UVOD U LINEARNU ALGEBRU I ANALITIČKU GEOMETRIJU

pismeni dio ispita

GRUPA A

Zenica, 04.02.2005.

1. Dat je trougao ABC kod koga je AB = 2, AC = 3 i $\angle BAC = 45^0$. Ako je T težište trougla ABC, izračunati dužinu preostale stranice trougla i površine trouglova ABT, ACT i BCT.
2. Dat su vektori: $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}, \vec{b} = \vec{j} + 2\vec{k}, \vec{c} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$.
   a) Dokazati da vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ čine bazu vektorskog prostora $\mathbf{X_O(E)}$.
   b) Gram – Schmidtovim postupkom ortonormirati tu bazu.
   c) Provjeriti da li vektori $\vec{e_1} = \vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}), \vec{e_2} = \vec{b} \times (\vec{c} - \vec{a}), \vec{e_3} = \vec{c} \times (\vec{a} - \vec{b})$ čine bazu vektorskog prostora $\mathbf{X_O(E)}$.

3. Riješiti sistem linearnih jednačina i diskutovati rješenja u zavisnosti od parametra λ:

$$\begin{aligned} (\lambda - 2)x - 3y + 2z &= 1 \\ 3x - 3y + (\lambda - 3)z &= 1 \\ x - y + 2z &= -1 \end{aligned}.$$

4. Naći konstante α, β i γ tako da prava $a: x = t + 2, y = -t - 3, z = \gamma t - 1$ bude paralelna pravoj $b: \begin{cases} \alpha x - 3y - z + 1 = 0 \\ x + \beta y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$.
5. Data je matrica $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{bmatrix}$. Odrediti karakteristični i minimalni polinom te matrice, te naći njene svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti.

Parcijalni ispit: 1,2,3,4
Integralni ispit: 2,3,4,5.

UVOD U LINEARNU ALGEBRU I ANALITIČKU GEOMETRIJU

pismeni dio ispita

GRUPA B

Zenica, 04.02.2005.

1. Dat je trougao ABC kod koga je AC = 4, BC = 3 i $\angle BCA = 60^0$. Ako je T težište trougla ABC, izračunati dužinu preostale stranice trougla i površine trouglova ABT, ACT i BCT.

2. Dat su vektori: $\vec{a} = \vec{i} - \vec{k}, \vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}, \vec{c} = \vec{j} + \vec{k}$.
   d) Dokazati da vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ čine bazu vektorskog prostora $\mathbf{X_O(E)}$.
   e) Gram – Schmidtovim postupkom ortonormirati tu bazu. Provjeriti da li vektori $\vec{e_1} = \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}), \vec{e_2} = \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}), \vec{e_3} = \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b})$ čine bazu vektorskog prostora $\mathbf{X_O(E)}$.

3. Riješiti sistem linearnih jednačina i diskutovati rješenja u zavisnosti od parametra λ:

$$
\begin{aligned}
x+(\lambda+1)y-3z&=2\\
3x\quad -5y\quad +z&=-1\,.\\
(\lambda+3)x-y-3z&=2
\end{aligned}
$$

4. Naći konstante α i β tako da prava $a:\begin{cases}3x-2y+z+3=0\\ 4x-3y+4z+1=0\end{cases}$ bude okomita na ravan $\alpha x+8y+\beta z+2=0$.

5. Data je matrica $A=\begin{bmatrix}4 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}$. Odrediti karakteristični i minimalni polinom te matrice, te naći njene svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti.

Parcijalni ispit: 1,2,3,4
Integralni ispit: 2,3,4,5.

UVOD U LINEARNU ALGEBRU I ANALITIČKU GEOMETRIJU

pismeni dio ispita

GRUPA A

Zenica, 18.02.2005.

