom da je $\int_a^b \rho(x) r_n(x) p_k(x) \, dx = 0$ za $k = 0, 1, ..., n$ i $\delta_n(x) = \sum_{k=0}^{n} d_k p_k(x)$ imamo

$$\int_a^b \rho(x) r_n(x)\delta_n(x) \, dx = \int_a^b \rho(x) r_n(x) \left[\sum_{k=0}^{n} d_k p_k(x)\right] dx = 0,$$

$$\int_a^b \rho(x)[\delta_n(x)]^2 \, dx = \int_a^b \rho(x) \left[\sum_{k=0}^{n} d_k p_k(x)\right]^2 dx = \sum_{k=0}^{n} d_k^2 \, .$$

Prema tome

$$\int_a^b \rho(x)[f(x) - \pi_n(x)]^2 \, dx \geq \int_a^b \rho(x)[r_n(x)]^2 \, dx$$

gdje jednakost vrijedi akko su svi d-ovi nula. *Prema tome, između svih polinoma stepena manjeg ili jednakog n, polinom $s_n(x)$ se može okarakterisati, kao onaj čiji je integral greške na kvadrat sa težinom najmanji.* Time smo dokazali Teoremu 9.01.

(9.01) Teorema

Neka je

$$\{p_0(x), p_1(x), p_2(x), ..., p_n(x), ...\}$$

ortonormiran sistem polinoma na intervalu (a, b) u odnosu na težinsku funkciju $\rho(x)$, i neka su c_k i $s_n(x)$ definisani sa

$$c_k = \int_a^b \rho(x) f(x) p_k(x) \, dx,$$
$$s_n(x) = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + ... + c_n p_n(x).$$

Tada, za svaki polinom $\pi_n(x)$ ($\pi_n(x) \not\equiv s_n(x)$) stepena manjeg ili jednakog jednakog n, vrijedi

$$\int_a^b \rho(x)[f(x) - s_n(x)]^2 \, dx < \int_a^b \rho(x)[f(x) - \pi_n(x)]^2 \, dx.$$

◇

Kao konkretan primjer, neka je $f(x)$ funkcija x^n, i neka su c-ovi koeficijenti pomoću kojih se polinom x^n može izraziti preko p-ova:

$$x^n = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + ... + c_n p_n(x).$$

Primjenimo zaključak Teoreme 9.01 na aproksimaciju od x^n polinomom stepena najviše $n-1$. Polinom za najbolju aproksimaciju u smislu kriterija posljednjeg-kvadrata je

$$s_{n-1}(x) = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + ... + c_{n-1} p_{n-1}(x).$$

Ali

$$x^n - s_{n-1}(x) = c_n p_n(x).$$

Polinom $p_n(x)$ je određen do konstantnog faktora tako što ćemo polinom stepena najviše $n-1$ oduzeti od x^n, i to polinom koji će napraviti integral težine kvadrata razlike najmanjim mogućim.

(9.02) Posljedica

Neka je

$$\{p_0(x), p_1(x), p_2(x), ..., p_n(x), ...\}$$

ortonormiran sistem polinoma na intervalu (a, b) u odnosu na težinsku funkciju $\rho(x)$, i neka su c_k i $s_{n-1}(x)$ definisani sa

$$c_k = \int_a^b \rho(x) f(x) p_k(x)\, dx,$$

$$s_{n-1}(x) = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + ... + c_{n-1} p_{n-1}(x).$$

Tada $p_n(x)$ možemo odrediti do konstantnog faktora pomoću formule

$$p_n(x) = x^n - s_{n-1}(x),$$

i greška $r_{n-1}(x) = x^n - s_{n-1}(x)$ u smislu

$$\int_a^b \rho(x)[r_{n-1}(x)]^2\, dx$$

je najmanje moguća za aproksimaciju od x^n polinomom $(n-1)$-og stepena. ◇

10. Diferencijalna jednačina

Pretpostavimo sad da funkcija $\rho(x)$ *zadovoljava sljedeću diferencijalnu jednačinu*

$$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = \frac{D + Ex}{A + Bx + Cx^2}$$

(ili drgačije napisano $(A + Bx + Cx^2)\rho'(x) = (D + Ex)\rho(x)$) gdje su A, B, C, D i E konstante, i pretpostavimo da $(A + Bx + Cx^2)\rho(x)$ nestaje na krajevima posmatranog intervala. Naravno ovo su skroz jake pretpostavke, ali težinske funkcije koje zadovoljavaju ove uslove, su one od velike teoriske i praktične važnosti. Napisana diferencijalna jednačina je poznata pod imenom Pearson-ova diferencijalna jednačina. Napomenimo i to da ako je posmatrani interval beskonačan, potrebno je pretpostaviti i dodatnu hipotezu, ako nije poznata drugačije, a to je da se proizvod $\rho(x)$ sa proizvoljnim polinomom približava nuli kako x postaje beskonačan na intervalu. Pod navedenim uslovima, sljdeće što ćemo pokazati je da $p_n(x)$ *zadovoljava diferencijalnu jednačinu oblika*

$$\alpha(x) p_n''(x) + \beta(x) p_n'(x) + \gamma_n p_n(x) = 0,$$

u kojoj je $\alpha(x)$ polinom drugog reda, u ovom slučaju to će biti $A + Bx + Cx^2$, $\beta(x)$ je polinom prvog reda nezavisan od n, i γ_n zavisi od n ali je nezavisan od x.

Neka je $q_m(x)$ proizvoljni polinom stepena $m < n$. Nazivnik $A + Bx + Cx^2$ označimo kraće sa $G(x)$. Na integral

$$I = \int_a^b q_m(x) \frac{d}{dx}[G(x)\rho(x)p_n'(x)]\, dx$$

primjenimo parcijalnu integraciju sa smjenama

$$u = q_m(x), \quad dv = \frac{d}{dx}[G(x)\rho(x)p_n'(x)]\, dx,$$

$$du = q_m'(x)dx, \quad v = G(x)\rho(x)p_n'(x).$$

Funkcija uv, sadrži proizvod $G(x)\rho(x)$ sa polinomom, pa nestaje na krajevima intervala, čime dobijamo

$$I = -\int_a^b G(x)\rho(x)p_n'(x)q_m'(x)\, dx.$$

Primjenimo ponovo parcijalnu integraciju sa smjenama

$$u = G(x)\rho(x)q_m'(x), \quad dv = p_n'(x)\, dx,$$

$$du = \frac{d}{dx}[G(x)\rho(x)q_m'(x)]dx, \quad v = p_n(x).$$

Ponovo uv nestaje na krajevima intervala čime dobijamo

$$I = \int_a^b p_n(x) \frac{d}{dx}[G(x)\rho(x)q_m'(x)]dx.$$

Ali,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[G(x)\rho(x)q_m'(x)] &= \frac{d}{dx}[(A + Bx + Cx^2)\rho(x)q_m'(x)] = \\
&= (B + 2Cx)\rho(x)q_m'(x) + G(x)\rho'(x)q_m'(x) + G(x)\rho(x)q_m''(x) = \\
&= (B + 2Cx)\rho(x)q_m'(x) + (D + Ex)\rho(x)q_m'(x) + G(x)\rho(x)q_m''(x) = \\
&= \rho(x)[(B + 2Cx)q_m'(x) + (D + Ex)q_m'(x) + G(x)q_m''(x)],
\end{aligned}$$

s obzirom da je prema pretpostavci $G(x)\rho'(x) = (D + Ex)\rho(x)$; i izraz u zadnjoj uglastoj zagradi je neki polinom $r_m(x)$ stepena najviše m. Pa je

$$I = \int_a^b \rho(x)p_n(x)r_m(x)dx = 0,$$

Zbog osobine ortogonalnosti polinoma $p_n(x)$. Primjetimo da smo dobili

$$I = \int_a^b q_m(x) \frac{d}{dx}[G(x)\rho(x)p_n'(x)]\, dx = \int_a^b \rho(x)p_n(x)r_m(x)dx = 0.$$

U orginalnom izrazu za integral I imamo

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dx}[G(x)\rho(x)p_n'(x)] = \frac{d}{dx}[(A + Bx + Cx^2)\rho(x)p_n'(x)] = \\
&= (B + 2Cx)\rho(x)p_n'(x) + G(x)\rho'(x)p_n'(x) + G(x)\rho(x)p_n''(x) = \\
&= \rho(x)[(B + 2Cx)p_n'(x) + (D + Ex)p_n'(x) + G(x)p_n''(x)],
\end{aligned}$$

što ima oblik $\rho(x)\pi_n(x)$, gdje je polinom $\pi_n(x)$ stepena najviše n,
$\pi_n(x) = [(B + 2Cx)p_n'(x) + (D + Ex)p_n'(x) + G(x)p_n''(x)]$. Prema tome, za proizvoljan polinom $q_m(x)$ stepena $m < n$,

$$\int_a^b \rho(x)\pi_n(x)q_m(x)\, dx = 0.$$

Drugim riječima, $\pi_n(x)$ ima osobinu ortogonalnosti koju za dato n posjeduje samo konstanta pomnožena sa $p_n(x)$. Prema tome, mora postojati konstanta K_n takva da

$$\pi_n(x) = K_n p_n(x).$$

Polinom $\pi_n(x)$ možemo napisati u "ljepšem" obliku

$$\begin{aligned}\pi_n(x) &= (B + 2Cx)p_n'(x) + (D + Ex)p_n'(x) + G(x)p_n''(x)\\ &= (A + Bx + Cx^2)p_n''(x) + [(B + D) + (2C + E)x]p_n'(x).\end{aligned}$$

Upoređivanjem koeficijenata uz x^n, gdje ćemo vodeći koeficijent u $p_n(x)$ označiti, kao i ranije, sa a_{nn} ($a_{nn} \neq 0$), dobićemo

$$Cn(n-1)a_{nn} + (2C + E)na_{nn} = K_n a_{nn},$$

$$K_n = Cn(n+1) + En.$$

Konačno iz

$$(B + 2Cx)p_n'(x) + (D + Ex)p_n'(x) + G(x)p_n''(x) = K_n p_n(x)$$

slijedi

$$(A + Bx + Cx^2)p_n''(x) + [(B + D) + (2C + E)x]p_n'(x) - [Cn(n+1) + En]p_n(x) = 0.$$

Time smo dokazali Teoremu 10.01.

