Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Matematika i informatika
26.06.2010.

Pismeni ispit iz predmeta **Operaciona istraživanja**

Zadatak br. 1

Bager d.d. treba da otvori četiri nova radna mjesta. Raspisan je konkurs. U uži izbor je ušlo pet kandidata. Izvršena je provjera brzine rada za obavljanje poslova. Brzina rada (u satima) je data u tabeli.

Kako rasporediti radnike na radna mjesta, pa da ukupno vrijeme izvršenja poslova bude minimalno? Koji radnik neće biti primljen? Kolko je najkraće vrijeme za koje radnici mogu obaviti poslove?

radnici \ posao	P1	P2	P3	P4
R1	2	19	10	4
R2	6	21	1	3
R3	31	12	11	8
R4	12	19	17	9
R5	7	14	8	13

Zadatak br. 2

Proizvodnom procesu kreiranja hemiske olovke karakterišu tri različite vrste poslova, koji se istovremeno obavljaju na mašinama M1 i M2. Potrebno vrijeme koje mašine zahtijevaju (u satima) prikazano u tabeli.

posao \ mašine	M1	M2
P1	-1	2
P2	1	-1
P3	4	1

Na spomenutim poslovima mašine M1 i M2 ne smiju raditi, redom, duže od 4, 1 i 12 sati. Količina hemiski olovki koje se proizvedu (u jednom satu) je 5 na mašini M1 i 1 na mašini M2. Odrediti koliko sati trebaju biti uključene mašine M1 i M2 da bi se ostvario maksimalan broj potpuno završenih hemiski olovki. Problem riješiti metodom grananja i ograničavanja.

Zadatak br. 3

Igra je definisana na sljedeći način: Dva igrača A i B, nezavisno jedan od drugog, istovremeno dižu prste u zrak i to igrač A može da digne 1, 2, 3, 4, ili 5 prstiju dok igrač B može da digne 1 ili 2 prsta. Dobit igrača A u odnosu na igrača B u zavisnosti od broja ispruženih prstiju je prikazano u tabeli.

Odrediti optimalne strategije igrača, vrijednost igre i dati grafičku interpretaciju igre.

igrač A \ igrač B	B1	B2
A1	1	-1
A2	0	1
A3	-1	0
A4	2	-3
A5	1	2

Zadatak br. 4

Aktivnost	Zavisi od	Normalno vrijeme	Usiljeno vrijeme	Normalni trošak	Usiljeni Trošak
A	-	3	2	54 000	60 000
B	A	4	3	62 000	65 000
C	A	5	2	66 000	70 000
D	B	3	1	40 000	43 000
E	B,C	4	2	75 000	80 000

Kompanija GHC d.d. treba da započne konstrukciju velike nove kuće. Predsjednica kompanije, Eda Meh, trenutno planira raspored aktivnosti za ovaj projekat. Eda je ustanovila pet glavnih aktivnosti (koje je označila sa A, B, ..., E) koje se moraju izvršiti i njihovu međusobnu zavisnost. Ona je, također, prikupila podatke za normalno i usiljeno vrijeme svake od aktivnosti. Svi podaci su prikazani u tabeli (vrijeme je dato u sedmicama).

a) nacrtati mrežu projekta

b) pronaći najranije i najkasnije početno i završno vrijeme i vremenske rezerve za svaku od aktivnosti

c) naći kritičan put

d) naći vrijeme završetka projekta i odgovarajući trošak

e) ako projekat želimo završiti unutar 10 sedmica, pronaći najbolje usiljeno vrijeme i trošak projekta. Kolki je najmanji trošak projekta ako ga želimo završiti unutar 11 sedmica?

(Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(#) Bayer d.d. treba da otvori četri nova radna mjesta. Raspisan je konkurs. U uži izbor je ušlo pet kadidata. Izvršena je provjera brzine rada za obavljanje poslova. Brzina rada (u satima) je data u sljedećoj tabeli:

Radnici \ poslovi	P_1	P_2	P_3	P_4
R_1	2	19	10	4
R_2	6	21	1	3
R_3	31	12	11	8
R_4	12	19	17	9
R_5	7	14	8	13

Kako rasporediti radnike na radna mjesta, pa da ukupno izvršenje poslova bude minimalno? Koji radnik neće biti primljen? Kolko je najkraće vrijeme za koje radnici mogu obaviti poslove?

R: Matematički model ovog problema je

$$\min Z = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{5} c_{ij} x_{ij}$$

pri ograničenjima
$$\sum_{i=1}^{5} x_{ij} = 1, \quad j=\overline{1,4}$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} \leq 1, \quad i=\overline{1,5}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } i\text{-ti radnik raspoređen na } j\text{-to mjesto} \\ 0, & \text{u suprotnom} \end{cases}$$

Ovo je otvoreni problem raspoređivanja, te da bi se mogao primjeniti algoritam raspoređivanja, potrebno ga je svesti na zatvoreni problem, dodajemo fiktivan posao P_5 s vremenom obrade $c_{i5}=0$, $i=\overline{1,5}$.

