Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Matematika i informatika
17.09.2010.

Pismeni ispit iz predmeta **Operaciona istraživanja**

Zadatak br. 1

Radna organizacija treba da otvori četiri nova radna mjesta. Raspisan je konkurs. U uži izbor je ušlo pet kandidata. Izvršena je provjera njihove stručne sposobnosti za obavljanje datih poslova. Broj osvojenih poena dat je u tabeli.

Kako rasporediti radnike na radna mjesta, pa da ukupna efikasnost bude najveća? Koji radnik neće biti primljen?

radna mjesta / radnici	M1	M2	M3	M4
R1	5	7	5	2
R2	3	5	5	5
R3	6	7	6	2
R4	7	11	10	5
R5	9	7	8	7

Zadatak br. 2

Kompanija Vazduh Airlines d.o.o. razmišlja da nabavi nove dugo-, srednje-, i kratko-relaciske avione za prevoz putnika. Cijena nabavke će koštati 67 miliona KM za svaki dugo-relaciski avion, 50 miliona KM za srednje-relaciski i 35 miliona KM za svaki kratko-relaciski avion. Upravni odbor je odobrio maksimalni trošak od 1,5 miliardi za nabavku ovih aviona. Bez obzira koji od aviona će biti naručen, procjenjuje se da će avioni biti upotrebljeni pod maksimalnom opterečenošću. Procjenjeno je da će ukupni godišnji profit biti 4,2 miliona KM za dugo-relaciski avion, 3 miliona KM za srednje-relaciski avion i 2,3 miliona KM za kratko-relaciski avion.

Predviđeno je da će kompaniji biti slobodno dovoljno treniranih pilota, koji će činiti posadu 30 novih aviona. Ako se samo naruče kratko-relaciski avioni, prostor za održavanje aviona će biti u mogućnosti da primi 40 novih aviona. Kakogod, svaki srednje-relaciski avion je ekvivalentan 1 cijlom i 1/3 kratko relaciskom avionu, i svaki dugo relaciski avion je ekvivalentan 1 cijelom i 2/3 kratko-relaciskom avionu. (Tako npr. prostor za održavanje aviona može primiti ukupno 37 kratko-relaciskih, 1 dugo-relaciska i 1 srednje-relaciski avion).

Informacije date ovdje su samo preliminarna analiza problema. Puno detaljnija analiza će biti uspostavljena kasnije. Kakogod, koristeći date podatke kao prvu aproksimaciju, menadžment želi da zna koliko mnogo aviona svakog tipa bi se trebalo naručiti da se maksimizira profit. Problem riješiti metodom odsječaka.

Zadatak br. 3

Igra je definisana na sljedeći način: Dva igrača A i B imaju kuglice različitih boja i različitih oznaka, i to, igrač A ima tri kuglice na kojima su oznake A1, A2 i A3, dok igrač B ima pet kuglica na kojima su oznake B1, B2, B3, B4 i B5. Oba igrača, nezavisno jedan od drugog, istovremeno biraju po jednu kuglicu i bacaju na pod. Dobit igrača A u odnosu na igrača B u zavisnosti od kombinacije dvije kuglice koje se nalaze na podu je prikazanno u sljedećoj tabeli.

A \ B	B1	B2	B3
A1	1	-1	1
A2	0	1	1
A3	-1	0	0
A4	2	-3	-3
A5	1	2	3

Dati grafički interpretaciju matrične igre, odrediti optimalne strategije igrača i pronaći vrijednost igre.

Zadatak br. 4

Kompanija ABC Djelovi razmatra konstrukciju nove tvorničke zgrade. Tabela pokazuje aktivnosti projekta, njihovu međusobnu zavisnost i procjenjeno vrijeme (u sedmicama).

Aktivnost	Opis	Zavisi od	Vrijeme
A	Definicija problema	-	3
B	Prelimenarna studija troška i ograničenja	A	3
C	Analiza problema u postojećim zgradama	A	3
D	Spajanje zahtjeva sa novom zgradom	C	5
E	Detaljno crtanje nove zgrade	B, C	6
F	Konstrukcija prototipa zgrade	D, E	9
G	Analiza troška	E	5
H	Inžinjerski pogled izvodljivosti	G	3
I	Konstrukcija tvorničke zgrade	G, F	5
J	Inspekcija zgrade	I, H	6
K	Konačni plan rasporeda	J	4

a) nacrtati CPM mrežu ovog projekta

b) pronaći kritičan put i objasniti šta za projekat predstavlja kritičan put

c) pronači početno i završno najranije i najkasnije vrijeme i vremenske rezerve za svaku od aktivnosti

d) naći vrijeme završetka projekta.

