Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Matematika i informatika
28.09.2010.

Pismeni ispit iz predmeta **Operaciona istraživanja**

Zadatak br. 1

Radna organizacija treba da otvori četiri nova radna mjesta. Raspisan je konkurs. U uži izbor je ušlo pet kandidata. Izvršena je provjera njihove stručne sposobnosti za obavljanje datih poslova. Broj osvojenih poena dat je u tabeli.

Kako rasporediti radnike na radna mjesta, pa da ukupna efikasnost bude najveća? Koji radnik neće biti primljen?

radna mjesta / radnici	P1	P2	P3	P4
R1	6	6	7	2
R2	5	5	7	2
R3	8	8	7	6
R4	5	3	5	5
R5	9	7	10	5

Zadatak br. 2

Kompanija Vazduh Airlines d.o.o. razmišlja da nabavi nove dugo-, srednje-, i kratko-relaciske avione za prevoz putnika. Cijena nabavke će koštati 67 miliona KM za svaki dugo-relaciski avion, 50 miliona KM za srednje-relaciski i 35 miliona KM za svaki kratko-relaciski avion. Upravni odbor je odobrio maksimalni trošak od 1,5 miliardi za nabavku ovih aviona. Bez obzira koji od aviona će biti naručen, procjenjuje se da će avioni biti upotrebljeni pod maksimalnom opterećenošću. Procjenjeno je da će ukupni godišnji profit biti 4,2 miliona KM za dugo-relaciski avion, 3 miliona KM za srednje-relaciski avion i 2,3 miliona KM za kratko-relaciski avion.

Predviđeno je da će kompaniji biti slobodno dovoljno treniranih pilota, koji će činiti posadu 30 novih aviona. Ako se samo naruče kratko-relaciski avioni, prostor za održavanje aviona će biti u mogućnosti da primi 40 novih aviona. Kakogod, svaki srednje-relaciski avion je ekvivalentan 1 cijlom i 1/3 kratko relaciskom avionu, i svaki dugo relaciski avion je ekvivalentan 1 cijelom i 2/3 kratko-relaciskom avionu. (Tako npr. prostor za održavanje aviona može primiti ukupno 37 kratko-relaciskih, 1 dugo-relaciska i 1 srednje-relaciski avion).

Informacije date ovdje su samo preliminarna analiza problema. Puno detaljnija analiza će biti uspostavljena kasnije. Kakogod, koristeći date podatke kao prvu aproksimaciju, menadžment želi da zna koliko mnogo aviona svakog tipa bi se trebalo naručiti da se maksimizira profit. Problem riješiti metodom odsječaka.

Zadatak br. 3

Igra je definisana na sljedeći način: Dva igrača A i B imaju pločice različitih boja i različitih oznaka, i to, igrač B ima dvije pločice na kojima su oznake B1, i B2, dok igrač A ima pet pločica na kojima su oznake A1, A2, A3, A4 i A5. Oba igrača, nezavisno jedan od drugog, istovremeno biraju po jednu pločicu i bacaju na pod. Dobit igrača A u odnosu na igrača B u zavisnosti od kombinacije dvije pločice koje se nalaze na podu je prikazanno u tabeli iznad.

A / B	B1	B2
A1	5	4
A2	3	1
A3	6	8
A4	4	4
A5	5	2

Dati grafički interpretaciju matrične igre, odrediti optimalne strategije igrača i pronaći vrijednost igre.

Zadatak br. 4

Kompanija ZzKablovi d.o.o. razmatra konstrukciju nove tvornice. Tabela pokazuje aktivnosti projekta, njihovu međusobnu zavisnost i procjenjeno vrijeme (u sedmicama).

a) nacrtati CPM mrežu ovog projekta

b) pronaći kritičan put i objasniti šta za projekat predstavlja kritičan put

c) pronači početno i završno najranije i najkasnije vrijeme i vremenske rezerve za svaku od aktivnosti

d) naći vrijeme završetka projekta.