Poslije dodavanja dobijamo sljedeću kadratnu matricu:

$$\begin{bmatrix} 2 & 19 & 10 & 4 & 0 \\ 6 & 21 & 1 & 3 & 0 \\ 31 & 12 & 11 & 8 & 0 \\ 12 & 19 & 17 & 9 & 0 \\ 7 & 14 & 8 & 13 & 0 \end{bmatrix}$$

Od svih elemenata kolone oduzima se najmanji element kolone.

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ * \\ * \end{array}\begin{bmatrix} \boxed{0} & 7 & 9 & 1 & \cancel{0} \\ 4 & 9 & \boxed{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 29 & \boxed{0} & 10 & 5 & \cancel{0} \\ 10 & 7 & 16 & 6 & \boxed{0} \\ 5 & 2 & 7 & 10 & \cancel{0} \end{bmatrix}$$

U svakom redu postoji bar jedna nula.

Razvrstavamo nule na nezavisne i zavisne

Rješenje nije optimalno (imamo 4 nezavisne nule)

a) označimo redove (*) bez nezavisnih nula
b) precrtamo sve kolone koje imaju zavisnu nulu u označenim redovima
c) označimo redove (*) koje imaju nezavisnu nulu u označenoj koloni
d) precrtati kolone koje imaju zavisnu nulu u novom označenom redu
c) i d) ponavljamo
e) precrtamo redove koji nisu označeni po postupcima a) i c)
f) pronađemo najmanji neprecrtani element
g) najmanji element pod f) dodamo elementima koji se nalaze na presjeku precrtanih kolona i redova
h) vrijednost najmanjeg elementa oduzimamo od svih neprecrtanih elemenata
i) svi ostali precrtani elementi se ne mijenjaju
j) razvrstavamo nule na zavisne i nezavisne

$$\begin{array}{c} \\ \\ * \\ * \\ * \end{array}\begin{bmatrix} \boxed{0} & 7 & 9 & 1 & 2 \\ 4 & 9 & \boxed{0} & \cancel{0} & 2 \\ 29 & \boxed{0} & 10 & 5 & 2 \\ 8 & 5 & 14 & 4 & \boxed{0} \\ 3 & \cancel{0} & 5 & 8 & \cancel{0} \end{bmatrix}$$

Razvrstavamo na zavisne i nezavisne.
Nije optimalno
a)-e)
Najmanji neprecrtani element je 3
g)-h)-i)

$$\begin{array}{c} * \\ \\ * \\ * \\ * \end{array}\begin{bmatrix} \boxed{0} & 10 & 9 & 1 & 5 \\ 4 & 12 & \boxed{0} & \cancel{0} & 5 \\ 26 & \boxed{0} & 7 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 11 & 1 & \boxed{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & 2 & 5 & \cancel{0} \end{bmatrix}$$

Razvrstavamo na zavisne i nezavisne
Nije optimalno
a)-e)
Najmanji neprecrtani element je 1
g)-h)-i)

$$\begin{bmatrix} \boxed{0} & 10 & 8 & \cancel{0} & 5 \\ 5 & 13 & \boxed{0} & \cancel{0} & 6 \\ 26 & \boxed{0} & 6 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 10 & \boxed{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & 1 & 4 & \boxed{0} \end{bmatrix}$$

Razvrstavamo nule na zavisne i nezavisne.

Rješenje je optimalno

Radnik R_1 će obavljati posao P_1

Radnik R_2 ——— // ——— P_3

Radnik R_3 ——— // ——— P_2

Radnik R_4 ——— // ——— P_4

Radnik R_5 neće biti primljen.

$$\min z = 2 + 12 + 1 + 9 = 24 \text{ sata}$$

Najkraće vrijeme za koje ovi radnici mogu obaviti ove poslove je 24 sata.

(#) Proizvodnom procesu kreiranja hemiske olovke karakteriše tri različite vrste poslova, koji se istovremeno obavljaju na mašinama M_1 i M_2. Potrebno vrijeme koje mašine zahtjevaju (u satima) prikazano je na sljedećoj tabeli

	M_1	M_2
P_1	-1	2
P_2	1	-1
P_3	4	1

Na spomenutim poslovima mašine M_1 i M_2 ne smiju raditi, redom, duže od 4, 1 i 12 sati. Količina hemiski olovki koje se proizvedu (u jednom satu) je 5 na mašini M_1 i 1 na mašini M_2. Odrediti koliko sati trebaju biti uključene mašine M_1 i M_2 da bi se ostvario maksimalan broj potpuno završenih hemiski olovki. Problem riješiti metodom grananja i ograničavanja.