(Zadaci su skinuti sa stranice: \pf.unze.ba\nabokov
Za uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(#) Radna organizacija treba da otvori četiri nova radna mjesta. Raspisan je konkurs. U uži izbor je ušlo pet kandidata. Izvršena je provjera njihove stručne sposobnosti za obavljanje poslova. Broj osvojenih poena dat je u sljedećoj tabeli:

radnici \ radna mjesta	M_1	M_2	M_3	M_4
R_1	5	7	5	2
R_2	3	5	5	5
R_3	6	7	6	2
R_4	7	11	10	5
R_5	9	7	8	7

Kako rasporediti radnike na radna mjesta, pa da ukupna efikasnost bude najveća? Koji radnik neće biti primljen?

Rj. Matematički model ovog problema je

$$\max F(X) = \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$$

pri ograničenjima
$$\sum_{i=1}^{5} x_{ij} = 1, \quad j=\overline{1,4}$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} \leq 1, \quad i=\overline{1,5}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } i\text{-ti radnik raspoređen na } j\text{-to mjesto} \\ 0, & \text{u suprotnom} \end{cases}$$

Ovo je otvoreni problem, pa prije nego što ga počnemo rješavati dodajmo fiktivnu mašinu M_5 pa ga svedimo na zatvoreni problem.

Poslije dodavanja dobijemo sljedeću kvadratnu matricu:

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 5 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 5 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 6 & 2 & 0 \\ 7 & 11 & 10 & 5 & 0 \\ 9 & 7 & 8 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Kako se traži maksimalna vrijednost f-je $F(X)$ postupak za rješavanje je sljedeći

1. u svakoj koloni od svih elemenata se oduzima najveći element.

Tako se dobije:

$$\begin{bmatrix} -4 & -4 & -5 & -5 & 0 \\ -6 & -6 & -5 & -2 & 0 \\ -3 & -4 & -4 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Znajući da je $\max F(X) = C \cdot X \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \min F_1(x) = -CX$ dobijena kvadratna matrica se množi sa (-1) i dalje rješavanje se nastavlja po postupku za iznalaženje minimalne vrijednosti f-je.

U svakom redu postoji bar jedna nula

Razvrstavamo nule na zavisne i nezavisne

Rješenje nije optimalno (imamo tri nezavisne nule)

$$\begin{array}{c} * \\ (*) \\ (*) \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 5 & 5 & \boxed{0} \\ 6 & 6 & 5 & 2 & \cancel{0} \\ 3 & 4 & 4 & 5 & \cancel{0} \\ 2 & \boxed{0} & \cancel{0} & 2 & \cancel{0} \\ \boxed{0} & 4 & 2 & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix}$$

a) označimo redove sa (*) bez nezavisnih nula (R_2, R_3)

b) precrtamo sve kolone koje imaju zavisnu nulu u označenim redovima

c) označimo redove sa (*) koje imaju nezavisnu nulu u precrtanoj

d) precrtamo kolone koje imaju zavisnu nulu u novom označenom redu, c) i d) ponavljamo

e) precrtamo redove koji nisu označeni sa (*) u postupcima a) i c)

f) pronađemo najmanji neprecrtan element (2)

g) najmanji element pod f) dodamo elementima koji se nalaze na presjeku precrtanih kolona i redova

h) vrijednost najmanjeg elementa oduzmemo od svih neprecrtanih elemenata

i) svi ostali precrtani elementi se ne mijenjaju

j) razvrstavamo nule na zavisne i nezavisne

$$\begin{array}{c}* \\ \\ * \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 & \boxed{0} \\ 4 & 4 & 3 & \boxed{0} & \cancel{0} \\ 1 & 2 & 2 & 3 & \cancel{0} \\ 2 & \boxed{0} & 0 & 2 & 2 \\ \boxed{0} & 4 & 2 & \cancel{0} & 2 \end{bmatrix}$$