Aktivnost	Zavisi od	Vrijeme
A	-	5
B	-	5
C	B	2
D	A, C	2
E	A, C	3
F	A, C	1
G	B	2
H	B	7
I	E	13
J	E, D	6
K	F, G, H	4
L	H	5
M	J, K, L	5

(Zadaci su skinuti sa stranice: \pf.unze.ba\nabokov
Za uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(#) Radna organizacija treba da otvori četiri nova radna mjesta. Raspisan je konkurs. U uži izbor je ušlo pet kandidata. Izvršena je provjera njihove stručne sposobnosti za obavljanje datih poslova. Broj osvojenih poena dat je u tabeli.

radnici \ radna mjesta	P_1	P_2	P_3	P_4
R_1	6	6	7	2
R_2	5	5	7	2
R_3	8	8	7	6
R_4	5	3	5	5
R_5	9	7	10	5

Kako rasporediti radnike na radna mjesta, pa da ukupna efikasnost bude najveća? Koji radnik neće biti primljen?

Rj: Matematički model ovog problema je

$$\max F(X) = \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$$

c_{11} c_{12} c_{13} c_{14}
c_{21} c_{22} c_{23} c_{24}

uz ograničenja $\sum_{i=1}^{5} x_{ij} = 1, \quad j=\overline{1,4}$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} \leq 1, \quad i=\overline{1,5}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } i\text{-ti radnik raspoređen na } j\text{-to mjesto} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Ovo je otvoreni problem. Svedimo ga na zatvoreni tako što ćemo dodati fiktivni posao P_5. Dobićemo sljedeću kvadratnu matricu

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 & 7 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 7 & 2 & 0 \\ 8 & 8 & 7 & 6 & 0 \\ 5 & 3 & 5 & 5 & 0 \\ 9 & 7 & 10 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Kako se traži maksimalna vrijednost f-je postupak za rješavanje je sljedeći:

1. u svakoj koloni od svih elemenata se

oduzima najveći element. Tako se dobije:

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 & -3 & -4 & 0 \\ -4 & -3 & -3 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ -4 & -5 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Znajući da je $\max F(x) = cx$ $\Longleftrightarrow$ $\min F_1(x) = -cx$, dobijena kvadratna matrica se množi sa (-1).

$$\begin{array}{c} (*) \\ (*) \\ \\ (*) \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 & \boxed{0} \\ 4 & 3 & 3 & 4 & \cancel{0} \\ 1 & \boxed{0} & 3 & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 4 & 5 & 5 & 1 & \cancel{0} \\ \boxed{0} & 1 & \cancel{0} & 1 & \cancel{0} \end{bmatrix}$$

3. provjeravamo da li u svakom redu postoji bar jedna nula, i ako to nije slučaj, u redu koji nema nulu od svih elemenata se oduzima najmanji element.

4. razvrstavamo nule na zavisne i nezavisne:

rješenje nije optimalno imamo tri nezavisne nule

a) označimo redove sa (*) bez nezavisnih nula (R_2 i R_4).

b) precrtamo sve kolone koje imaju zavisnu nulu u označenim redovima

c) označimo redove sa (*) koje imaju nezavisnu nulu u precrtanoj koloni (R_1)

d) precrtamo kolone koje imaju zavisnu nulu u novom označenom redu, c) i d) ponavljamo

e) precrtamo redove koji nisu označeni sa (*) u postupcima a) i c) (u ovom slučaju precrtamo R_3 i R_5)

f) pronađemo najmanji neprecrtani element (1)

g) najmanji element pod f) dodamo elementima koji se nalaze na presjeku precrtanih kolona i redova.

h) vrijednost najmanjeg elementa oduzmemo od svih neprecrtanih elemenata

i) svi ostali precrtani elementi se ne mijenjaju

j) razvrstavamo nule na zavisne i nezavisne.

$$\begin{array}{c}*\\*\\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} \\ 3 & 2 & 2 & 3 & \cancel{0} \\ 1 & \boxed{0} & 3 & \cancel{0} & 1 \\ 3 & 4 & 4 & \boxed{0} & \cancel{0} \\ \boxed{0} & 1 & \cancel{0} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rješenje nije optimalno

a) - e)

najmanji element je 1

g) - i)

$$\begin{array}{c}*\\*\\*\\*\\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & \boxed{0} & 1 & 2 & \cancel{0} \\ 2 & 1 & 1 & 2 & \boxed{0} \\ 1 & \cancel{0} & 3 & \cancel{0} & 2 \\ 3 & 4 & 4 & \boxed{0} & 1 \\ \boxed{0} & 1 & \cancel{0} & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Razvrstavamo nule na zavisne i nezavisne.