Rj.

$$\max \ z = 5x_1 + x_2$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1 - x_2 \leq 1$$
$$4x_1 + x_2 \leq 12$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$

Zanemarimo ograničenja $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$, uvedimo dopunske promjenjive u_1, u_2 i u_3 i riješimo problem simpleks metodom

$$\begin{array}{rrrrr|r}
-1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
\boxed{1} & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 12 \\
\hline
-5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\uparrow & & & & &
\end{array} \leftarrow$$

$\min\{1, \frac{12}{4}\} = 1$

$I_v + II_v$

$III_v + II_v \cdot (-4)$

$4-4 \quad 0-4$

$1+4 \quad 1-0$

$0+0 \quad 12-4$

$IV_v + II_v \cdot 5$

$-5+5$

$-1-5$

$0+0$

$0+5$

$0+0$

$0+5$

0	1	1	1	0	5
1	−1	0	1	0	1
0	$\boxed{5}$	0	−4	1	8 ←
0	−6	0	5	0	5
	↑				

$\min\{5, \frac{8}{5}\} = \frac{8}{5}$

$I_V - III_V$ (stari) (novi): $0-0$, $1-1$, $1-0$, $1+\frac{4}{5}$, $0-\frac{1}{5}$, $5-\frac{8}{5}$

$II_V + III_V$ (stari) (novo): $1+0$, $-1+1$, $0+0$, $1-\frac{4}{5}$, $0+\frac{1}{5}$, $1+\frac{8}{5}$

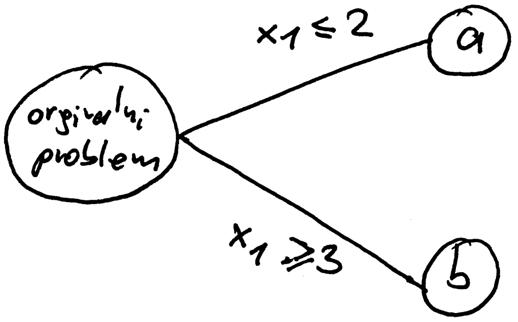
x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	
0	0	1	$\frac{9}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{17}{5}$
1	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{13}{5}$
0	1	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$
0	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{73}{5}$

$IV_V + III_V \cdot 6$ (stari) (novi): $0+0$, $-6+6$, $0+0$, $5-\frac{24}{5}$, $0+\frac{8}{5}$, $5+\frac{48}{5}$

25
48

$x_1 = \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$ $x_2 = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$ $\max Z = \frac{73}{5} = 14\frac{3}{5}$

Kako je $2 < x_1 < 3$ metod grananja i ograničavanja pravi dva nova cjelobrojna problema



a) imamo orginalni problem plus novo ograničenje $x_1 \leq 2$. Zanemarimo ograničenja $x_1, x_2 \in N$ uvedimo dopunske promenljive i rješimo novonastali problem simpleks metodom.

$$
\begin{array}{rrrrrr|r}
-1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
\boxed{1} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 12 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
-5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\uparrow & & & & & &
\end{array}
\leftarrow
$$

$\min\left\{1, \frac{12}{4}, 2\right\} = 1$

$I_v + II_v$ $\quad$ $III_v + II_v \cdot (-4)$

$IV_v - II_v$

$4-4 \quad 1+0$

$1+4 \quad 0+0$

$0+0 \quad 12-4$

$0-4$

$$
\begin{array}{rrrrrr|r}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 5 & 0 & -4 & 1 & 0 & 8 \\
0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
0 & -6 & 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \\
 & \uparrow & & & & &
\end{array}
\leftarrow
$$

$\min\left\{5, \frac{8}{5}, 1\right\}$

$V_v + II_v \cdot 5$

$-5+5 \quad 0+0$

$-1-5 \quad 0+0$

$0+0 \quad 0+5$

$0+5$

$I_v - IV_v$

$II_v + IV_v$

$III_v + IV_v \cdot (-5)$

$0+0$

$5-5 \quad 1+0$

$0+0 \quad 0-5$

$-4+5 \quad 8-5$

$V_v + IV_v \cdot 6$

$0+0$

$-6+6 \quad 0+0$

$0+0 \quad 0+6$

$5-6 \quad 5+6$

$$
\begin{array}{rrrrrr|r}
0 & 0 & 1 & \boxed{2} & 0 & -1 & 4 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -5 & 3 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 6 & 11 \\
 & & & \uparrow & & &
\end{array}
\leftarrow
$$

$\min\left\{\frac{4}{2}, 3\right\} = 2$

$III_v - I_v$ (novi) (stari)

$1-1$

$1-0$

$-5+\frac{1}{2}$

$3-2$

$IV_v + I_v$

$0+0 \quad 0+0$

$1+0 \quad 1-\frac{1}{2}$

$0+\frac{1}{2} \quad 1+2$

$-1+1$

$V_v + I_v$

$0+0 \quad -1+1$

$0+0 \quad 0+0$

$0+\frac{1}{2} \quad 6-\frac{1}{2}$

$11+2$

$$
\begin{array}{rrrrrr|r}
0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{9}{2} & 1 \\
0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 3 \\
\hline
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{11}{2} & 13
\end{array}
$$

$x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $z = 13$

Rješenje su cijeli brojevi pa imamo rješenje za prvu granu.