Razvrstavamo na zavisne i nezavisne.
Nije optimalno.
a) - e)
najmanji element je 1 g) - i)

$$\begin{array}{c}* \\ * \\ * \\ \\ * \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & \boxed{0} \\ 4 & 4 & 3 & \boxed{0} & 1 \\ \boxed{0} & 1 & 1 & 2 & \cancel{0} \\ 2 & \boxed{0} & \cancel{0} & 2 & 3 \\ \cancel{0} & 4 & 2 & \cancel{0} & 3 \end{bmatrix}$$

Razvrstavamo na zavisne i nezavisne.

Nije optimalno
a) - e)
najmanji element je 1
g) - i)

Razvrstavamo nule na zavisne i nezavisne

$$\begin{bmatrix} 1 & \boxed{0} & 1 & 2 & \cancel{0} \\ 4 & 3 & 2 & \boxed{0} & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & 2 & \boxed{0} \\ 3 & \cancel{0} & \boxed{0} & 3 & 4 \\ \boxed{0} & 3 & 1 & \cancel{0} & 3 \end{bmatrix}$$

Nule smo mogli razvrstati i na drugi način

$$\begin{bmatrix} 1 & \cancel{0} & 1 & 2 & \boxed{0} \\ 4 & 3 & 2 & \boxed{0} & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \boxed{0} & 2 & \cancel{0} \\ 3 & \boxed{0} & \cancel{0} & 3 & 4 \\ \boxed{0} & 3 & 1 & \cancel{0} & 3 \end{bmatrix}$$

Dobili smo dva optimalna rješenja

prvo: $x_{12}=1,\ x_{24}=1,\ x_{35}=1,\ x_{43}=1,\ x_{51}=1$

$$\max F = 7+5+10+9 = 31$$

drugo:

$x_{15}=1,\ x_{24}=1,\ x_{33}=1,\ x_{42}=1,\ x_{51}=1$

$$\max F = 5+6+11+9 = 31$$

Primjetimo da postoji i treće optimalno rješenje. KOJE?
Na osnovu prvog optimalnog rješenja možemo zaključiti da na radna mjesta M_1, M_2, M_3 i M_4 treba rasporediti redom petog, prvog, drugog i četvrtog radnika dok radnik tri neće biti primljen.
Na osnovu drugog optimalnog rješenja radnik jedan neće biti primljen. Prema tome konkursna komisija treba izaći nove uslove na osnovu kojih će odlučiti da li da zaposli prvog ili trećeg radnika.

(#) Igra je definisana na sljedeći način: Dva igrača A i B imaju kuglice različitih boja i različitih oznaka, i to, igrač A ima tri kuglice na kojima su oznake A_1, A_2 i A_3, dok igrač B ima pet kuglica na kojima su oznake B_1, B_2, B_3, B_4 i B_5. Oba igrača, nezavisno jedan od drugog, istovremeno biraju po jednu kuglicu i bacaju na pod. Dobit igrača A u odnosu na igrača B u zavisnosti od kombinacije dvije kuglice koje se nalaze na podu je prikazano u sljedećoj tabeli:

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	1	-1	1
A_2	0	1	1
A_3	-1	0	0
A_4	2	-3	-3
A_5	1	2	3

Dati grafičku interpretaciju igre, odrediti optimalne strategije igrača i pronaći vrijednost igre.

Rj. Prije nego što provjerimo da li matrična igra ima sedlo primjetimo sljedeće: Kuglica sa oznakom B_3 uvijek ima veću ili jednaku vrijednost od kuglice B_2 pa igrač B nikad neće bacati kuglicu B_3 (kolonu B_3 možemo prekrižiti). Kuglica A_3 uvijek donosi manje dobitka od kuglice A_2 pa je igrač A nikad neće birati (kolonu A_3 možemo prekrižiti). Početnu tabelu smo sveli na sljedeći oblik:

A \ B	B_1	B_2
A_1	1	-1
A_2	0	1
A_4	2	-3
A_5	1	2

Iz ove nove tabele primjetimo da red A_1 uvijek ima manje vrijednosti od reda A_5 pa igrač A nikad neće bacati kuglicu A_1 (možemo je prekrižiti). Isto je razmatranje za kolonu A_2. (A_2 možemo prekrižiti)

Početnu matričnu igru smo sveli na oblik 2×2 :

		q_1	q_2	
	A \ B	B_1	B_2	igr. A min. može da dobije
p_4	A_4	2	−3	−3
p_5	A_5	1	2	1
	igr. B max može da izg.	2	2	

α - donja vrijednost igre

$\alpha = \max\limits_i \min\limits_j (a_{ij}) = 1$

β - gornja vrijednost igre

$\beta = \min \max (a_{ij}) = 2$

v - vrijednost igre

$1 < v < 2$

Matrična igra nema sedlo, rješenje igre je u domenu čistih strategija.
Sračunajmo očekivane dobitke igrača A.

$C(P, B_1) = 2p_4 + p_5$

$C(P, B_2) = -3p_4 + 2p_5$

Kako je $p_1 + p_2 = 1$ imamo $p_5 = 1 - p_4$

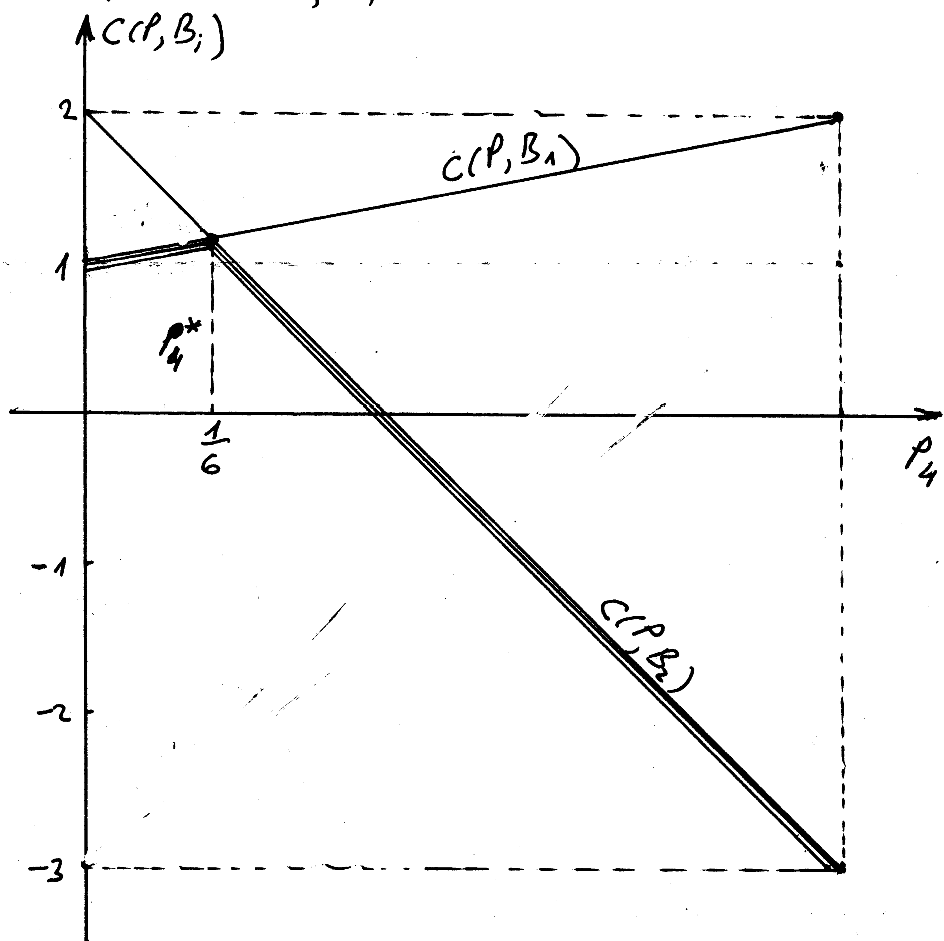
$C(P, B_1) = 2p_4 + 1 - p_4 = p_4 + 1$ (1, 2)