Rješenje nije optimalno

a) - e)

najmanji element je 1

g) - i)

$$\begin{bmatrix} \cancel{0} & 0 & \cancel{0} & 2 & \boxed{0} \\ 1 & 1 & \boxed{0} & 2 & 0 \\ \cancel{0} & \boxed{0} & 2 & \cancel{0} & 2 \\ 2 & 4 & 3 & \boxed{0} & 1 \\ \boxed{0} & 2 & \cancel{0} & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Razvrstavamo nule na zavisne i nezavisne

Rješenje je optimalno.

Primjetimo da postoje i sljedeća optimalna rješenja

a) $$\begin{bmatrix} \boxed{0} & 0 & \cancel{0} & 2 & \cancel{0} \\ 1 & 1 & \cancel{0} & 2 & \boxed{0} \\ 0 & \boxed{0} & 2 & \cancel{0} & 2 \\ 2 & 4 & 3 & \boxed{0} & 1 \\ \cancel{0} & 2 & \boxed{0} & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \boxed{0} & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & \boxed{0} \\ 0 & \boxed{0} & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & \boxed{0} & 1 \\ \boxed{0} & 2 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

c) $$\begin{bmatrix} 0 & \boxed{0} & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & \boxed{0} & 1 \\ 0 & 2 & \boxed{0} & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

U svim varijantama imamo da je $\max F = 29$

$0+7+8+5+9$

$7+0+8+5+9$

Radnici 1 i 2 imaju jednake šanse da ne budu primljeni

Konkursna komisija treba izmaći nove uslove na osnovu kojih će odlučiti da li da zaposli prvog ili drugog radnika.

Igra je definisana na sledeći način: Dva igrača A i B imaju pločice različitih boja i različitih oznaka, i to, igrač B ima dvije pločice na kojima su oznake B_1 i B_2, dok igrač A ima pet pločica na kojima su oznake A_1, A_2, A_3, A_4 i A_5. Oba igrača nezavisno jedan od drugog, istovremeno biraju po jednu pločicu i bacaju na pod. Dobit igrača A u odnosu na igrača B u zavisnosti od kombinacije dvije pločice koje se nalaze na podu je prikazano u tabeli ispod.

Dati grafičku interpretaciju matrične igre, odrediti optimalne strategije igrača i pronaći vrijednost igre.

A \ B	B_1	B_2
A_1	5	4
A_2	3	1
A_3	6	8
A_4	4	4
A_5	5	2

Rj: Prije nego što odredimo da li matrična igra ima sedlo primjetimo sledeće: ~~Pločice~~ sa oznakom A_1, A_2, A_4 i A_5 ~~no~~ nose uvijek manji bodova od pločice sa oznakom A_3, pa će igrač A uvijek birati pločicu A_3. Igrač B će uvijek birati B_2 zato što je u ~~redu~~ A_3 $8 > 6$. Matrična igra bi trebala imati sedlo.

A \ B	B_1	B_2	igrač A minimalno može da dobije
A_1	5	4	4
A_2	3	1	1
A_3	6	8	6
A_4	4	4	4
A_5	5	2	2
igrač B max. može da izgubi	6	8	

α - donja vrijednost igre

$$\alpha = \max_i \min_j (a_{ij}) = 6$$

β - gornja vrijednost igre

$$\beta = \min_j \max_i (a_{ij}) = 6$$

$V = 6$

Optimalne strategije igrača su $P=(0,0,1,0,0)$, $Q=(0,1)$ tj. igrač A će uvijek uzimati vrijednost A_3 dok će igrač B uvijek uzimati vrijednost B_2.
Vrijednost igre je 6.

(#) Kompanija ZzKablovi d.o.o. razmatra konstrukciju nove tvornice. Tabela pokazuje aktivnosti projekta, njihovu međusobnu zavisnost i procjenjeno vrijeme (u sedmicama).