1. Neka je $\overrightarrow{AB}=3\vec{p}-4\vec{q}, \overrightarrow{BC}=\vec{p}+5\vec{q}$, gdje je $|\vec{p}|=|q|=1,\ \sphericalangle\left(\vec{p},\vec{q}\right)=\frac{\pi}{4}.$ Izračunati dužinu visine trougla ABC koja je povučena iz vrha C.

2. Data je četverostrana piramida ABCDE, čija je baza paralelogram ABCD. Ako je $A(1,-2,-1), B(3,0,1), C(2,-2,0), E(-1,-1,4)$, izračunati površinu trougla ACD i zapreminu date piramide.

3. Za koji ugao treba da rotira prava x – 7y + 59 = 0 oko svoje tačke M(-3, y) da bi postala tangenta kružnice $x^2+y^2+4x-2y-20=0$?

4. Date su ravni $\alpha: x+2y-z-5=0$ i $\beta: x-y+2z-2=0$. Naći sve tačke na osi Oz koje su podjednako udaljene od ravni α i β.

5. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja u zavisnosti od parametara a i b:

$$
\begin{aligned}
x_1-3x_2+5x_3-x_4+2x_5&=1\\
x_1+2x_2-x_3+x_4+x_5&=-2\\
3x_1+x_2+3x_3+x_4+ax_5&=-3\\
x_1+7x_2+bx_3+3x_4&=-5
\end{aligned}
$$

6. Dokazati da je operator $\mathcal{A}$ u prostoru zadan formulom $\mathcal{A}\left(\vec{x}\right)=\vec{a}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{x}\right)$ linearan i naći matricu koja mu odgovara u bazi $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ako je $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$.

Parcijalni ispit: 1,2,3,4
Integralni ispit: 2,4,5,6.

UVOD U LINEARNU ALGEBRU I ANALITIČKU GEOMETRIJU

pismeni dio ispita

GRUPA B

Zenica, 18.02.2005.

1. Neka je $\overrightarrow{AB} = 2\vec{p} - \vec{q},\ \overrightarrow{AC} = 3\vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 1, \angle\left(\vec{p}, \vec{q}\right) = \frac{\pi}{3}$. Izračunati dužinu visine trougla ABC koja je povučena iz vrha B.

2. Data je četverostrana piramida ABCDE, čija je baza paralelogram ABCD. Ako je $A(0,5,-1),\ C(1,1,3),\ D(1,-3,1),\ E(2,2,-3)$, izračunati površinu trougla ABD i zapreminu date piramide.

3. Za koji ugao treba da rotira prava x + 7y – 9 = 0 oko svoje tačke M(2,y) da bi dodirivala hiperbolu $x^2 - 2y^2 = 4$?

4. Date su ravni $\alpha : x - y + 3z - 1 = 0$ i $\beta : 3x + y - z + 2 = 0$. Naći sve tačke na osi Ox koje su podjednako udaljene od ravni α i β.

5. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja u zavisnosti od parametara a i b:

$$\begin{aligned}
&2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1\\
&x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0\\
&3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + bx_5 = 2\\
&4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + ax_5 = 4
\end{aligned}$$

6. Dokazati da je operator $\mathcal{A}$ u prostoru zadan formulom $\mathcal{A}\left(\vec{x}\right) = \vec{a} \cdot \left(\vec{x} \cdot \vec{a}\right)$ linearan i naći matricu koja mu odgovara u bazi $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ ako je $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

Parcijalni ispit: 1,2,3,4
Integralni ispit: 2,4,5,6.

UVOD U LINEARNU ALGEBRU I ANALITIČKU GEOMETRIJU

pismeni dio ispita

GRUPA A

Zenica, 23.04.2005.

1. Izračunati unutrašnje uglove i površinu trougla ABC ako je $\overrightarrow{AB} = 2\vec{m} - 6\vec{n}, \overrightarrow{BC} = \vec{m} + 7\vec{n}$, a $\vec{m}$ i $\vec{n}$ su međusobno normalni jedinični vektori.