(10.01) Teorema (diferencijalna jednačina za ortogonalne polinome)
Neka je

$$\{p_0(x), p_1(x), p_2(x), ..., p_n(x), ...\}$$

ortonormiran sistem polinoma na intervalu (a, b) *u odnosu na težinsku funkciju* $\rho(x)$, *neka* $\rho(x)$ *zadovoljava diferencijalnu jednačinu*

$$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = \frac{D + Ex}{A + Bx + Cx^2}$$

gdje su A, B, C, D *i* E *konstante, i pretpostavimo da* $(A + Bx + Cx^2)\rho(x)$ *nestaje na krajevima intervala* (a, b) *(ako je posmatrani interval beskonačan, potrebno je pretpostaviti i da se proizvod* $\rho(x)$ *sa proizvoljnim polinomom približava nuli kako* x *postaje beskonačno). Tada* $p_n(x)$ *zadovoljavaju sljedeću diferencijalnu jednačinu*

$$(A + Bx + Cx^2)p_n''(x) + [(B + D) + (2C + E)x]p_n'(x) - [Cn(n+1) + En]p_n(x) = 0.$$

◇

U slučaju Legendre-ovih polinoma, $\rho(x) = 1$ i posmatrani interval je $[-1, 1]$. Pretpostavke Teoreme 10.01 uključuju uslov da $(A + Bx + Cx^2)\rho(x)$ moraju nestati na kraju intervala, i to će biti zadovoljeno akko korijeni jednačine $A + Bx + Cx^2 = 0$ su $x = 1$ i $x = -1$. Iz čega slijedi $A + Bx + Cx^2 = 1 - x^2$. Diferencijalnu jednačinu $\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = \frac{D+Ex}{A+Bx+Cx^2}$ sad možemo napisati u obliku $\rho'(x)/\rho(x) = 0/(1 - x^2)$, iz čega možemo zaključiti da je

$$B = D = E = 0, \quad A = 1, \quad C = -1.$$

Ako ove konstante uvrstimo u diferencijalnu jednačinu iz Teoreme 10.01, dobićemo poznatu Legendreovu diferencijalnu jednačinu

$$(1 - x^2)p_n''(x) - 2xp_n'(x) + n(n+1)p_n(x) = 0.$$

U slučaju Hermiteovih polinoma, za $\rho(x)$ možemo uzeti $\rho(x) = e^{-x^2}$, gdje je posmatrani interval $(-\infty, \infty)$. Pretpostavke Teoreme 10.01 uključuju uslov $(A + Bx + Cx^2)\rho(x)$ moraju težiti nuli kada x teži beskonačno, iz čega slijedi da za koeficijent B i C možemo uzeti nule. Kako je $\rho'(x)/\rho(x) = -2x$ i $\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = \frac{D+Ex}{A+Bx+Cx^2}$ imamo

$$B = C = D = 0, \quad A = 1, \quad E = -2.$$

Ako ove konstante uvrstimo u diferencijalnu jednačinu iz Teoreme 10.01, dobićemo Hermiteovu diferencijalnu jednačinu

$$p_n''(x) - 2xp_n'(x) + 2np_n(x) = 0.$$

Ako za $\rho(x)$ uzmemo polinom $\rho(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ i posmatramo interval $[-1, 1]$, tada da bi zadovoljili pretpostavke Teoreme 10.01 nije teško vidjeti da bi dobili

$$A + Bx + Cx^2 = 1 - x^2, \quad \frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = \frac{x}{1 - x^2}$$

tj.

$$B = D = 0, \quad A = 1, \quad C = 1, \quad E = 1.$$

Uvrštavanjem ovih konstanti u diferencijalnu jednačinu iz Teoreme 10.01, dobićemo Chebichef-ovu diferencijalnu jednačinu

$$(1 - x^2)p_n''(x) - xp_n'(x) + n^2 p_n(x) = 0.$$

Prethodni tekst je u stvari rješenje Vježbe 10.02.

(10.02) Vježba

Diskutovati vrijednosti koeficijenata A, B, C, D i E koji zadovoljavaju sve uslove iz Teoreme 10.01 ako za težinku funkciju posmatramo $\rho(x) = 1$, $\rho(x) = e^{-x^2}$ i $\rho(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ redom na intervalima $[-1, 1]$, $(-\infty, \infty)$ i $[-1, 1]$. ◇

Pearsonova diferencijalna jednačina esenciajlno ima tri tipa rješenja koja, poslije množenja sa polinomom proizvoljnog stepena, daju konačne integrale nad pridruženim rangom. Posmatrani interval je u jednom slučaju konačan, u drugom slučaju beskonačan u oba smijera, i u trećem slučaju beskonačan u jednom smijeru i ograničen u drugom. Više o ovome možete pročitati u [2] strana 142-149.

(ova stranica je ostavljena prazna)

II Hermiteovi polinomi

11. Definicija pomoću izvoda

U rješenju Problema 1.02 (strana 6) smo pokazali da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\ (-1)^m e^{x^2} \frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2}\, dx = 0,$$

za $m \neq n$. Ako uvedemo smjenu $x = \frac{t}{\sqrt{2}}$ imaćemo da je

$$\begin{aligned}
&x^2 = t^2/2,\\
&dx = dt/\sqrt{2},\\
&\tfrac{d}{dx} e^{-x^2} = -2xe^{-x^2} = -2\tfrac{t}{\sqrt{2}} e^{-t^2/2} = -\sqrt{2} t e^{-t^2/2} = \sqrt{2}\tfrac{d}{dt} e^{-t^2/2}\\
&\tfrac{d^2}{dx^2} e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(-1+2x^2) = 2e^{-t^2/2}(-1+t^2) = (\sqrt{2})^2 \tfrac{d^2}{dt^2} e^{-t^2/2}\\
&\qquad \dots\\
&\tfrac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = (\sqrt{2})^n \tfrac{d^n}{dt^n} e^{-t^2/2}
\end{aligned}$$

pa će prethodni integral postati

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\ (-1)^n e^{t^2/2} (\sqrt{2})^n \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2/2}\ (-1)^m e^{t^2/2} (\sqrt{2})^m \frac{d^m}{dt^m} e^{-t^2/2}\, dt = 0,$$

ili drugačije napisano

$$(\sqrt{2})^{n+m-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\ (-1)^n e^{t^2/2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2/2}\ (-1)^m e^{t^2/2} \frac{d^m}{dt^m} e^{-t^2/2}\, dt = 0,$$

iz čega slijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\ (-1)^n e^{t^2/2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2/2}\ (-1)^m e^{t^2/2} \frac{d^m}{dt^m} e^{-t^2/2}\, dt = 0.$$

Polinome $H_n(x)$, stepena n, definisani sa

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} \phi(x)$$

gdje je $\phi(x) := e^{-x^2/2}$, nazivamo Hermiteovi polinomi (Charles Hermmite (1822-1901)) stepena n. Ovi polinomi su ortogonalni nad intervalom $(-\infty, \infty)$ u odnosu na težinsku funkciju[1] $e^{-x^2/2}$ (vidi zadnje napisani integral iznad).

Posmatrajmo funkciju

$$\phi(x) = e^{-x^2/2}.$$

Direktnim diferenciranjem dobijemo

$$\begin{aligned}
&\phi'(x) = -xe^{-x^2/2},\\
&\phi''(x) = (x^2-1)e^{-x^2/2},\\
&\phi'''(x) = (-x^3+3x)e^{-x^2/2},
\end{aligned}$$

[1]Postoje neke raznovrsnosti u upotrebi oznaka kod Hermiteovih polinoma. Nekad se kao težinska funkcija uzima e^{-x^2} umjesto $e^{-x^2/2}$, kao što smo i mi uradili u prvom dijelu ovog rada. U ovom dijelu kao težinsku funkciju uzimamo $e^{-x^2/2}$ zbog pogodnosti ove funkcije u nekim kasnijim rezultatima.