Aktivnost	Zavisi od	Vrijeme
A	—	5
B	—	5
C	B	2
D	A, C	2
E	A, C	3
F	A, C	1
G	B	2
H	B	7
I	E	13
J	E, D	6
K	F, G, H	4
L	H	5
M	J, K, L	5

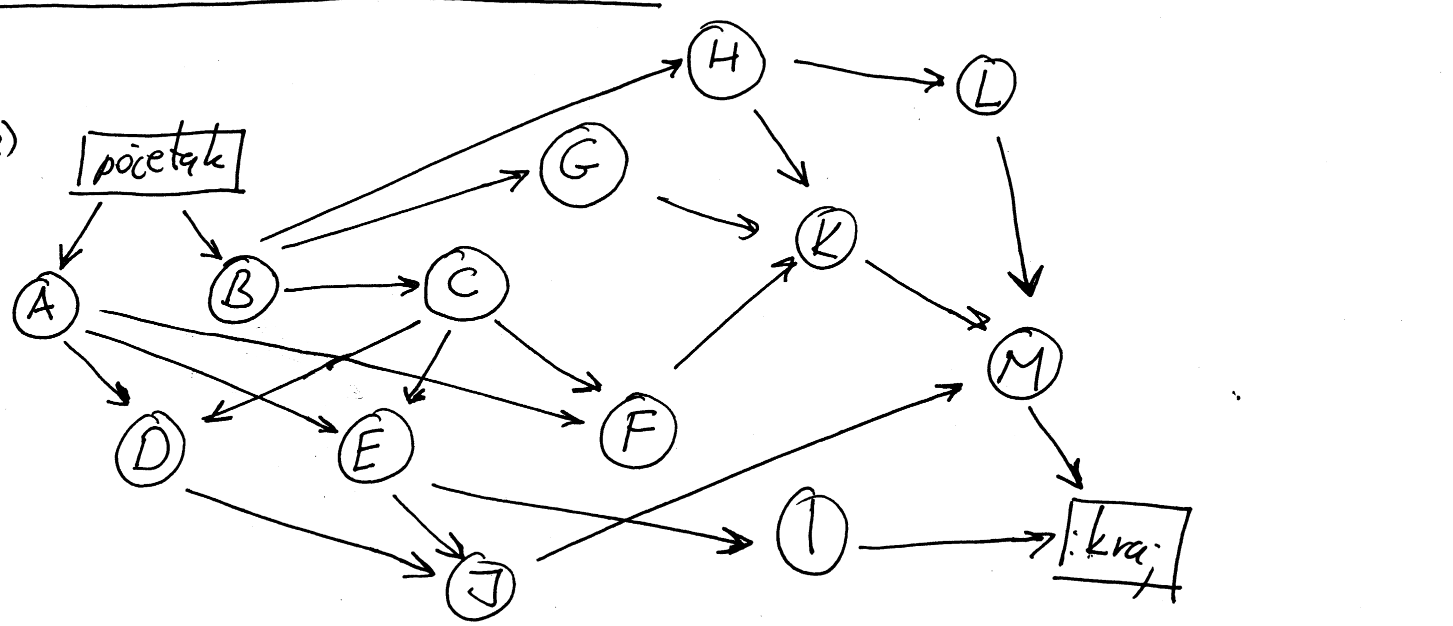
a) nacrtati CPM mrežu ovog projekta

b) pronaći kritičan put i objasniti šta za projekat predstavlja kritičan put

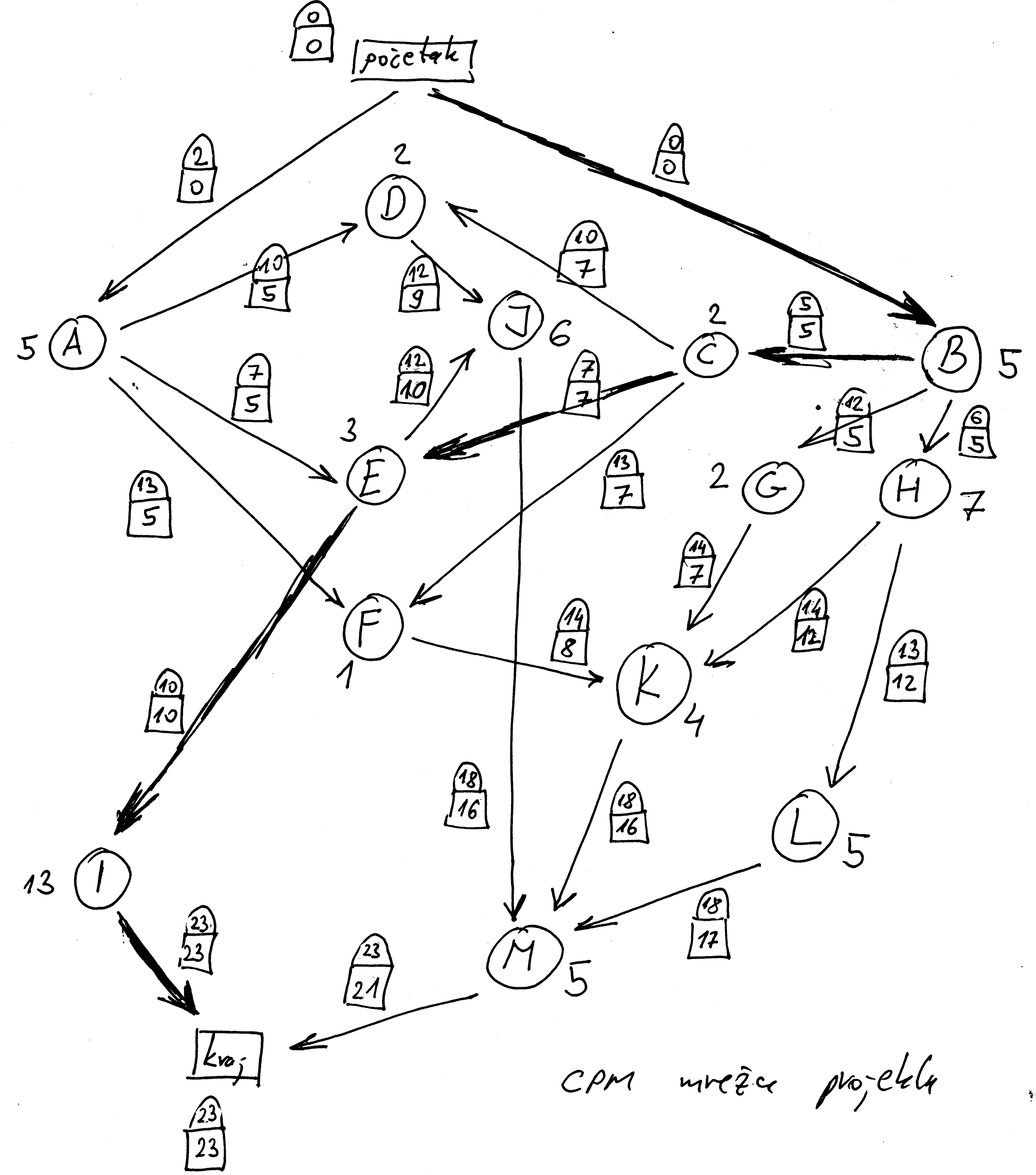
c) pronaći početno i završno najranije i najkasnije vrijeme i vremenske rezerve za svaku od aktivnosti

d) naći vrijeme završetka projekta.

Rj. a)



Nacrtajmo ljepše gornju CPM mrežu projekta.



CPM mreža projekta

b) Kritičan put projekta je B–C–E–I.

Kritičan put u projektu su aktivnosti koje se moraju završiti u procijenjenom vremenskom roku. Vrijeme završetka projekta će kasniti onoliko koliko budu kasnile aktivnosti na kritičnom putu.

c)

aktivnost	najranije početno vrijeme	najranije završno vrijeme	najkasnije početno vrijeme	najkasnije završno vrijeme	vremenske rezerve (v−u)
A	0	5	2	13	8
B	0	5	0	5	0
C	5	7	5	7	0
D	7	9	10	12	3
E	7	10	7	10	0
F	7	8	13	14	6
G	5	7	12	14	7
H	5	12	6	13	1
I	10	23	10	23	0
J	10	16	12	18	2
K	12	16	14	18	2
L	12	17	13	18	1
M	17	21	18	23	2

d) Projekat će se završiti za 23 sedmice.