$C(P, B_2) = -3p_4 + 2 - 2p_4 = -5p_4 + 2$ (2, −3)

$$\begin{array}{r} p_4 + 1 = v \\ - \quad -5p_4 + 2 = v \\ \hline 6p_1 - 1 = 0 \end{array}$$

$p_1 = \frac{1}{6}$

Grafički prikaz



Minimalni mogući dobici igrača A su prikazani debljom linijom na slici.
Igrač A nastojat će da maksimizira minimalne moguće dobitke i to će uspjeti za $p_4^* = \frac{1}{6}$

$v = \frac{1}{6} + 1 = \frac{7}{6}$, $p_5 = \frac{5}{6}$

$$C(P, B_1) = \frac{7}{6} = C(P, B_2)$$

Ostalo nam je još da odredimo q_1, q_2 i q_3.

Imajući u vidu opšti izraz za vrijednost matrične igre može se pisati:

$$V = C(P, Q) = \sum_{i=1}^{2} C(P, B_i) q_i =$$

$$= \frac{7}{6} q_1 + \frac{7}{6} q_2$$

ali iz ovoga ništa ne možemo zaključiti za q_1 i q_2.

Očekivani gubici igrača B su

$$C(A_4, Q) = 2q_1 - 3q_2$$

$$C(A_5, Q) = q_1 + 2q_2$$

$$2q_1 - 3q_2 = q_1 + 2q_2$$

$$q_1 = 5q_2$$

Kako je još $q_1 + q_2 = 1$ imamo

$$5q_2 + q_2 = 1$$

$$q_2 = \frac{1}{6} \Rightarrow q_1 = \frac{5}{6}$$

Prema tome optimalne strategije su $P = (0, 0, 0, \frac{1}{6}, \frac{5}{6})$,

$Q = (\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, 0)$ i

vrijednost igre je $\frac{7}{6}$.

(#) Kompanija ABC Djelovi razmatra konstrukciju nove zgrade tvornice. Sljedeća tabela pokazuje aktivnosti projekta, njihovu međusobnu zavisnost i procjenjeno vrijeme (u sedmicama).

Aktivnost	Opis	Zavisi od	Vrijeme
A	Definicija problema	—	3
B	Prelimenarna studija troška i ograničenja	A	3
C	Analiza problema u postojećim zgradama	A	3
D	Spajanje zahtjeva sa novom zgradom	C	5
E	Detaljno crtanje nove zgrade	B, C	6
F	Konstrukcija prototipa zgrade	D, E	9
G	Analiza troška	E	5
H	Inžinjerski pogled izvodljivosti	G	3
I	Konstrukcija zgrade tvornice	G, F	5
J	Inspekcija zgrade	I, H	6
K	Konačni plan rasporeda	J	4