b) Imamo orginalni problem plus ograničenje $x_1 \geq 3$ tj:

$$
\begin{aligned}
\max z &= 5x_1 + x_2 \\
-x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\
x_1 - x_2 &\leq 1 \\
4x_1 + x_2 &\leq 12 \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\
x_1 &\geq 3
\end{aligned}
$$

Zanemarimo ograničenje $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$, uvedimo dopunske i artificijalne varijable i riješimo problem

$$\max\ Z = 5x_1 + x_2 - Mw_1$$

$$\begin{aligned}
-x_1 + 2x_2 + u_1 &= 4\\
x_1 - x_2 + u_2 &= 1\\
4x_1 + x_2 + u_3 &= 12\\
x_1 - v_1 + w_1 &= 3
\end{aligned}$$

M je neki veliki broj

-1	2	1	0	0	0	0	4
$\boxed{1}$	-1	0	1	0	0	0	1 ←
4	1	0	0	1	0	0	12
1	0	0	0	0	-1	1	3
-M-5	-1	0	0	0	M	0	-3M
↑							

$\min\{1, \frac{12}{4}, 3\} = 1$

$I_v + II_v$ $\quad III_v + II_v(-4)$

4-4 $\quad$ 1+0
1+4 $\quad$ 0+0
0+0 $\quad$ 0+0
0-4 $\quad$ 12-4

$IV_v - II_v$ $\quad V_v + II_v(M+5)$

-M-5+M+5 $\quad$ M+0
-1-M-5 $\quad$ 0+0
0+0 $\quad$ -M+M+5
0+M+5
0+0

0	1	1	1	0	0	0	5
1	-1	0	1	0	0	0	1
0	$\boxed{5}$	0	-4	1	0	0	8 ←
0	1	0	-1	0	-1	1	2
0	-M-6	0	M+5	0	M	0	5-2M
	↑						

$\min\{5, \frac{8}{5}, 2\} = \frac{8}{5}$

$I_v - III_v$ (stara) (nova) $\quad II_v + III_v$ (stara) (nova)

0-0 $\quad$ $0-\frac{1}{5}$ $\quad$ 1+0 $\quad$ $0+\frac{1}{5}$
1-1 $\quad$ 0-0 $\quad$ -1+1 $\quad$ 0+0
1-0 $\quad$ 0-0 $\quad$ 0+0 $\quad$ 0+0
$1+\frac{4}{5}$ $\quad$ $5-\frac{8}{5}$ $\quad$ $1-\frac{4}{5}$ $\quad$ $1+\frac{8}{5}$

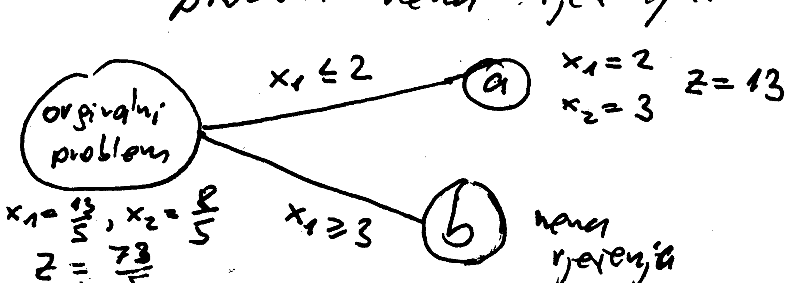
$IV_v - III_v$ (stara) (nova) $\quad V_v + III_v(M+6)$ (stara) (nova)

0-0 $\quad$ $0-\frac{1}{5}$ $\quad$ 0+0
1-1 $\quad$ -1-0 $\quad$ -M-6+M+6
0-0 $\quad$ 1-0 $\quad$ 0+0
$-1+\frac{4}{5}$ $\quad$ $2-\frac{8}{5}$ $\quad$ $M+5-\frac{4}{5}M-\frac{24}{5}$
$0+\frac{1}{5}(M+6)$
M+0
0+0
$5-2M+\frac{8}{5}M+\frac{48}{5}$

x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	v_1	w_1	
0	0	1	$\frac{9}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{17}{5}$
1	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{13}{5}$
0	1	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{8}{5}$
0	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	-1	1	$\frac{2}{5}$
0	0	0	$\frac{1}{5}M+\frac{1}{5}$	$\frac{M}{5}+\frac{6}{5}$	M	0	$\frac{73}{5}-\frac{2}{5}M$

$x_1 = \frac{13}{5}$, $x_2 = \frac{8}{5}$, $w_1 = \frac{2}{5}$

problem nema rješenja.



Mašine M_1 i M_2 maksimalno mogu biti uključene redom 2 i 3 sata i broj hemikalija koji će se proizvesti je 13.