$\quad \ldots \quad .$

Posmatrajući ovaj niz, a matematičkom indukcijom nije teško i formalno pokazati, da će izvod bilo kojeg reda kao rezultat biti proizvod funkcije $e^{-x^2/2}$ sa polinomom po promjenjivoj x.

Posmatrajmo sad Hermiteove polinome

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} \phi(x).$$

Tada, direktno iz napisane formule slijedi da je $\phi^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x^2/2} H_n(x)$, i diferenciranjem ove jednakosti imamo

$$\phi^{(n+1)}(x) = (-1)^n [-x H_n(x) + H_n'(x)] e^{-x^2/2},$$

dok sa druge strane (direktno iz definicije od $H_{n+1}(x)$) imamo
$\phi^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} e^{-x^2/2} H_{n+1}(x)$, tako da

$$H_{n+1}(x) = x\, H_n(x) - H_n'(x).$$

Kako je $H_0(x) = 1$,

$$\begin{aligned} &H_1(x) = x \cdot 1 - 0 = x \\ &H_2(x) = x \cdot x - 1 = x^2 - 1 \\ &H_3(x) = x \cdot (x^2 - 1) - 2x = x^3 - 3x \\ &\ldots \end{aligned}$$

to matematičkom indukcijom nije teško pokazati da je $H_n(x)$ polinom n-tog stepena čiji su koeficijenti uz x^n jednaki jedinici. Ako poredimo zadnje napisane polinome sa polinomima sa strane 9, primjetićemo da nisu isti, i da su ovi polinomi napisai u puno "ljepšem" obliku. Ovakav rezultat imamo zbog izbora težinske funkcije. Prethodno napisani tekst možemo zbiti u Lemu 11.01, Definiciju 11.02 i u dokaz Teoreme 11.03.

(11.01) Lema

Funkcija $H_n(x)$, definisana sa

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}$$

je polinom n-tog stepena. ◇

(11.02) Definicija (Hermiteovi polinomi)

Polinome $H_n(x)$ iz Leme 11.01, nazivamo Hermiteovi polinomi. ◇

(11.03) Teorema

Neka su $H_n(x)$ Hermiteovi polinomi. Tada su ovi polinomi ortogonalni nad intervalom $(-\infty, \infty)$ u odnosu na težinsku funkciju $e^{-x^2/2}$, mogu se odrediti pomoću formule

$$H_{n+1}(x) = x\, H_n(x) - H_n'(x), \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

i $H_n(x)$ je polinom n-tog stepena čiji je koeficijent uz x^n jednak jedinici. ◇

12. Ortogonalnost i faktor ortonormalizacije

U prethodnom dijelu smo pokazali ortogonalnost Hermiteovih polinoma tako što smo iskoristili rezultat dobijen u Problemu 1.02. Pokažimo ovu ortogonalnost na mnogo elegantntniji način.

Neka su m i n proizvoljni ne-negativni cijeli, i ako nisu jednaki neka je n veće od m : $m < n$. Neka je

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2} = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} \phi(x),$$

i posmatrajmo integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} H_m(x) H_n(x)\, dx.$$

Imamo

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} H_m(x)\, (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} \phi(x)\, dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)\, \phi^{(n)}(x)\, dx.$$

Za parcijalnu integraciju, neka je

$$u = H_m(x), \quad dv = \phi^{(n)}(x)\, dx,$$
$$du = H'_m(x)\, dx, \quad v = \phi^{(n-1)}(x).$$

Tada proizvod uv (zato što je ovo proizvod od $e^{-x^2/2}$ sa polinomom) nestaje za $x = \pm\infty$, pa

$$I = (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} H'_m(x)\, \phi^{(n-1)}(x)\, dx.$$

Ponavljajući ovaj proces nakon m koraka dobićemo

$$I = (-1)^{n+m} \int_{-\infty}^{\infty} H_m^{(m)}(x)\, \phi^{(n-m)}(x)\, dx.$$

Ako je $n - m > 0$, primjenom još jedne parcijalne integracije, u kojoj je $H_m^{(m+1)}(x) \equiv 0$, zato što je $H_m(x)$ polinom m-tog stepena (ili direktnom integracijom funkcije $\phi^{(n-m)}(x)$ sa konstantnim koeficijentom $H_m^{(m)}(x)$) dobijamo $I = 0$. Ovo znači da su polinomi *$H_m(x)$ i $H_n(x)$ ortogonalni nad intervalom $(-\infty, \infty)$ u odnosu na težinsku funkciju $e^{-x^2/2}$.*

Za $m = n$, posljednji integral postaje

$$I = (-1)^{n+n} \int_{-\infty}^{\infty} H_n^{(n)}(x)\, \phi^{(n-n)}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} H_n^{(n)}(x)\, \phi^{(0)}(x)\, dx = n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx,$$

zato što je $H_n^{(n)}(x) = n!$ (vidi Teoremu 11.03), pa imamo

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} H_n(x) H_n(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \left[H_n(x)\right]^2\, dx = n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx.$$

Vrijednost integrala $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx$ možemo izračunati na dva načina:

Prvi način: Pomoću dvostrukog integrala.

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx,$$

$$C^2 = C \cdot C = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}\, dxdy =$$

$$\left| \begin{array}{c} \text{uvedimo polarne koordinate} \\ x = r\cos\varphi, \ \ y = r\sin\varphi \\ dx\,dy = r\,dr\,d\varphi \end{array} \right| = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{-r^2/2}\, r\,dr\,d\varphi = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} e^{-r^2/2}\, d(-r^2/2) =$$

$$-2\pi \cdot e^{-r^2/2}\Big|_0^{\infty} = 2\pi.$$

Prema tome

$$C = \sqrt{2\pi}.$$

Drugi način: Pomoću "integrala vjerovatnoće".

Prisjetimo se: Za svako realno $\alpha > 0$, funkciju definisanu sa

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$$

nazivamo <u>*Gama funkcijom*</u>. Primjetimo da je $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = -\int_0^{\infty} e^{-x}\, d(-x) = 1$. Funkciju definisanu sa

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\, dx$$

za svako $\alpha > 0$ i $\beta > 0$ zovemo <u>*Beta funkcija*</u>. Između Beta i Gama funkcije postoji veza data relacijom

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

(vidi [1], strana 46). Primjetimo da je $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)}$.

Sad možemo izračunati traženi integral:

$$\pi = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{c} \text{uvedimo smjenu} \\ x = 2t-1, \\ dx = 2\,dt \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{2\,dt}{\sqrt{1-(2t-1)^2}} = \int_0^1 \frac{2\,dt}{\sqrt{4t(1-t)}} =$$

$$= \int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{-1/2} = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \left[\Gamma(\frac{1}{2})\right]^2,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \left| \begin{array}{c} \text{uvedimo smjenu} \\ x = \sqrt{2t}, \\ dx = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{t}}\, dt \end{array} \right| =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t}\, dt = \sqrt{2}\Gamma(\frac{1}{2}).$$

Prema tome

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$$

(naravno, postoje i drugi načini za izračunavanje vrijednosti ovog integrala).

Time smo dobili

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \left[H_n(x)\right]^2\, dx = n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = n!\sqrt{2\pi}.$$

Ortonormirani Hermiteovi polinomi su dati sa $\dfrac{H_n(x)}{\sqrt{n!\sqrt{2\pi}}}$.

Bez obzira na ovo, sva diskusija u ostatku ovog rada će biti nastavljena u smislu orginalnih polinoma $H_n(x)$. Prethodno napisani tekst je u stvari dokaz Teoreme 12.01.

(12.01) Teorema

Funkcije $h_n(x)$, definisane sa

$$h_n(x) = \frac{H_n(x)}{\sqrt{n!\sqrt{2\pi}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!\sqrt{2\pi}}} e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}$$

formiraju ortonormiran sistem na intervalu $(-\infty, \infty)$ u odnosu na težinsku funkciju $e^{-x^2/2}$ (date funkcije su poznati pod imenom normirani Hermiteovi polinomi). ◇

13. Hermiteovi i Gram-Charlier-ovi redovi

Kako je

$$\left\{ \frac{H_0(x)}{\sqrt{0!\sqrt{2\pi}}}, \frac{H_1(x)}{\sqrt{1!\sqrt{2\pi}}}, \frac{H_2(x)}{\sqrt{2!\sqrt{2\pi}}}, ..., \frac{H_n(x)}{\sqrt{n!\sqrt{2\pi}}}, ... \right\}$$

ortonormiran sistem funkcija u odnosu na težinsku funkciju $e^{-x^2/2}$, prema Teoremi 4.01, proizvoljna kvadratno integrabilna funkcija $f(x)$ na intervalu $(-\infty, \infty)$ se može napisati u obliku reda pomoću Hermiteovih polinoma

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k H_k(x),$$

$$c_k = \frac{1}{n!\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} f(x) H_k(x)\, dx.$$