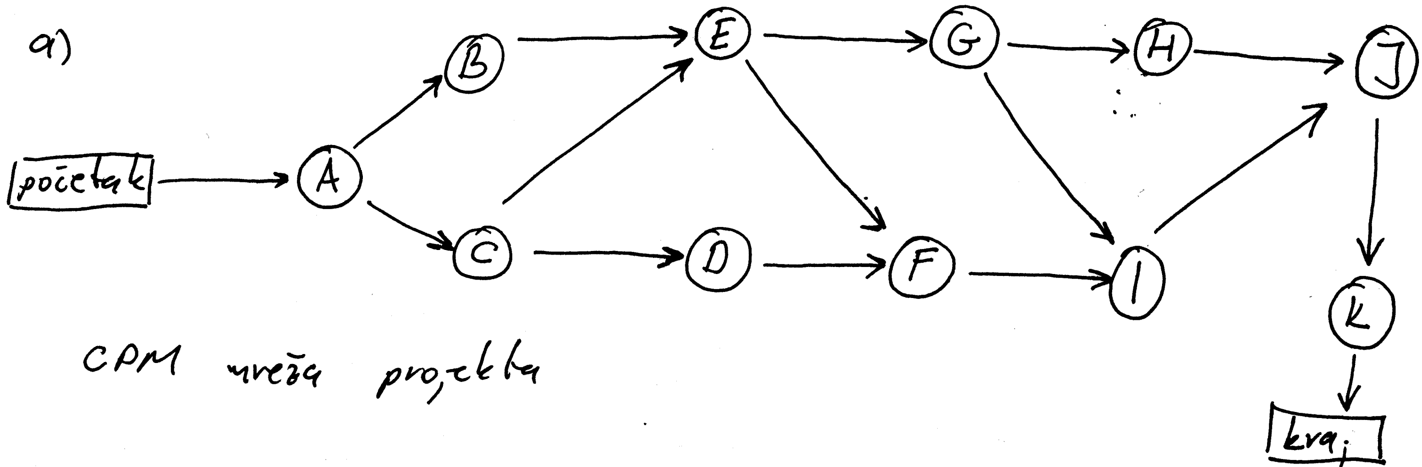
a) nacrtati CPM mrežu ovog projekta

b) pronaći kritičan put i objasniti šta za projekat predstavlja kritičan put

c) pronaći početno i završno najranije i najkasnije vrijeme i vremenske rezerve za svaku od aktivnosti.

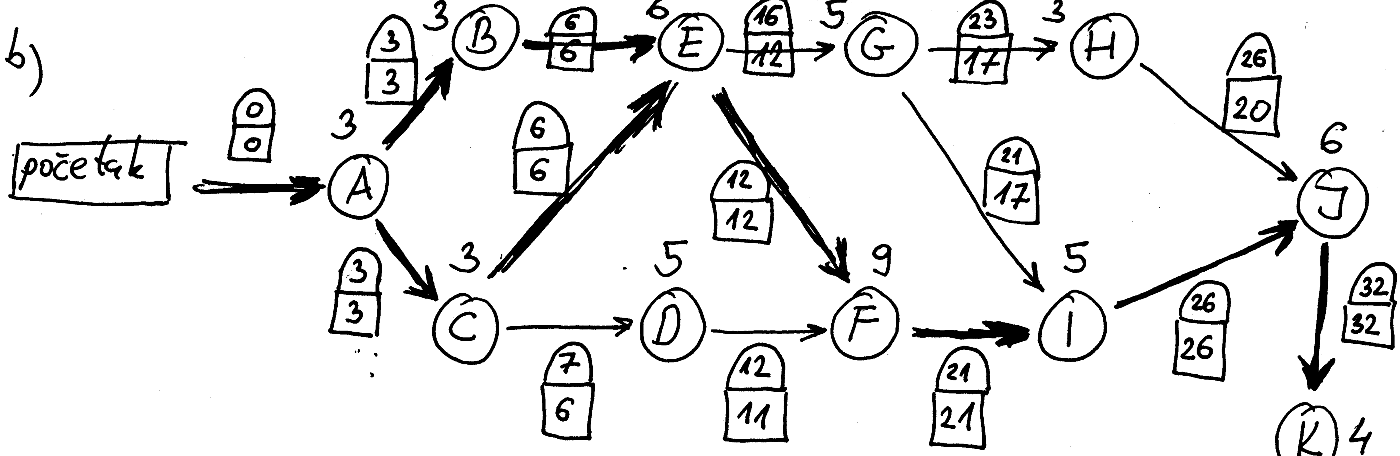
d) naći vrijeme završetka projekta

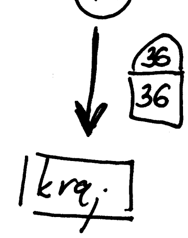
Rj. a)



CPM mreža projekta

b)





Postoje dva kritična puta

A – B – E – F – I – J – K
A – C – E – F – I – J – K

Kritičan put predstavljaju aktivnosti koje se moraju završiti u procijenjenom vremenskom roku. Ako neka od aktivnosti na kritičnom putu bude kasnila vrijeme završetka projekta će kasniti.

c)

aktivnost	najranije početno vrijeme	u najranije završno vrijeme	najkasnije početno vrijeme	v najkasnije završno vrijeme	vremenske rezerve (v–u)
A	0	3	0	3	0
B	3	6	3	6	0
C	3	6	3	6	0
D	6	11	7	12	1
E	6	12	6	12	0
F	12	21	12	21	0
G	12	17	16	21	4
H	17	20	23	26	6
I	21	26	21	26	0
J	26	32	26	32	0
K	32	36	32	36	0

d) Projekat će se završiti za 36 sedmica.