2. Odrediti vektor $\vec{a} = \left(x, y, z\right)$ koji obrazuje jednake uglove sa vektorima $\vec{b} = \left(y, 2z, 3x\right)$ i $\vec{c} = \left(-2z, 3x, -y\right)$, okomit je na vektoru $\vec{d} = \left(1, -1, 2\right)$, te $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$.

3. Na paraboli $y^2 = 2x$ naći tačku koja je najbliža pravoj $x - 4y - 8 = 0$.

4. Date su prave $p:\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-12}{-1}$ i $q:\dfrac{x-3}{-7}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$.

a) Utvrditi međusobni položaj pravih p i q.

b) Naći jednačinu zajedničke normale pravih p i q.

5. Neka je $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 3 & 2\end{bmatrix}$, a I je jedinična matrica trećeg reda. Riješiti jednačinu

$$(A-2I)^{-1}\cdot X\cdot(A+I)=2A.$$

6. Diskutovati rang matrice $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 4 & -1 & 3 & 0\\ 5 & 1 & \lambda-1 & 1\\ 3 & \lambda & 4 & -1\end{bmatrix}$ za razne vrijednosti parametra λ.

Parcijalni ispit: 1,2,3,4
Integralni ispit: 2,4,5,6.

UVOD U LINEARNU ALGEBRU I ANALITIČKU GEOMETRIJU

pismeni dio ispita

GRUPA B

Zenica, 23.04.2005.

1. Izračunati unutrašnje uglove i površinu trougla ABC ako je $\overrightarrow{AC}=7\vec{m}-4\vec{n}$, $\overrightarrow{BC}=4\vec{m}+2\vec{n}$, a $\vec{m}$ i $\vec{n}$ su međusobno normalni vektori intenziteta 2.

2. Odrediti vektor $\vec{b}=(z,x,y)$ koji obrazuje jednake uglove sa vektorima $\vec{a}=(x,2y,3z)$ i $\vec{c}=(-2y,3z,-x)$, okomit je na vektoru $\vec{d}=(3,-3,6)$, te $|\vec{b}|=2\sqrt{3}$.

3. Na paraboli $y^2=5x$ naći tačku koja je najbliža pravoj $15x-3y-1=0$.

4. Date su prave $p:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{0}$ i $q:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{1}$.

a) Utvrditi međusobni položaj pravih p i q.

b) Naći jednačinu zajedničke normale pravih p i q.

5. Date su matrice $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}2 & -3 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 3\end{bmatrix}$, a I je jedinična matrica trećeg reda. Riješiti jednačinu: $B^{-1}\cdot X\cdot A=(3B+2I)^{-1}$.

6. Diskutovati rang matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 7 & 2\lambda+4 & 7 & -1 \\ 6 & 3 & \lambda-2 & 2 \end{bmatrix}$ za razne vrijednosti parametra λ.

Parcijalni ispit: 1,2,3,4
Integralni ispit: 2,4,5,6.

UVOD U LINEARNU ALGEBRU I ANALITIČKU GEOMETRIJU
pismeni dio ispita
GRUPA A

Zenica, 11.05.2005.

1. Vektori $\vec{p}, \vec{q}$ i $\vec{r}$ su međusobno okomiti jedinični vektori. Nad vektorima
$$\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r},\ \vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q} - 3\vec{r},\ \vec{c} = \vec{p} + 2\vec{q} + \vec{r}$$
je konstruisan paralelopiped. Izračunati visinu paralelopipeda ako je za njegovu bazu izabran paralelogram konstruisan nad vektorima $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

2. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja u zavisnosti od parametra α:
$$\begin{aligned} \alpha x + y - (\alpha+1)z &= -1 \\ x + (2\alpha-1)y - 2z &= -\alpha \\ x + \alpha y - z &= 1 \end{aligned}$$

3. Naći jednačinu ravni π koja je paralelna ravni
$$\pi_1 : (a-b)x + 2aby + (a+b)z - a + b = 0 \ (a, b \in R)$$
i koja je na udaljenosti $\frac{\sqrt{2}}{2}$ od te ravni.