(#) Igra je definisana na sljedeći način: Dva igrača A i B, nezavisno jedan od drugog, istovremeno dižu prste u zrak i to igrač A može da digne 1, 2, 3, 4 ili 5 prstiju dok igrač B može da digne 1 ili 2 prsta. Dobit igrača A u odnosu na igrača B u zavisnosti od broja ispruženih prstiju je prikazano u sljedećoj tabeli.

igrač A \ igrač B	B_1	B_2
A_1	1	−1
A_2	0	1
A_3	−1	0
A_4	2	−3
A_5	1	2

A_i – i predstavlja broj pruženih prstiju (igrača A)

B_i – i broj pruženih prstiju (igrač B)

Odrediti optimalne strategije igrača, vrijednost igre i dati grafičku interpretaciju matrične igre.

Rj.

q_1 q_2

A \ B	B_1	B_2	igrač A minimalno može da dobije
A_1	1	−1	−1
A_2	0	1	0
A_3	−1	0	0
A_4	2	−3	−3
A_5	1	2	1
igrač B maksimalno može da izgubi	2	2	

α – donja vrijednost igre

$$\alpha = \max_i \min_j (a_{ij}) = 0$$

β – gornja vrijednost igre

$$\beta = \min_j \max_i (a_{ij}) = 2$$

Matrična igra nema sedlo, rješenje igre je u domenu čistih strategija

Vrijednost igre je u granicama $0 < v < 2$

Definišimo očekivane gubitke igrača B

$$C(A_1, Q) = q_1 - q_2$$
$$C(A_2, Q) = q_2$$
$$C(A_3, Q) = -q_1$$
$$C(A_4, Q) = 2q_1 - 3q_2$$
$$C(A_5, Q) = q_1 + 2q_2$$

Kako je $q_1 + q_2 = 1$ ovaj sistem se svodi na sljedeće jednačine

$$q_2 = 1 - q_1$$

$$C(A_1,Q) = q_1 - (1-q_1) = 2q_1 - 1$$

$$C(A_2,Q) = 1 - q_1$$

$$C(A_3,Q) = -q_1$$

$$C(A_4,Q) = 2q_1 - 3(1-q_1) = 5q_1 - 3$$

$$C(A_5,Q) = q_1 + 2(1-q_1) = -q_1 + 2$$

$$C(A_1,Q) = 2q_1 - 1$$

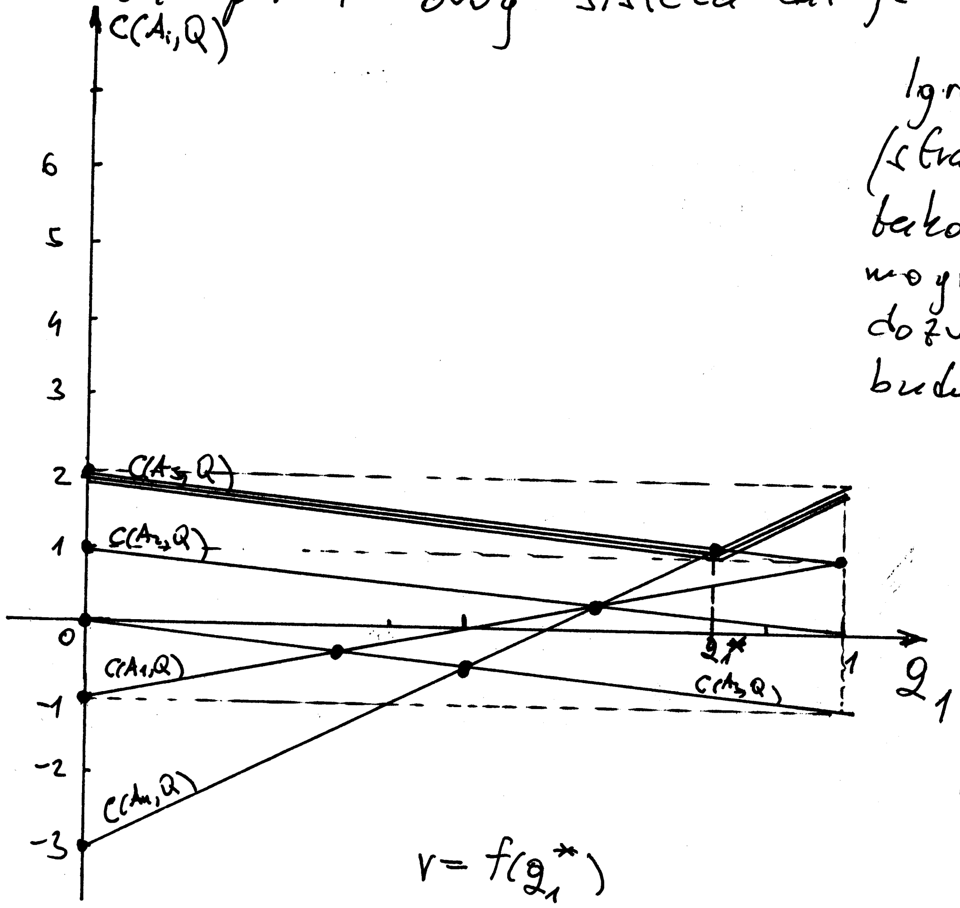
$$C(A_2,Q) = 1 - q_1$$

$$C(A_3,Q) = -q_1$$

$$C(A_4,Q) = 5q_1 - 3$$

$$C(A_5,Q) = -q_1 + 2$$

Grafički prikaz ovog sistema dat je na sljedećoj slici:



Igrač B nastojaće da odabere (strategiju) vjerovatnoću q_1 tako da minimizira maksimalne moguće gubitke tj. da ne dozvoli da njegovi gubici budu veći od vrijednosti igre.