Hermiteovi polinomi se koriste u statističkoj teoriji za predstavljanje funkcija frekvencija nad intervalom $(-\infty, \infty)$; ali za ovu upotrebu red napravljen od članova oblika $c_k e^{-x^2/2} H_k(x)$ je mnogo korisniji neko sam red polinoma. Neka je $F(x)$ data funkcija, i neka je $f(x) = e^{x^2/2} F(x)$. Tada zadnje dvije formule će imati oblik

$$F(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-x^2/2} H_k(x),$$

$$c_k = \frac{1}{n!\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) H_k(x)\, dx.$$

Red u ovom obliku zovemo *Gram-Charlier-ov red.*

14. Povratna (rekurentna) formula. Diferencijalna jednačina.

Funkcija $\phi(x) = e^{-x^2/2}$ zadovoljava jednačinu

$$\phi'(x) + x\phi'(x) = 0.$$

Diferenciranjem ovoga nam daje $\phi''(x) + x\phi'(x) + \phi(x) = 0$; rezultat od n uzastopnih diferenciranja je

$$\phi^{(n+1)}(x) + x\phi^{(n)}(x) + n\phi^{(n-1)}(x) = 0.$$

Prema definiciji Hermiteovih polinoma imamo da $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2}\phi^{(n)}(x)$, pa ako izrazimo izvode od ϕ-jeva, u zadnje napisanoj formuli, pomoću Hermiteovih polinoma dobićemo

$$[(-1)^{n+1}H_{n+1}(x) + x(-1)^n H_n(x) + n(-1)^{n-1}H_{n-1}(x)]e^{-x^2/2} = 0,$$

ili

$$H_{n+1}(x) - xH_n(x) + nH_{n-1}(x) = 0.$$

Ovo je povratna (rekurentna) formula koja povezuje tri uzastopna Hermiteova polinoma.

U smislu normiranih Hermiteovih polinoma $h_n(x) = H_n(x)/\sqrt{n!\sqrt{2\pi}}$, sa vodećim koeficijentima $a_{nn} = \frac{1}{\sqrt{n!\sqrt{2\pi}}}$ prethodna formula će dobiti oblik

$$\frac{H_{n+1}(x)}{\sqrt{n!\sqrt{2\pi}}} - x\frac{H_n(x)}{\sqrt{n!\sqrt{2\pi}}} + n\frac{H_{n-1}(x)}{\sqrt{n!\sqrt{2\pi}}} = 0,$$

$$\sqrt{n+1}h_{n+1}(x) - xh_n(x) + \sqrt{n}h_{n-1}(x) = 0,$$

što se slaže sa formulom koja se pojavljuje u Teoremi 5.01.

Prema Teoremi 11.03 imamo $H_{n+1}(x) - xH_n(x) = -H_n'(x)$. Ako ovu formulu poredimo sa $H_{n+1}(x) - xH_n(x) + nH_{n-1}(x) = 0$ tj. sa $H_{n+1}(x) - xH_n(x) = -nH_{n-1}(x)$ imamo

$$H_n'(x) = nH_{n-1}(x).$$

Prema ovoj formuli slijedi da je

$$H_{n+1}'(x) = (n+1)H_n(x), \qquad H_n''(x) = nH_{n-1}'(x).$$

Diferenciranjem formule $H_{n+1}(x) - xH_n(x) + nH_{n-1}(x) = 0$ dobićemo

$$H_{n+1}'(x) - H_n(x) - xH_n'(x) + nH_{n-1}'(x) = 0$$

Poređenjem rezultat iz zadnjih napisanih formula dobijamo sljedeću diferencijalnu jednačinu

$$H_n''(x) - xH_n'(x) + nH_n(x) = 0.$$

Istu jednačinu smo mogli dobiti zamjenom vrijednosti $D = B = C = 0$, $E = -1$, $A = 1$, u formuli koja se pojavljuje u Teoremi 10.01, kojoj će odgovarati diferencijalna jednačina $\rho'(x)/\rho(x) = -x$ koju zadovoljava težinska funkcija $e^{-x^2/2}$. Napisana diferencijalna jednačina se ne mjenja ako $H_n(x)$ zamjenimo sa normiranim $h_n(x)$.

Podudarnost koeficijenata u $H_{n+1}(x) - xH_n(x) + nH_{n-1}(x) = 0$ i $H_n''(x) - xH_n'(x) + nH_n(x) = 0$, osim što je zanimljivo spomenuti, nije od velike važnosti, s obzirom da se prva formula, za razliku od druge, mijenja uvođenjem normiranog faktora, ili nekog drugog faktora koji zavisi od n. U prethodno napisanom tekstu smo izveli dokaz Teoreme 14.01 i Posljedice 14.02.

(14.01) Teorema

Neka su $H_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ Hermiteovi polinomi. Tada za ove polinome vrijedi sljedeća tročlana povratna (rekurentna) formula

$$H_{n+1}(x) - xH_n(x) + nH_{n-1}(x) = 0$$

i jedno od rješenja diferencijalne jednačine

$$y'' - xy + ny = 0$$

je Hermiteov polinom reda n. ◇

(14.02) Posljedica (rekurentan formula za normirane Hermiteove polinome)

Neka su $h_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ normirani Hermiteovi polinomi. Tada za ove polinome vrijedi sljedeća tročlana povratna (rekurentna) formula

$$\sqrt{n+1}h_{n+1}(x) - xh_n(x) + \sqrt{n}h_{n-1}(x) = 0.$$

◇

Uzastopni Hermiteovi polinomi se mogu izračunati direktno iz $H_{n+1}(x) - xH_n(x) + nH_{n-1}(x) = 0$, kada su H_0 i H_1 poznati. Mnogo pogodniji način je koristeći formule $H'_n(x) = nH_{n-1}(x)$, nadopunjeno sa izračunavanjem konstantnih članova pomoću indukcije baziranoj na $H_{n+1}(x) - xH_n(x) + nH_{n-1}(x) = 0$:

$$H_{n+1}(0) = -nH_{n-1}(0),$$

tako da

$$\begin{aligned}
&H_1(0) = 0,\\
&H_2(0) = (-1)H_0(0) = -1,\\
&H_3(0) = (-2)H_1(0) = 0,\\
&H_4(0) = (-3)H_2(0) = (-3)(-1),\\
&H_5(0) = (-4)H_3(0) = 0,\\
&...\\
&H_{2k}(0) = (-1)^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1),\\
&H_{2k+1}(0) = 0.
\end{aligned}$$

Prvih šest polinoma iz niza je

$$\begin{aligned}
&H_0(x) = 1,\\
&H_1(x) = x,\\
&H_2(x) = x^2 - 1,\\
&H_3(x) = x^3 - 3x,\\
&H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3,\\
&H_5(x) = x^5 - 10x^3 + 15x.
\end{aligned}$$

Time smo pokazali rješenje Vježbe 14.03.

(14.03) Vježba

Uz pomoć formula dobijenih u Teoremi 14.01 izvesti prvih šest Hermiteovih polinoma. ◇

15. Funkcija generiranja (generatrisa)

Prisjetimo se: Neka je f realno-vrijednosna funkcija definisana na intervalu I u $\mathbb{R}$. Ako f ima izvod svakog reda u svakoj tački u I, tada pišemo da je $f \in C^\infty$ na I.

Ako je $f \in C^\infty$ u nekoj okolini tačke c, stepeni red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n,$$

zovemo _Taylor-ov red oko c generisan sa f_. Da bi označili da f generiše ovaj red, pišemo

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Pitanje koje je vrlo zanimljivo za posmatranje je: Kad možemo zamjeniti simbol $\sim$ sa simbolom $=$? Dalje, od ranije znamo: Taylorova formula tvrdi da ako je $f \in C^\infty$ na zatvorenom intervalu $[a,b]$ i ako je $c \in [a,b]$, tada, za svaki x iz $[a,b]$ i za svaki n, imamo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n,$$

gdje je x_1 neka tačka između x i c. Tačka x_1 zavisi od x, c, i od n. Prema tome, potrebn i dovoljan uslov da Taylor-ov red konvergira prema funkciji $f(x)$ je da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = 0.$$

U stvarnosti može biti pravo teško raditi sa ovim limesom zato što je nepoznata pozicija od x_1. Bez obzira na to, u nekim slučajevima se može odrediti odgovarajuća gorna granica za $f^{(n)}(x_1)$ i bez problema pokazati da je prikazani limes jednak nuli. Kako $A^n/n! \to 0$ kad $n \to \infty$ za svako A, jednakost $\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = 0$ će sigurno vrijediti ako postoji pozitivna konstanta M takva da

$$|f^{(n)}(x)| \leq M^n,$$

za sve x iz $[a,b]$. Drugim riječima, Taylor-ov red funkcije f konvergira ako n-ti izvod $f^{(n)}$ ne raste brže od n-tog stepena nekog pozitivnog broja. Ovo tvrdimo mnogo formalnije u sljedećoj teoremi.