4. Identificirati površ u prostoru zadanu jednačinom:
$$x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 4yz - 8xz + 6x + 6y - 3z = 0.$$

UVOD U LINEARNU ALGEBRU I ANALITIČKU GEOMETRIJU
pismeni dio ispita
GRUPA B

Zenica, 11.05.2005.

1. Vektori $\vec{p}, \vec{q}$ i $\vec{r}$ su međusobno okomiti jedinični vektori. Nad vektorima
$$\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q} - 5\vec{r},\ \vec{b} = \vec{p} - \vec{q} + 4\vec{r},\ \vec{c} = \vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$$
je konstruisan paralelopiped. Izračunati visinu paralelopipeda ako je za njegovu bazu izabran paralelogram konstruisan nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{c}$.

2. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja u zavisnosti od parametra α :

$$\begin{aligned} &\alpha x - y + z = 1 \\ &x - (\alpha + 1) y + \alpha z = -1 \\ &(2\alpha - 1) x - 2y + z = -\alpha \end{aligned} \quad .$$

3. Naći jednačinu ravni π koja je paralelna ravni

$$\pi_1 : (a+b)x + (a-b)y + 2abz + 4ab = 0$$

i koja je na udaljenosti $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ od te ravni.

4. Identificirati površ u prostoru zadanu jednačinom:
$4x^2 + 5y^2 + 6z^2 - 4xy + 4yz + 4x + 6y + 4z - 27 = 0$.

UVOD U LINEARNU ALGEBRU I ANALITIČKU GEOMETRIJU

pismeni dio ispita

GRUPA A

Zenica, 17.06.2005.

1. Dat je paralelogram ABCD. Na dužoj dijagonali AC data je tačka E takva da je AE:EC=2:5. Na duži BC data je tačka F takva da je BF:FC = 3:4, a na duži AB data je tačka G takva da je AG:GB =1:6. Ako je $\overrightarrow{EF} = \dfrac{11}{7}\vec{m} - \vec{n}$ i $\overrightarrow{GF} = \dfrac{15\vec{m} - 3\vec{n}}{7}$, te $|\vec{m}| = 1, |\vec{n}| = 2, \measuredangle(\vec{m}, \vec{n}) = \dfrac{\pi}{4}$, izračunati površinu paralelograma te dužine njegovih dijagonala.
2. Date su prave $a : \dfrac{x-8}{\lambda} = \dfrac{y-4}{5} = \dfrac{z-6}{4}$ i $b : x = 2t + 7, y = -3t - 4, z = t + 3$.

   Odrediti λ tako da se prave sijeku, pa zatim odrediti presječnu tačku pravih a i b, te jednačinu ravni u kojoj leže te prave.
3. Riješiti sistem jednačina:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 &= 7 \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 12 \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 20 \end{aligned}$$

4. Linearnom operatoru $\mathcal{A}$ u odnosu na bazu $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ odgovara matrica

   $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Odrediti matricu koja odgovara operatoru $\mathcal{A}^2$ u bazi $\{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$,

   gdje je $\vec{f_1} = \vec{e_1} - \vec{e_3},\ \vec{f_2} = \vec{e_2},\ \vec{f_3} = \vec{e_2} + \vec{e_3}$.

5. Napisati jednačinu cilindrične površi koja prolazi kroz krivu

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y-1)^2+z^2=10 \\ x+y+2z-12=0 \end{cases}$$

a izvodnica joj je paralelna pravoj x = y +1 , z = 2y – 1.

6. Data je matrica $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Izračunati $A^n, n\in N$.

Parcijalni ispit: 3,4,5,6
Integralni ispit: 1,2,3,4.