Optimalna vrijednost q_1^* određuje se na osnovu izraza $f(q_1^*) = \min_{q_1} \{f(q_1)\}$

gdje je $f(q_1) = \max\{2q_1 - 1,\ 1 - q_1,\ -q_1,\ 5q_1 - 3,\ -q_1 + 2\}$

$$v = f(q_1^*)$$

$$C(A_5,Q) = -q_1 + 2$$

$$C(A_4,Q) = 5q_1 - 3$$

$$-q_1 + 2 = 5q_1 - 3$$

$$6q_1 = 5$$

$$q_1 = \frac{5}{6} \Rightarrow q_2 = \frac{1}{6}$$

$$v = -\frac{5}{6} + 2 = \frac{12-5}{6} = \frac{7}{6}$$

$$v = \frac{7}{6}$$

Polazeći od ovoga mogu se izračunati očekivani gubici

$$C(A_1, Q) = 2 \cdot \frac{5}{6} - 1 = \frac{10-6}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$C(A_2, Q) = 1 - q_1 = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

$$C(A_3, Q) = -q_1 = -\frac{5}{6}$$

$$C(A_4, Q) = 5q_1 - 3 = 5 \cdot \frac{5}{6} - 3 = \frac{25-18}{6} = \frac{7}{6}$$

$$C(A_5, Q) = -q_1 + 2 = 2 - \frac{5}{6} = \frac{12-5}{6} = \frac{7}{6}$$

Imajući u vidu opšti izraz za vrijednost matrične igre može se pisati da je

$$v = C(P, Q) = \sum_{i=1}^{5} C(A_i, Q)\, p_i$$

$$C(P, Q) = \frac{2}{3} p_1 + \frac{1}{6} p_2 - \frac{5}{6} p_3 + \frac{7}{6} p_4 + \frac{7}{6} p_5$$

pa kako je $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$ $\quad (p_5 = 1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4)$

$$\Rightarrow \quad C(P,Q) = \frac{2}{3} p_1 + \frac{1}{6} p_2 - \frac{5}{6} p_3 + \frac{7}{6} p_4 + \frac{7}{6}(1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4) =$$

$$= \frac{4-7}{6} p_1 + \frac{1-7}{6} p_2 - \frac{12}{6} p_3 + 0 p_4 + \frac{7}{6}$$

$$= -\frac{1}{2} p_1 - 1 \cdot p_2 - 2 p_3 + \frac{7}{6}$$

Igrač A će nastojati da odabere vektor mješovite strategije tako da njegov dobitak u igri bude što veći (da ne bude manji od vrijednosti igre) tj. $p_1 = p_2 = p_3 = 0$

$$p_3 + p_4 = 1$$

$$C(P, Q) = \frac{7}{6} p_4 + \frac{7}{6} p_5$$

$$v = \frac{7}{6}$$

Za igrača A igra se svodi na matricu cijena

	A \ B	B_1	B_2
p_4	A_4	2	-3
p_5	A_5	1	2

Odredimo očekivane dobitke igrača A

$$\left.\begin{aligned} C(P, B_1) &= 2p_4 + p_5 \\ C(P, B_2) &= -3p_4 + 2p_5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 2p_4 + p_5 &= -3p_4 + 2p_5 \\ 5p_4 &= p_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5p_4 &= p_5 \\ p_4 + p_5 &= 1 \end{aligned} \implies p_4 + 5p_4 = 1 \implies p_4 = \frac{1}{6} \implies p_5 = \frac{5}{6}$$

Optimalne strategije igrača su $P = (0, 0, 0, \frac{1}{6}, \frac{5}{6})$ i $Q = (\frac{5}{6}, \frac{1}{6})$. Vrijednost igre je $v = \frac{7}{6}$.

(#) Kompanija GHC d.d. treba da započne konstrukciju velike nove kuće. Predsjednica kompanije, Eda Meh, trenutno planira raspored aktivnosti za ovaj projekat. Eda je ustanovila pet glavnih aktivnosti (koje je označila sa A, B, ..., E) koje se moraju izvršiti i njihovu međusobnu zavisnost. Ona je, također, prikupila podatke za normalno i usiljeno vrijeme svake od aktivnosti. Svi ovi podaci su prikazani u sljedećoj tabeli:

Aktivnost	Zavisi od	Normalno vrijeme	Usiljeno vrijeme	Normalni trošak	Usiljeni trošak
A	—	3	2	54 000 KM	60 000 KM
B	A	4	3	62 000 KM	65 000 KM
C	A	5	2	66 000 KM	70 000 KM
D	B	3	1	40 000 KM	43 000 KM
E	B, C	4	2	75 000 KM	80 000 KM