(15.01) Teorema

Pretpostavimo da je $f \in C^\infty$ na $[a,b]$ i neka je $c \in [a,b]$. Pretpostavimo da postoji okolina tačke c, $B(c)$, i konstanta M (koja može zavisiti od c) takva da $|f^{(n)}(x)| \leq M^n$ za svaki x iz $B(c) \cap [a,b]$ i za svaki $n = 1, 2, ...$ Tada, za svaki x iz $B(c) \cap [a,b]$ imamo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

◇

Sada posmatrajmo funkciju

$$H(x,t) = e^{xt-(t^2/2)}.$$

Ako fiksiramo x i posmatramo $H(x,t)$ kao funkciju realne promjenjive t primjetimo da je

$$H'(x,t) = (x-t)e^{xt-(t^2/2)},$$

$$H''(x,t) = ((x-t)^2 - 1)e^{xt-(t^2/2)},$$
$$H'''(x,t) = ((x-t)^3 - 3(x-t))e^{xt-(t^2/2)},$$
$$H^{(4)}(x,t) = ((x-t)^4 - 6(x-t)^2 + 3)e^{xt-(t^2/2)},$$
$$...$$

tj. primjetimo da funkcija $H(x,t)$, po promjenjivoj t, u okolini tačke 0 zadovoljava sve uslove iz Teoreme 15.01, pa je možemo razviti u Taylorov red

$$H(x,t) = G_0(x) + G_1(x)t + \frac{1}{2!}G_2(x)t^2 + \frac{1}{3!}G_3(x)t^3 + ...$$

koji konvergira za sve realne t, gdje su koeficijenti neke funkcije od x. Odmah se može primjetiti da je $G_0(x) = 1$, $G_1(x) = x$, $G_2(x) = x^2 - 1$, $G_3(x) = x^3 - 3x$. Isto tako, vidimo da $H(x,t)$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu $\partial H/\partial t = (x-t)H$. Ako ovu jednakost napišemo u obliku stepenog reda dobićemo

$$G_1(x) + 2\frac{1}{2!}G_2(x)t + 3\frac{1}{3!}G_3(x)t^2 + ... = (x-t)(G_0(x) + G_1(x)t + \frac{1}{2!}G_2(x)t^2 + \frac{1}{3!}G_3(x)t^3 + ...)$$

pa poređenjem koeficijenata uz t^n dobijamo

$$G_1(x) = xG_0(x),$$
$$2\frac{1}{2!}G_2(x) = xG_1(x) - G_0(x),$$
$$3\frac{1}{3!}G_3(x) = x\frac{1}{2!}G_2(x) - G_1(x)$$
$$...$$

iz čega izvodimo opštu formulu

$$\frac{1}{n!}G_{n+1}(x) = \frac{x}{n!}G_n(x) - \frac{1}{(n-1)!}G_{n-1}(x),$$

ili drugačije napisano

$$G_{n+1}(x) - xG_n(x) + nG_{n-1}(x) = 0.$$

Ovo je isto kao povratna (rekurentna) formula za Hermiteove polinome. Kako je $G_0 = H_0$ i $G_1 = H_1$ slijedi da je $G_2 = H_2$, $G_3 = H_3$,..., pa indukcijom nije teško pokazati da je $G_n = H_n$ za sve vrijednosti od n. Hermiteovi polinom su povezani sa funkcijom generiranja $H(x,t)$ pomoću jednakošću

$$e^{xt-(t^2/2)} = H_0(x) + H_1(x)t + \frac{1}{2!}H_2(x)t^2 + \frac{1}{3!}H_3(x)t^3 + ...$$

(funkcija $H(x,t)$ se često naziva generatrisa ili izvodnica Hermiteovih polinoma). Time smo dokazali Teoremu 15.02.

(15.02) Teorema

Neka su $H_n(x)$ Hermiteovi polinomi. Tada vrijedi sljedeća jednakost

$$e^{xt-(t^2/2)} = H_0(x) + H_1(x)t + \frac{1}{2!}H_2(x)t^2 + \frac{1}{3!}H_3(x)t^3 + ...$$

(funkcija $H(x,t) = e^{xt-(t^2/2)}$ se često naziva <u>generatrisa</u> ili <u>izvodnica</u> Hermiteovih polinoma) ⋄

16. Talasna jednačina linearnog oscilatora

Pojava Hermiteovih polinoma u matematičkoj fizici je povezano sa rudimentarnim oblikom *Schrödinger-ove talasne jednačine* iz kvantne mehanike. Dok je odgovarajuća diskusija o matematičkom ili fizikalnom značaju ovih formula ovdje nepraktična, same formule su relativno jednostavne.

Schrödinger-ova jednačina za jednu česticu u polju sile je oblika

$$\Delta\Psi - \omega\Psi = \gamma\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

u kojoj je Ψ funkcija geometriskih koordinata i vremena t, $\Delta\Psi$ je izraz koji formira lijevi član Laplace-ove jednačine po broju dimenzije koja je u pitanju (suma drugih parcijalnih izvoda od Ψ po varijablama pravougaonog koordinatnog sistema), ω je funkcija čije su promjenjive koordinate ali je nezavisna od t, i γ je konstanta.

Ako rješenje napišemo u obliku $\Psi = uT(t)$, gdje je u nezavisna od t, a funkcija T nezavisna od koordinata, prema proceduri za razdvojene varijable imamo $\Delta\Psi = T\Delta u$, pa $\Delta\Psi - \omega\Psi = \gamma\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ postaje

$$T\Delta u - \omega uT = \gamma T',$$

$$\frac{\Delta u}{u} - \omega = \frac{\gamma T'}{T}.$$

Konstantna vrijednost koja odgovara obema stranama prethodne jednakosti ćemo označiti sa $-\lambda$ (tj. $\frac{\Delta u}{u} - \omega = \frac{\gamma T'}{T} = -\lambda$). Jednačina $\gamma T' = -\lambda T$ za rješenje ima konstantu pomnoženu sa $e^{-(\lambda/\gamma)t}$, a u zadovoljava jednakost

$$\Delta u + (\lambda - \omega)u = 0.$$

Fizikalni značaj ovih jednakosti je ograničen na određene vrijednosti ili na skup vrijednosti za λ-e, za koje rješenje u odgovarajućem obliku postoji.

U jednoj dimenziji (kada imamo samo promjenjivu x), ako stavimo $\omega = cx^2$, gdje je c konstanta, dobićemo jednačine *linearnog oscilatora*. U ovom slučaju Δu se reducira na du^2/dx^2. Prema tome $\Delta u + (\lambda - \omega)u = 0$ postaje

$$\frac{d^2u}{dx^2} + (\lambda - cx^2)u = 0.$$

Neka je $v_n = e^{-x^2/4}H_n(x)$. Tada su funkcije v_k za $k = 0, 1, 2, ...$ ortogonalne nad intervalom $(-\infty, \infty)$ u odnosu na jediničnu težinsku funkciju. Diferenciranjem relacije $H_n(x) = e^{x^2/4}v_n$ i zamjenom u $H_n''(x) - xH_n'(x) + nH_n(x) = 0$ (vidi Teoremu 14.01) ćemo dobiti da je

$$(\frac{1}{2}xe^{x^2/4}v_n + e^{x^2/4}v_n')' - x(\frac{1}{2}xe^{x^2/4}v_n + e^{x^2/4}v_n') + ne^{x^2/4}v_n = 0,$$

$$(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2)e^{x^2/4}v_n + \underline{\frac{1}{2}xe^{x^2/4}v_n'} + \underline{\frac{1}{2}xe^{x^2/4}v_n'} + e^{x^2/4}v_n'' - \frac{1}{2}x^2e^{x^2/4}v_n - \underline{xe^{x^2/4}v_n'} + ne^{x^2/4}v_n = 0,$$

$$v_n'' + (n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2)v_n = 0.$$

Sad ovu jednakost napišimo sa τ-om kao nezavisnom varijablom umjesto x-a:

$$v_n''(\tau) + (n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2)v_n(\tau) = 0.$$

Ako uvedemo smjene $\tau = ax$ (gdje je a konstanta) i

$$u_n(x) = v_n(\tau) = v_n(ax) = e^{-a^2x^2/4}H_n(ax),$$

tada je $d^2u_n/dx^2 = a^2 v_n''(\tau)$, pa rezultat datih smjena u $v_n''(\tau) + (n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2)v_n(\tau) = 0$ je

$$\frac{d^2u_n}{dx^2} + [(n + \frac{1}{2})a^2 - \frac{1}{4}a^4x^2]u_n = 0.$$

Prema tome ako za a uzmemo da je $(4c)^{1/4}$, tada $u_n(x)$ koje je definisano sa $u_n(x) = v_n(\tau) = v_n(ax) = e^{-a^2x^2/4}H_n(ax)$ zadovoljava

$$\frac{d^2u}{dx^2} + (\lambda - cx^2)u = 0.$$

za vrijednost $\lambda = (n + \frac{1}{2})a^2$.