UVOD U LINEARNU ALGEBRU I ANALITIČKU GEOMETRIJU
pismeni dio ispita
GRUPA B

Zenica, 17.06.2005.

1. Dat je paralelogram ABCD. Na dužoj dijagonali AC data je tačka F takva da je AF:FC=2:3. Na duži BC data je tačka G takva da je BG:GC = 3:2, a na duži AB data je tačka E takva da je AE:EB =1:4. Ako je $\overrightarrow{FG}=\dfrac{6\vec{m}+13\vec{n}}{5}$ i $\overrightarrow{GE}=\dfrac{-13\vec{m}-19\vec{n}}{5}$, te $|\vec{m}|=2, |\vec{n}|=2, \angle(\vec{m},\vec{n})=\dfrac{\pi}{3}$, izračunati obim i uglove paralelograma.

2. Date su prave $a:\dfrac{x-3}{\lambda}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-2}{0}$ i $b:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{\lambda}=\dfrac{z-2}{1}$.

   Odrediti λ tako da se prave sijeku, pa zatim odrediti presječnu tačku pravih a i b, te jednačinu ravni u kojoj leže te prave.

3. Riješiti sistem jednačina:

$$\begin{aligned} 2x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5&=2 \\ 6x_1-3x_2+2x_3+4x_4+5x_5&=3 \\ 6x_1-3x_2+4x_3+8x_4+13x_5&=9 \\ 4x_1-2x_2+x_3+x_4+2x_5&=1 \end{aligned}$$

4. Linearnom operatoru $\mathcal{A}$ u odnosu na bazu $\{\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3}\}$ odgovara matrica

   $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Odrediti matricu koja odgovara operatoru $\mathcal{A}^2$ u bazi $\{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$,

   gdje je $\vec{e_1}=\vec{f_2}+\vec{f_3}$, $\vec{e_2}=\vec{f_3}$, $\vec{e_3}=\vec{f_1}-\vec{f_3}$.

5. Napisati jednačinu cilindrične površi koja prolazi kroz krivu

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=10\\ x+y+2z-12=0\end{cases}$$

a izvodnica joj je paralelna pravoj x = y +1 , z = 2y – 1.

6. Data je matrica $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\-1&-1&0&1\end{bmatrix}$. Izračunati $A^n, n\in N$.

Parcijalni ispit: 3,4,5,6
Integralni ispit: 1,2,3,4.

UVOD U LINEARNU ALGEBRU I ANALITIČKU GEOMETRIJU

pismeni dio ispita

GRUPA A

Zenica, 01.07.2005.

1. Dat je paralelogram ABCD. Na kraćoj dijagonali BD data je tačka M tako da je BM:MD = 2:1. Ako su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ vektori u ravni paralelograma, takvi da je $|\vec{m}|=1, |\vec{n}|=2, \sphericalangle(\vec{m},\vec{n})=\frac{2\pi}{3}$, te $\overrightarrow{AM}=\vec{m}+\vec{n}$, $\overrightarrow{MC}=\vec{m}$, izračunati ugao $\sphericalangle BAC$.

2. Data je prava $a: \frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{1}$ i tačka A(1,1,0). Naći jednačinu ravni koja sadrži pravu *a* i tačku A i tačku B simetričnu tački A u odnosu na pravu *a*.

3. Riješiti sistem jednačina i diskutovati njegova rješenja u zavisnosti od parametra *a*:

$$\begin{aligned}&x_1-x_2-x_4+2x_5=1\\&x_1+x_2-x_3-3x_4+4x_5=2\\&6x_1-x_3-2x_5=3\\&4x_1-x_3-2x_4+2x_5=a\end{aligned}$$

4. Identificirati površ u prostoru zadanu jednačinom:

$$2x^2+y^2+2z^2-2xy+2yz+4x-2y=0.$$

UVOD U LINEARNU ALGEBRU I ANALITIČKU GEOMETRIJU

pismeni dio ispita

GRUPA B

Zenica, 01.07.2005.