Vrijeme je dato u sedmicama.

a) nacrtati mrežu projekta

b) pronaći najranije vrijeme, najkasnije vrijeme (početno i završno) i vremenske rezerve za svaku od aktivnosti

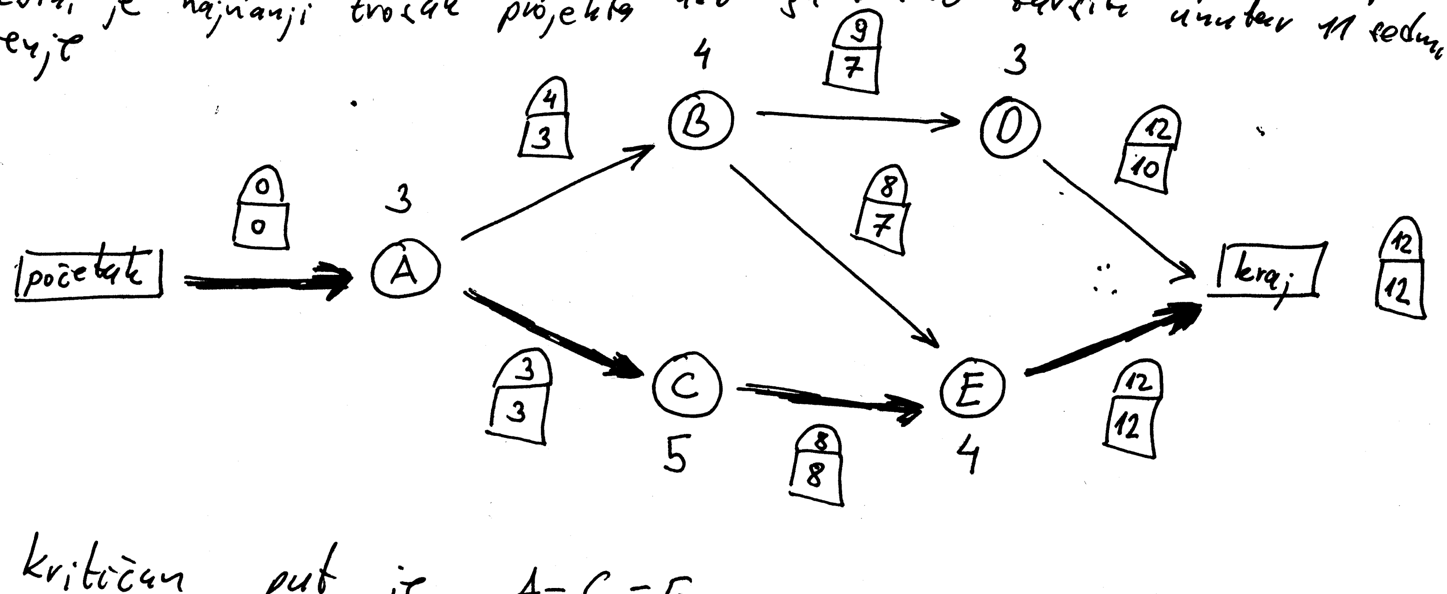
c) naći kritičan put

d) naći vrijeme završetka projekta i odgovarajući trošak

e) ako projekat želimo završiti unutar 10 sedmica, pronaći najbolje usiljeno vrijeme i trošak projekta. Kolki je najmanji trošak projekta ako ga želimo završiti unutar 11 sedmica

Rješenje

a)



c) kritičan put je A-C-E

b)

aktivnost	najranije početno vrijeme	najranije završno vrijeme	najkasnije početno vrijeme	najkasnije završno vrijeme	vremenske rezerve
A	0	3	0	3	0
B	3	7	4	8	1
C	3	8	3	8	0
D	7	10	9	12	2
E	8	12	8	12	0

vremenske rezerve = najkasnije završno vrijeme − najranije završno vrijeme

d)
vrijeme završetka projekta = 12 sedmica
trošak projekta = 54 000 + 66 000 + 75 000 + 62 000 + 40 000 = 297 000 KM

e) iz datih podataka konstruišimo sljedeću usiljenu vrijeme trošak tabelu

Aktivnost	usiljena granica	usiljeni trošak po sedmici
A	3-2=1	$\frac{60\,000-54\,000}{3-2} = 6\,000$ KM
B	4-3=1	3 000 KM
C	5-2=3	$\frac{4\,000}{3}$ KM $\approx$ 1 333,33 KM
D	3-1=2	1 500 KM
E	4-2=2	2 500 KM