(ova stranica je ostavljena prazna)

III Jacobijevi polinomi

17. Definicija pomoću izvoda

Domen ortogonalnosti Jacobijevih polinoma je konačan interval, za koji, bez esencijalnog gubitka opštosti, možemo uzeti $(-1,1)$, s obzirom da se proizvoljan konačan interval može reducirati na ovaj linearnom promjenom varijabli. Težinska funkcija je

$$\rho(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta},$$

u kojima su eksponenti proizvoljni realni brojevi koji zadovoljavaju uslov da $\alpha > -1$, $\beta > -1$. Ovo ograničenje se uzima da bi $\rho(x)$ bila integrabilna od -1 do 1. Ortogonalne polinomi će biti definisani direktno preko izvoda, što će u stvari predstavljati poopštenu Rodriguesovu formulu za Legendreove polinome (prisjetimo se Rodriguesova formula za Legendreove polinome je oblika

$$P_k(x) = \frac{1}{k!2^k}\frac{d^k}{dx^k}\left((x^2-1)^k\right), \quad k = 0, 1, 2, ...).$$

Osobina ortogonalnosti će biti izvedena iz ove formule, i veza sa opštom teorijom iz I dijela će biti jasnija kako se diskusija nastavlja.

Za date α, β, n neka je

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= g(x)h(x), \\ g(x) &= (1-x)^{\alpha+n}, \\ h(x) &= (1+x)^{\beta+n}, \end{aligned}$$

gdje se donji indeks n može izostaviti iz pomoćnih funkcija g, h. Ako α i β nisu cijeli, prikazani stepeni se tad interpretiraju kao mnogostruko-vrijednosne funkcije za koje se podrazumjeva da su određene na taj način da od funkcija $g(x)$ i $h(x)$ čine realne i pozitivne za $-1 < x < 1$. Prisjetimo se Leibniz-ove formule za n-ti izvod proizvoda funkcija $f(x)$ i $g(x)$:

$$(f(x)\cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x) \qquad \text{gdje je} \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}.$$

Sad prema Leibniz-ovoj formuli za n-ti izvod funkcije $\phi_n(x)$ imamo

$$\phi_n^{(n)}(x) = g^{(n)}(x)h(x) + ng^{(n-1)}(x)h'(x) + \frac{n(n-1)}{2!}g^{(n-2)}(x)h''(x) + ... + g(x)h^{(n)}(x).$$

Posmatrajmo izvode funkcije $g(x) = (1-x)^{\alpha+n}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= (\alpha+n)(1-x)^{\alpha+n-1}(-1) \\ g''(x) &= (\alpha+n)(\alpha+n-1)(1-x)^{\alpha+n-1}(-1)^2 \\ &... \\ g^{(n)}(x) &= (\alpha+n)(\alpha+n-1)...(\alpha+1)(1-x)^{\alpha}(-1)^n \end{aligned}$$

Primjetimo da za $0 \le j \le n$, $g^{(j)}(x)$ je konstanta pomnožena sa $(1-x)^{\alpha+n-j} = (1-x)^{\alpha}(1-x)^{n-j}$, a funkcija $h^{(n-j)}(x)$ je konstanta pomnožena sa $(1-x)^{\beta}(1+x)^{j}$. Prema tome funkcija $\phi_n^{(n)}$ ima $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ kao faktor, što znači da će $\phi_n^{(n)}$ biti proizvod ovog faktora $((1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta})$ sa polinomom najviše n-tog stepena. Neka y_n označava sljedeći polinom:

$$y_n(x) = (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}].$$

Činjenica da je $y_n(x)$ zapravo polinom n-tog i ne manjeg stepena je odmah očigledno na osnovu prethodnog paragrafa.

U standardnim oznakama, Jacobijev polinom $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ je $y_n(x)$ pomnožen sa $(-1)^n/(2^n n!)$:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}].$$

Ovo je direktno poopštenje Rodrigues-ove formule za Legendreove polinome, na koju se svodi za $\alpha = \beta = 0$. Prethodno napisani tekst možemo formalno zbiti u dokaz Leme 17.01 i Definiciju 17.02.

(17.01) Lema

Neka je $y_n(x)$ funkcija definisana na sljedeći način

$$y_n(x) = (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}]$$

za svako $x \in (-1,1)$, gdje su α i β neke konstante. Tada je $y_n(x)$ polinom tačno n-tog stepena. ◇

(17.02) Definicija

Polinome $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ definisane sa

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}]$$

za svako $x \in (-1,1)$, gdje su α i β neke konstante nazivamo Jacobi-jevi polinomi. ◇

18. Ortogonalnost

Neka je $\phi_n(x) = (1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}$ i pokažimo da $\phi_n^{(k)}(x) = 0$ za $x = \pm 1$. Ako $\phi_n^{(k)}(x)$ razvijemo prema Leibniz-ovoj formuli za $k < n$ (vidi dio 17.), nijedan od eksponenata $\alpha + n$, $\beta + n$ se neće umanjiti za više od k jedinica ni u jednom od članova razvoja, i čitav izraz će imati $(1-x)^{\alpha+n-k}(1+x)^{\beta+n-k}$ kao svoj faktor, i s obzirom da je

$$\alpha + n - k \geq \alpha + 1 > 0, \quad \beta + n - k \geq \beta + 1 > 0,$$

$\phi_n^{(k)}(x)$ nestaje za $x = \pm 1$.

Neka su m, n dva nenegativna cijela, gdje je m manje od n (ako su nejednaki), i neka je

$$I = \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} y_m(x) y_n(x)\, dx$$

gdje je $y_n(x) = (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}]$. Odmah slijedi da

$$I = \int_{-1}^{1} y_m(x)\phi_n^{(n)}(x)\, dx.$$

Posmatrajmo parcijalnu integraciju zadnjeg integrala za koju ćemo staviti da je

$$u = y_m(x), \quad dv = \phi_n^{(n)}(x)\, dx,$$

$$du = y_m'(x)\, dx, \quad v = \phi_n^{(n-1)}(x)\, dx.$$

S obzirom da v, prema prethodnom paragrafu, nestaje na krajevima intervala, imamo

$$I = -\int_{-1}^{1} y_m'(x)\phi_n^{(n-1)}(x)\,dx.$$

Ako ovaj proces ponovimo ukupno m puta, dobićemo

$$I = (-1)^m \int_{-1}^{1} y_m^{(m)}(x)\phi_n^{(n-m)}(x)\,dx.$$

Ako je $m < n$, još jedna parcijalna integracija daje

$$I = (-1)^{m+1} \int_{-1}^{1} y_m^{(m+1)}(x)\phi_n^{(n-m-1)}(x)\,dx = 0,$$

zato što je y_m polinom najviše m-tog stepena (iz čega slijedi da je $y_m^{(m+1)}(x) \equiv 0$). Ako se sad pozovemo na orginalan izraz za I slijedi da su
$y_m(x)$ *i* $y_n(x)$ *ortogonalni u odnosu na težinsku funkciju* $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. Time smo dokazali Teoremu 18.01.

(18.01) Teorema

Jacobi-jevi polinomi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ *su međusobno ortogonalni u odnosu na težinsku funkciju* $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. ◇

Za $m = n$, integral $I = (-1)^m \int_{-1}^{1} y_m^{(m)}(x)\phi_n^{(n-m)}(x)\,dx$ postaje

$$I = (-1)^n \int_{-1}^{1} y_n^{(n)}(x)\phi_n(x)\,dx.$$

Neka je α_n koeficijent uz x^n u polinomu $y_n(x)$ kada se članovi grupišu prema stepenu od x ($y_n(x)$ je prema Lemi 17.01 polinom tačno n-tog stepena). Tada je $y_n^{(n)}(x) = n!\alpha_n$, pa imamo

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha(1+x)^\beta[y_n(x)]^2\,dx = I = (-1)^n n!\alpha_n \int_{-1}^{1} \phi_n(x)\,dx.$$

(18.02) Propozicija

Neka je dat integral

$$I = \int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha(1+x)^\beta[y_n(x)]^2\,dx$$

gdje je $y_n(x)$ *polinom* n*-tog stepena*

$$y_n(x) = (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}].$$

Tada vrijedi sljedeća jednakost

$$I = (-1)^n n!\alpha_n \int_{-1}^{1} \phi_n(x)\,dx$$

gdje je α_n *koeficijent uz* x^n *u polinomu* $y_n(x)$. ◇

S obzirom da je prvi integral Propozicije 18.02 bezuvjetno pozitivan, slijedi da je $\alpha_n \neq 0$. Vrijednost od α_n će biti određena u sljedećem dijelu (dio 19.), a integral I u obliku u kojem se pojavljuje u Propoziciji 18.02 ćemo ponovo razmatrati i izračunati u dijelu 20 (strana 49).