1. Dat je paralelogram ABCD. Na dužoj dijagonali AC data je tačka M takva da je AM:MC = 1:3. Ako su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ vektori u ravni paralelograma, takvi da je $|\vec{m}|=2, |\vec{n}|=1, \sphericalangle(\vec{m},\vec{n})=\frac{\pi}{3}$, te $\overrightarrow{MB}=\vec{m}-5\vec{n}$, $\overrightarrow{MD}=-\vec{m}+3\vec{n}$, naći ugao $\sphericalangle ABD$.

2. Data je prava $a: \frac{x+3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ i tačka A(1,0,-1). Naći jednačinu ravni koja sadrži pravu *a* i tačku A i tačku B simetričnu tački A u odnosu na pravu *a*.

3. Riješiti sistem jednačina i diskutovati njegova rješenja u zavisnosti od parametra *a*:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 9x_1 - 6x_2 + 9x_3 + 7x_4 &= 5 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - ax_4 &= 1 \end{aligned}$$

4. Identificirati površ u prostoru zadanu jednačinom:

$$2x^2 - 7y^2 - 4z^2 + 4xy + 20yz - 16xz + 60x - 12y + 12z - 90 = 0.$$

UVOD U LINEARNU ALGEBRU I ANALITIČKU GEOMETRIJU

pismeni dio ispita

GRUPA A

Zenica, 14.09.2005.

1. Date su tačke: $A(3,-1,2), B(0,4,1), C(5,-1,1), D(3,2,4), E(-5,2,8)$.
   a) Kojoj vrsti četverouglova pripada četverougao ACDE?
   b) Izračunati površinu četverougla BCAE i udaljenost tačke A od prave CE.
2. Riješiti sistem jednačina i diskutovati njegova rješenja u zavisnosti od parametra α:

$$\begin{aligned} (1-\alpha)x + 2y + z &= \alpha - 1 \\ x - y + (\alpha - 3)z &= 0 \\ -2x + y + \alpha z &= -1 \end{aligned}$$

3. Data je prava $p: \begin{cases} x + 2y - z + 3 = 0 \\ 4x - y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$ i tačke $M(3,-1,0)$ i $N(1,1,2)$. Ravan α sadrži pravu *p* i tačku M. Naći ugao između prave MN i ravni α i pravu simetričnu pravoj MN u odnosu na ravan α.

4. Odrediti *a* tako da matrica $M = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ ima svojstvenu vrijednost jednaku 3. Za dobijeno *a* odrediti ostale svojstvene vrijednosti matrice M i svojstvene vektore.

UVOD U LINEARNU ALGEBRU I ANALITIČKU GEOMETRIJU

pismeni dio ispita

GRUPA B

Zenica, 14.09.2005.

1. Date su tačke: $A(1,1,-2), B(2,-1,5), C(\alpha,-7,-4), D(2,-1,-5)$.
   a) Odrediti α tako da četverougao ABCD bude trapez.
   b) Za nađeno α izračunati površinu i visinu tog trapeza.

2. Riješiti sistem jednačina i diskutovati njegova rješenja u zavisnosti od parametra α :

$$x+2z=0$$
$$(2\alpha-1)x+y+4z=2$$
$$-3x+(\alpha+2)y+(\alpha+5)z=\alpha+3$$

3. Prava $a:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-5}{1}$ siječe ravan $\alpha: 3x+y-z+4=0$ u tački S. Ravan β sadrži pravu a i tačku $T(-2,4,3)$. Naći tačku S, ugao između ravni α i β i projekciju tačke T na ravan α.

4. Odrediti a tako da matrica $M=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ ima svojstvenu vrijednost jednaku 5. Za dobijeno a odrediti ostale svojstvene vrijednosti matrice M i svojstvene vektore.