Sa računa kritičnog puta imamo sljedeće informacije

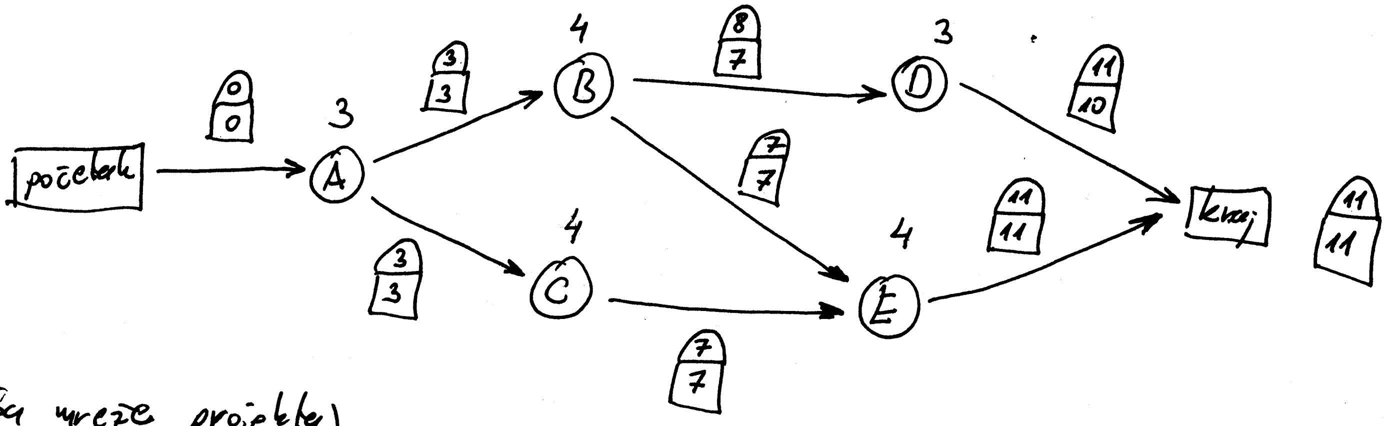
Aktivnost	A	B	C	D	E
Na kritičnom putu	DA	—	DA	—	DA
Vremenske rezerve	—	1	—	2	—

S obzirom da kritična aktivnost C ima najmanji trošak po danu, ona postaje prvi kandidat za ubrzanje projekta. Dužina za koju aktivnost C možemo smanjiti se traži na sljedeći način:

redukovano vrijeme = min{ušiljeno vrijeme, vremenska rezerva}

$= \min\{3, 1\} = 1$

Prema tome aktivnost C možemo ubrzati 1 sedmicu



(Sa mreže projekta)
Imamo sljedeće informacije

Postoje dva kritična puta A-C-E (stari)
A-B-E (novi)

Vrijeme završetka projekta = 11 sedmica

Trošak projekta $= 297\,000 + \frac{4\,000}{3} = 298333\frac{1}{3} \approx 298333{,}33$ KM

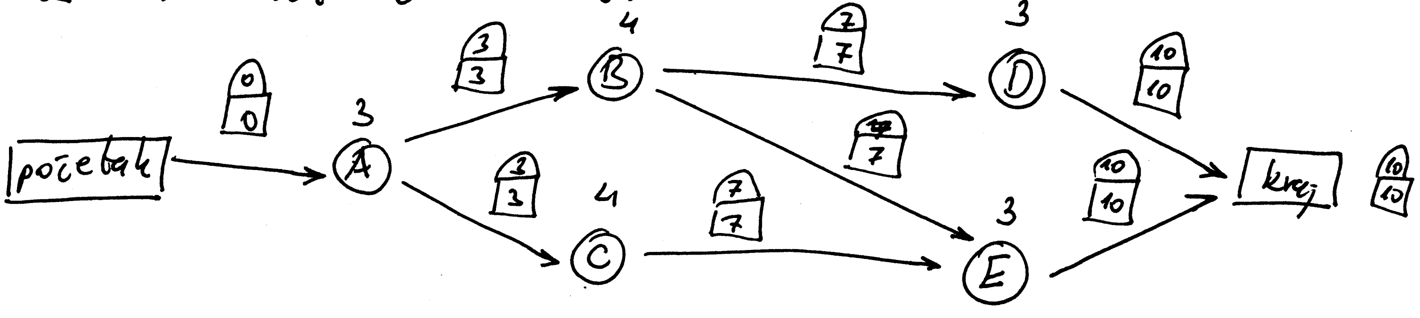
Aktivnost	A	B	C	D	E
Na kritičnom putu	DA	DA	DA	—	DA
Vremenske rezerve	—	—	—	1	—

S obzirom da je ušiljena granica za aktivnost C dostignuta, razmatramo kritičnu aktivnost E koji je sljedeći najmanji "ušiljeni trošak po sedmici". Dužina za E može biti redukovana:

redukovano vrijeme = min{ušiljeno vrijeme, najmanja vremenska rezerva} =

$= \min\{2, 1\} = 1$

Aktivnost E možemo ubrzati 1 sedmicu.



Sa mreže projekta čitamo sljedeće informacije:

Postoje tri kritična puta A-C-E

A-B-E

A-B-D

Sve aktivnosti projekta su na kritičnom putu

Projekat će se završiti unutar 10 sedmica.

Trošak projekta = 298 333,33 + 2 500 = 300 833,33 KM