19. Vodeći koeficijenti

Neka su $\alpha > -1$, $\beta > -1$. Prvo pokažimo da vrijedi sljedeća jednakost

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} = \binom{2n+\alpha+\beta}{n}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Koristeći formulu

$$(1+z)^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} z^j$$

gdje je

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-k+1)}{k!}$$

za proizvoljan realan α i cijeli k (ako je α negativan uslov da bi formula bila tačna je da $|z| < 1$), dobijamo

$$(1+z)^{n+\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+\alpha}{j} z^j,$$

$$(1+z)^{n+\beta} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+\beta}{j} z^j,$$

$$(1+z)^{2n+\alpha+\beta} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{2n+\alpha+\beta}{j} z^j = (1+z)^{n+\alpha}(1+z)^{n+\beta},$$

$$(1+z)^{n+\alpha}(1+z)^{n+\beta} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+\alpha}{j} z^j\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+\beta}{k} z^k\right) =$$

$$= \left(\binom{n+\alpha}{0} + \binom{n+\alpha}{0} z + \binom{n+\alpha}{0} z^2 + ...\right) \left(\binom{n+\beta}{0} + \binom{n+\beta}{0} z + \binom{n+\beta}{0} z^2 + ...\right) =$$

$$= \binom{n+\alpha}{0}\binom{n+\beta}{0} + \left(\binom{n+\alpha}{1}\binom{n+\beta}{0} + \binom{n+\alpha}{0}\binom{n+\beta}{1}\right) z +$$

$$+ \left(\binom{n+\alpha}{2}\binom{n+\beta}{0} + \binom{n+\alpha}{1}\binom{n+\beta}{1} + \binom{n+\alpha}{0}\binom{n+\beta}{2}\right) z^2 + ... =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+\alpha}{j-k} \binom{n+\beta}{k} z^j.$$

Kada izjednačimo koeficijente koji se nalaze uz z^j dobijamo traženu tvrdnju. Time smo dokazali Lemu 19.01.

(19.01) Lema

Neka su $\alpha > -1$, $\beta > -1$. Tada

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} = \binom{2n+\alpha+\beta}{n}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

◇

Posmatrajmo sad izraz $\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right]$:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(1-x)^{\alpha+n}\right]\left[\frac{d^k}{dx^k}(1+x)^{\beta+n}\right] =$$

$$= (1-x)^\alpha(1+x)^\beta \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^{n-k}(\alpha+n)...(\alpha+k+1)(1-x)^k\cdot(\beta+n)...(\beta+n-k+1)(1+x)^{n-k} =$$

$$= (1-x)^\alpha(1+x)^\beta n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(\alpha+n)...(\alpha+k+1)}{(n-k)!}(-1)^{n-k}(-1)^k(x-1)^k\cdot\frac{(\beta+n)...(\beta+n-k+1)}{k!}(1+x)^{n-k} =$$

$$= (-1)^n(1-x)^\alpha(1+x)^\beta n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k}\binom{n+\beta}{k}(x-1)^k(x+1)^{n-k}.$$

Time smo izveli sljedeću jednakost

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right] =$$
$$= (-1)^n(1-x)^\alpha(1+x)^\beta n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k}\binom{n+\beta}{k}(x-1)^k(x+1)^{n-k}.$$

Prema definiciji Jacobijevi polinomi su oblika

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}].$$

Ako sad iskoristimo maloprije dobijenu jednakost imamo

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k}\binom{n+\beta}{k}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k\left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-k}.$$

Sad, na osnovu Leme 19.01, vodeći koeficijent Jacobijevog polinoma $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ je

$$k_n^{(\alpha,\beta)} = 2^{-n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k}\binom{n+\beta}{k} = 2^{-n}\binom{\alpha+\beta+2n}{n}$$

Time smo dokazali Teoremu 19.02

(19.02) Teorema

Vodeći koeficijent $k_n^{(\alpha,\beta)}$ Jacobijevog polinoma $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ se možu izračunati pomoću formule

$$k_n^{(\alpha,\beta)} = 2^{-n}\binom{\alpha+\beta+2n}{n} = 2^{-n}\frac{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-1)...(\alpha+\beta+n+1)}{n!}$$

$\diamond$

Primjetimo da smo u tekstu iznad izveli sljedeću formulu

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right] =$$
$$= (-1)^n(1-x)^\alpha(1+x)^\beta n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k}\binom{n+\beta}{k}(x-1)^k(x+1)^{n-k}.$$

Pokušajmo iskoristiti ovu formulu i odrediti koeficijente polinoma

$$y_n(x) = (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}]$$

koji stoje uz x^n i x^{n-1}. Prema napisanoj formuli imamo

$$y_n(x) = (-1)^n n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k}\binom{n+\beta}{k}(x-1)^k(x+1)^{n-k} =$$

$$= (-1)^n n! \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^{k-i} (-1)^i \right) \left(\sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} x^j \right) \right] =$$

$$= (-1)^n n! \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^{k-i} (-1)^i \right) \left(\sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} x^{n-k-j} \right) \right] =$$

$$= (-1)^n n! \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} \left(x^k - k x^{k-1} + \binom{k}{2} x^{k-2} - ... \right) \right.$$

$$\left. \left(x^{n-k} + (n-k) x^{n-k-1} + \binom{n-k}{2} x^{n-k-2} \right) + ... \right] =$$

$$= (-1)^n n! \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} \left(x^n + (n-2k) x^{n-1} + \right. \right.$$

$$\left. \left. \left(\binom{k}{0}\binom{n-k}{2} - \binom{k}{1}\binom{n-k}{1} + \binom{k}{2}\binom{n-k}{0} \right) x^{n-2} + ... \right) \right].$$

Odavdje vidimo da koeficijenti koji stoje uz x^n su oblika

$$(-1)^n n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k}$$

dok su koeficijenti koji stoje uz x^{n-1} oblika

$$(-1)^n n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} (n-2k).$$

Kao zanimljivu vježbu ostavljamo Zadatak 19.03 (drugi dio zadatka i nije baš lagan).

(19.03) Zadatak

Pokazati da je

$$(-1)^n n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} = (-1)^n (\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-1)...(\alpha+\beta+n+1),$$

$$(-1)^n n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} (n-2k) = (-1)^n (\alpha-\beta) n (\alpha+\beta+2n-1)...(\alpha+\beta+n+1).$$

◇

Detaljnu uputu za rješenje zadatka možete naći u [2] na strani 170. Prema tome ako je $y_n(x) = \alpha_n x^n + \beta_n x^{n-1} + ...$ imamo

$$\alpha_n = (-1)^n (\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-1)...(\alpha+\beta+n+1),$$

$$\beta_n = (-1)^n (\alpha-\beta) n (\alpha+\beta+2n-1)...(\alpha+\beta+n+1).$$

U mnogo jezgrovitijem obliku, ako koeficijente uz x^n i x^{n-1} u polinomu $y_n(x)$ izrazimo preko Gama funkcije, dobićemo

$$\alpha_n = (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)},$$

$$\beta_n = (-1)^n (\alpha-\beta) n \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}$$

Primjetićemo da je $\beta_n = 0$ ako je $\alpha = \beta$, što se slaže sa Posljedicom 7.02. U prethodnom tekstu smo izveli dokaz Propozicije 19.04.

(19.04) Propozicija

Neka je dat polinom n-tog stepena

$$y_n(x) = (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}].$$

Tada koeficijenti α_n i β_n koji stoje uz x^n i x^{n-1} se mogu izračunati po formuli

$$\begin{aligned}\alpha_n &= (-1)^n(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-1)...(\alpha+\beta+n+1) = \\ &= (-1)^n\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}, \\ \beta_n &= (-1)^n(\alpha-\beta)n(\alpha+\beta+2n-1)...(\alpha+\beta+n+1) = \\ &= (-1)^n(\alpha-\beta)n\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}..\end{aligned}$$

$\diamond$

20. Faktor normalizacije. Red Jacobi-jevih polinoma.

U integralu

$$J = \int_{-1}^{1}\phi_n(x)dx = \int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}dx$$

uvedimo smjene

$$x = 2t-1, \qquad 1+x = 2t, \qquad 1-x = 2(1-t), \qquad dx = 2dt.$$

Tada

$$J = 2^{\alpha+\beta+2n+1}\int_0^1 t^{\beta+n}(1-t)^{\alpha+n},$$

pa ako se prisjetimo definicije i osobina Gama i Beta funkcija (vidi stranu 33)

$$\begin{aligned}J &= 2^{\alpha+\beta+2n+1}B(\beta+n+1,\alpha+n+1) \\ &= 2^{\alpha+\beta+2n+1}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}.\end{aligned}$$

Ova vrijednost od J i određenost α_n iz Propozicije 9.14 se može sad iskoristiti da bi izračunali integral

$$I = \int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}[y_n(x)]^2\,dx = (-1)^n n!\alpha_n\int_{-1}^{1}\phi_n(x)\,dx$$

iz Propozicije 18.02. Ako sa δ_n označimo sljedeći integral

$$\delta_n = \int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2\,dx = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}I,$$

kombinacija različitih prethodnih faktora daje

$$\delta_n = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{\alpha+\beta+2n+1}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}.$$

Ako je $n = \alpha + \beta + 1 = 0$ imamo da je $\delta_0 = \Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)$.

Ovaj račun nam omogućava da definišemo normirane Jacobijeve polinome $p_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, koji su dati sa

$$p_n^{(\alpha,\beta)}(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)/\delta_n^{1/2}.$$

Sad nije teško dokazati Teoremu 20.01.