UVOD U LINEARNU ALGEBRU I ANALITIČKU GEOMETRIJU

pismeni dio ispita

GRUPA A

Zenica, 28.09.2005.

1. a) Provjeriti na vektorima $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ da važi jednakost:

$$(*) \qquad \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$$

b) Dokazati da važi jednakost (*) uzimajući proizvoljne koordinate

$$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\ \vec{b}=(b_1,b_2,b_3),\ \vec{c}=(c_1,c_2,c_3).$$

2. a) Rastaviti na faktore polinom $\begin{vmatrix} 1+a & 1+b & 1+c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

b) Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja u zavisnosti od parametra m:

$$mx+6y=5m-3$$
$$2x-(m-7)y=29-7m$$

3. Naći jednačinu prave koja prolazi kroz tačku $M(0,2,-5)$ i siječe prave

$$a:\frac{x-1}{5}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+4}{7} \text{ i } b:\frac{x+4}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+10}{2}.$$

4. Riješiti matričnu jednačinu: $(A+I)(X-I)(B-I)=AB+A$, ako je

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 2 & 10 & -4 \\ -4 & -20 & 12 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 9 & -4 \end{bmatrix}, \text{ a I je jedinična matrica.}$$

UVOD U LINEARNU ALGEBRU I ANALITIČKU GEOMETRIJU

pismeni dio ispita

GRUPA B

Zenica, 28.09.2005.

1. a) Provjeriti na vektorima $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ da važi jednakost:

$$(*) \qquad \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c} = \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\cdot\vec{b} - \left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\cdot\vec{a}$$

b) Dokazati da važi jednakost (*) uzimajući proizvoljne koordinate

$$\vec{a} = \left(a_1, a_2, a_3\right),\ \vec{b} = \left(b_1, b_2, b_3\right),\ \vec{c} = \left(c_1, c_2, c_3\right).$$

2. a) Rastaviti na faktore polinom $\begin{vmatrix} 1-a & abc & a \\ 1-b & b^2c & b \\ 1-c & a^2b & c \end{vmatrix}$.

b) Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja u zavisnosti od parametra m:

$$\begin{aligned} mx + y &= 2m + 1 \\ 2x + \left(2m-3\right)y &= 5 \end{aligned}.$$

3. Napisati jednačinu prave koja prolazi kroz tačku $M\left(3,-2,-4\right)$, paralelna je ravni $\alpha: 3x - 2y - 3z - 7 = 0$ i siječe pravu $a: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+4}{-2} = \dfrac{z-1}{2}$.

4. Riješiti matričnu jednačinu: $\left(A - I\right)\left(X + I\right)\left(B + I\right) = AB + B$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 17 \\ 6 & -6 & 26 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 3 & 21 & 0 \\ 4 & 28 & 4 \end{bmatrix}, \text{ a I je jedinična matrica.}$$

<u>UVOD U LINEARNU ALGEBRU I ANALITIČKU GEOMETRIJU</u>

pismeni dio ispita

Zenica, 14.10.2005.

1. Dat je trougao ABC kod koga je AC = 4, BC = 3 i $\angle BCA = 60^0$. Ako je T težište trougla ABC, izračunati dužinu preostale stranice trougla i jednu težišnicu.

2. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja u zavisnosti od parametra:

$$\begin{aligned} x+y+z&=\lambda \\ x+(1+\lambda)y+z&=2\lambda \\ x+y+\lambda z&=-\lambda \end{aligned}$$

3. Na pravoj $a:\dfrac{x-8}{8}=\dfrac{y-2}{-6}=\dfrac{z}{0}$ naći sve tačke čija je udaljenost od tačke A(3,1, -1) jednaka $2\sqrt{7}$.

4. Identificirati skup zadan u pravouglom koordinatnom sistemu jednačinom:

$$41x^2+24xy+9y^2+24x+18y-36=0\,.$$