(20.01) Teorema

Normirani Jacobijevi polinomi $p_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ *su*

$$p_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{\delta_n^{1/2}},$$

gdje je $P_n^{(\alpha,\beta)}$ *Jacobijev polinom, a* δ_n *se može izračunati na sljedeći način*

$$\delta_n = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{\alpha + \beta + 2n + 1} \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)\Gamma(\beta + n + 1)}{n!\,\Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}.$$

◇

Razvoj funkcije $f(x)$ u red po normiranim polinomima je u stvari specijalni slučaj dijela 4, Glave I (vidi Teoremu 4.01, strana 18), gdje je u ovom slučaju $a = -1$, $b = 1$, i

$$\rho(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta.$$

U smislu polinoma $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ formule iz Teoreme 4.01 sad postaju

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k^{(\alpha,\beta)}(x),$$

$$c_k = \frac{1}{\delta_n} \int_{-1}^{1} \rho(x) f(x) P_k^{(\alpha,\beta)}(x)\, dx.$$

21. Povratna (rekurentna) formula

Polinome $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ i $p_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ označimo jednostavnije sa $P_n(x)$ i $p_n(x)$. Kao u Dijelu 5., Glava I, neka su a_{nn} i $a_{n,n-1}$ koeficijenti polinoma $p_n(x)$ koji stoje uz x^n i x^{n-1}. Poređenjem sa koeficijentima α_n i β_n iz Dijela 19., trenutna glava, odgovarajući koeficijenti u $P_n(x)$ su, redom, $(-1)^n \alpha_n/(2^n n!)$ i $(-1)^n \beta_n/(2^n n!)$; i

$$a_{nn} = \frac{(-1)^n \alpha_n}{2^n n! \delta_n^{1/2}}, \qquad a_{n,n-1} = \frac{(-1)^n \beta_n}{2^n n! \delta_n^{1/2}}.$$

Prema Propoziciji 19.04

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = -\frac{(-1)^n(\alpha + \beta + 2n)(\alpha + \beta + 2n - 1)...(\alpha + \beta + n + 1)}{(-1)^{n+1}(\alpha + \beta + 2n + 2)(\alpha + \beta + 2n + 1)...(\alpha + \beta + n + 2)} =$$

$$= -\frac{\alpha + \beta + n + 1}{(\alpha + \beta + 2n + 1)(\alpha + \beta + 2n + 2)},$$

$$\frac{a_{nn}}{a_{n+1,n+1}} = \frac{\frac{(-1)^n \alpha_n}{2^n n! \delta_n^{1/2}}}{\frac{(-1)^{n+1} \alpha_{n+1}}{2^{n+1}(n+1)! \delta_{n+1}^{1/2}}} = -2(n + 1) \left(\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n}\right)^{1/2} \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} =$$

$$= \frac{2(n+1)(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)} \left(\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n}\right)^{1/2},$$

$$\frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} = \frac{\frac{(-1)^n \beta_n}{2^n n! \delta_n^{1/2}}}{\frac{(-1)^n \alpha_n}{2^n n! \delta_n^{1/2}}} = \frac{\beta_n}{\alpha_n} = \frac{(-1)^n(\alpha-\beta)n(\alpha+\beta+2n-1)...(\alpha+\beta+n+1)}{(-1)^n(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-1)...(\alpha+\beta+n+1)} =$$

$$= \frac{(\alpha-\beta)n}{\alpha+\beta+2n},$$

$$\frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} - \frac{a_{n+1,n}}{a_{n+1,n+1}} = \frac{(\alpha-\beta)n}{\alpha+\beta+2n} - \frac{(\alpha-\beta)(n+1)}{\alpha+\beta+2n+2}$$

$$= \frac{\beta^2-\alpha^2}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+2)}.$$

Ove vrijednosti sad možemo uvrstiti u povratnu formulu iz Teoreme 5.01

$$xp_k(x) = \frac{a_{k-1,k-1}}{a_{kk}} p_{k-1}(x) + c_{kk} p_k(x) + \frac{a_{kk}}{a_{k+1,k+1}} p_{k+1}(x), \qquad \text{za } k = 0, 1, 2, ..., n, ...$$

gdje smo koeficijent c_{nn} odredili u Teoremi 5.02

$$c_{nn} = \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} - \frac{a_{n+1,n}}{a_{n+1,n+1}}.$$

Ako zamjenimo $p_k(x)$ sa $P_k(x)/\delta_k^{1/2}$ za $k = n+1, n, n-1$, formula postaje

$$x\frac{P_n(x)}{\delta_n^{1/2}} = \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{nn}} \frac{P_{n-1}(x)}{\delta_{n-1}^{1/2}} + \left(\frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} - \frac{a_{n+1,n}}{a_{n+1,n+1}}\right) \frac{P_n(x)}{\delta_n^{1/2}} + \frac{a_{nn}}{a_{n+1,n+1}} \frac{P_{n+1}(x)}{\delta_{n+1}^{1/2}}.$$

Nakon vraćanja smjene za δ_n iz Teoreme 20.01 i pojednostavljenja dobijenog izraza dobićemo

$$\begin{aligned}
&(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)xP_n(x) = \\
&\quad = 2(n+1)(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n)P_{n+1}(x) \\
&\quad\quad +(\beta^2-\alpha^2)(\alpha+\beta+2n+1)P_n(x) \\
&\quad\quad +2(\alpha+n)(\beta+n)(\alpha+\beta+2n+2)P_{n-1}(x).
\end{aligned}$$

Za $\alpha = \beta = 0$ ovo se svodi na poznatu rekurentnu formulu Legendre-ovih polinoma. U prethodnom tekstu smo dokazali Teoremu 21.01.

(21.01) Teorema (rekurentan formula za Jacobijeve polinome)
Neka je $P_n(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}$ Jacobijev polinom

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}].$$

Za ove polinome vrijdi sljedeća tročlana povratna formula

$$\begin{aligned}
&(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)xP_n(x) = \\
&\quad = 2(n+1)(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n)P_{n+1}(x) + (\beta^2-\alpha^2)(\alpha+\beta+2n+1)P_n(x) \\
&\quad\quad +2(\alpha+n)(\beta+n)(\alpha+\beta+2n+2)P_{n-1}(x).
\end{aligned}$$

◇

22. Diferencijalna jednačina

Težinska funkcija $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ zadovoljava sljedeću jednakost

$$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = -\frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x} = \frac{(\beta-\alpha)-(\alpha+\beta)x}{1-x^2},$$

koja će imati oblik

$$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = \frac{D+Ex}{A+Bx+Cx^2}$$

iz Teoreme 10.01, Glava I, akko

$$A=1, \quad B=0, \quad C=-1, \quad D=\beta-\alpha, \quad E=-(\alpha+\beta).$$

Isto tako, primjetimo da $(1-x^2)\rho(x)$ nestaje na krajevima intervala zbog pretpostavke da je $\alpha > -1$, $\beta > -1$. Time su svi uslovi iz Teoereme 10.01 (diferencijalna jednačina za ortogonalne polinome, Glava I) zadovoljeni a kako je jednakost

$$(A+Bx+Cx^2)p_n''(x) + [(B+D)+(2C+E)x]p_n'(x) - [Cn(n+1)+En]p_n(x) = 0$$

iz spomenute teoreme homogena, to ona ne zavisi od konstantnog faktora u svakom polinomu, i u stvari ima isti oblik bez obzira da li je pisan za $y_n(x)$ ili $p_n(x)$ ili $P_n(x)$. U smislu $P_n(x)$ diferencijalna jednačina sad izgleda

$$(1-x^2)P_n''(x) + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]P_n'(x) + n(\alpha+\beta+n+1)P_n(x) = 0.$$

Za $\alpha = \beta = 0$ ovo se svodi na diferencijalnu jednačinu Legendreovih polinoma.

Za definiciju Jacobi-jevog polinoma u smislu koeficijenata u stepenom redu koji će predstavljati generatrisu, ostavljamo čitaocu za istraživanje. Iz orginalnog memoara na temu Jacobijevi polinomi, nakon što je sam autor izveo generatrisu, ostavio je napomenu[2]: "Ova formula, za koja ne bih preporučio dalje pojednostavljenja, na bi se trebala slijediti u budućnosti."

[2]C. G. J. Jacobi, Untersuchungen uber die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe (štampao nakon Jacobijeve smrti E. Heine), Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. 56 (1859), str 149-165.

Literatura

[1] S. Kalabušić, M. Malenica: *"Specijalne funkcije (Teorija i zadaci)"*, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Sarajevu, 2010., strana 309-349

[2] D. Jackson: *"Fourier series and orthogonal polynomials"*, Third Impression, The Mathematical Association of America, 1948., strana 149-184

[3] P. Junghanns: *"Lecture Notes from Orthogonal Polynomials"*, Summer Term 2012, skinuto sa web stranice www-user.tu-chemnitz.de/∼peju/skripte/orthopol/OrthPoly_Engl.pdf, strana 15-27

[4] L. Debnath, P. Mikusinski: *"Hilbert Spaces with Applications"*, Elsevier Academic Press, 2005., strana 98-143

[5] T. M. Apostol: *"Mathematical Analysis"*, second edition, China Machine Press, 2004., strana 104-121