Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Matematika i informatika
10.07.2010.

Pismeni ispit iz predmeta **Operaciona istraživanja**

Zadatak br. 1

Jedna vrsta eksplozivnog plina treba prevesti željeznicom. Plin treba putovati iz mjesta M1, M2 i M3 u odredišta O1, O2, O3 i 04. Iz mjesta M1 do odredišta prevoz traje redom 3, 15, 6 i 4 sata. Da bi iz M2 plin došao do spomenutih odredišta trebapo 10, 8, 10 i 5 sati. Konačno prevoz iz M3 traju 4, 3, 6 i 10 sati. Treba napraviti takav plan da je što je moguće manje plina na najdužem putu. U mjestima M1, M2 i M3 je na raspolaganju redom 55, 80 i 40 tona plina dok odredišta O1, O2, O3 i 04 mogu primiti najviše redom 55, 55, 90 i 20 tona.

Zadatak br. 2

Potrebno je obraditi dvije vrste proizvoda. Obrada proizvoda prolazi kroz različite faze u tri smjene. U prvoj smjeni vrijeme za obradu prvog proizvoda je 5 sati, da drugog proizvoda 2 sata. Radno vrijeme prve smjene je 16 sati. U drugoj smjeni vrijeme za obradu prvog proizvoda je 2 sata a drugog proizvoda je -1 sat. Radno vrijeme druge smjene je 4 sata. U trećoj smjeni vrijeme za obradu prvog proizvoda je -1 sat a drugog proizvoda je 2 sata. Radno vrijeme treće smjene je 4 sata. Dobit ostvaren obradom prvog proizvoda je 220 novčanih jedinica, dok je dobit ostvarena obradom drugog proizvoda 80 novčanih jedinica. Formirati matematički model problema pod uslovom da želimo ostvariti maksimalnu dobit. Problem riješiti metodom odsječaka.

Zadatak br. 3

Igra je definisana na sljedeći način: Igrač A ima dvije karte na kojima su oznake A1 i A2, dok igrač B ima pet karti na kojima su oznake B1, B2, B3, B4 i B5. Oba igrača nezaviso jedan od drugog, istovremeno biraju po jednu kartu i pokazuju drugom igraču. Dobit igrača A u odnosu na igrača B u zavisnositi od kombinacije pokazanih karti je prikazano u tabeli.

A \ B	B1	B2	B3	B4	B5
A1	2	4	0	3	5
A2	6	3	8	4	2

Dati grafički interpretaciju matrične igre, odrediti optimalne strategije igrača i pronaći vrijednost igre.

Zadatak br. 4

Mia Fredlund je predsjednica istraživačkog odjeljenja za kompaniju Zdravlja d. d., jedna od najjače farmaceutske kompanije u BiH. Njezin najvažniji projekat koji dolazi je razvijanje novog lijeka koji će se suprotstaviti AIDS-u. Ona je prepoznala 10 grupa u svom odjeljenju koji trebaju da sprovedu različite faze istraživanja i razvoja ovog projekta. Pozivajući se na posao koji treba obaviti, Mia je procijenila vremena za aktivnosti (A, B, ..., J) i njihovu međusobnu zavisnost. Što je prikazano u tabeli.

a) nacrtati PERT mrežu za ovaj projekat

b) pronaći kritičan put

c) odrediti očekivano vrijeme završetka i varijansu projekta

d) izračunati kolika je vjerovatnoća da se projekat završi unutar dvije godine (104 sedmice).

		trajanje (u sedmicama)		
Aktivnost	Zavisi od	Optimističko vrijeme (o)	Najvjerovatnije vrijeme (n)	Pesimističko vrijeme (p)
A	-	7	16	28
B	A	4	19	25
C	A	10	16	37
D	B	7	13	37
E	B, C	13	19	33
F	B	19	22	33
G	D, E	4	7	19
H	F, G	13	19	49
I	B, C	13	25	37
J	I, H	7	13	19

(Zadaci su skinuti sa stranice: \pf.unze.ba\nabokov
Za uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(#) Jednu vrstu eksplozivnog plina treba prevesti željeznicom. Plin treba putovati iz mjesta M_1, M_2 i M_3 u odredišta O_1, O_2, O_3 i O_4. Iz mjesta M_1 do odredišta prevoz traje redom 3, 15, 6 i 4 sata. Da bi iz M_2 plin došao do spomenutih odredišta treba po 10, 8, 10 i 5 sati. Konačno prevoz iz M_3 traju 4, 3, 6 i 10 sati. Treba napraviti takav plan da je što je moguće manje plina na najdužem putu. U mjestima M_1, M_2 i M_3 je na raspolaganju redom 55, 80 i 40 tona plina dok odredišta O_1, O_2, O_3 i O_4 mogu primiti najviše, redom, 55, 55, 90 i 20 tona.

Rj. Provjerimo da li je problem otvorenog ili zatvorenog tipa

	O_1	O_2	O_3	O_4	na raspolag.
M_1	3	15	6	4	55
M_2	10	8	10	5	80
M_3	4	3	6	10	40
mogu primiti	55	55	90	20	220 \ 175

Problem je otvorenog tipa. Uvodimo fiktivno mjesto M_4 koje ima na raspolaganju $220-175=45$ tona plina i čije je vrijeme dostave u odredišta 0 sati.

Početno bazično rješenje napravimo dijagonalnom metodom.

3 / 55	15 / ε	6	4	$55+\varepsilon$
10	8 / $55-\varepsilon$	10 / $25+2\varepsilon$	5	$80+\varepsilon$
4	3	6 / $40+\varepsilon$	10	$40+\varepsilon$
0	0	0 / $25-3\varepsilon$	0 / $20+4\varepsilon$	$45+\varepsilon$
55	55	90	$20+4\varepsilon$	

Bazični problem u prethodnoj tablici ima 6 varijabli različitih od nule. Međutim prema $m+n-1=7$, treba imati 7 varijabli različitih o nule.

Uvodimo proizvoljno malu veličinu ε.

Napravimo transformaciju prema formuli

$$h_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{za } c_{ij} < t_{max} \\ 1, & \text{za } c_{ij} = t_{max} \\ M, & \text{za } c_{ij} > t_{max} \end{cases}.$$

gdje je u našem slučaju $t_{max} = 15$

					α_i
0 / 55	1 / ε	0 / -1	0 / -1	$55+\varepsilon$	0
0 / 1	0 / $55-\varepsilon$	0 / $25+2\varepsilon$	0 / 0	$80+\varepsilon$	-1
0 / 1	0 / 0	0 / $40+\varepsilon$	0 / 0	$40+\varepsilon$	-1
0 / 1	0 / 0	0 / $25-3\varepsilon$	0 / $20+4\varepsilon$	$45+\varepsilon$	-1
55	55	90	$20+4\varepsilon$		
β_j: 0	1	1	1		

Računamo karakteristike nebazičnih polja uz pomoć formule $k_{ij} = c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j)$.

Tabela ima negativne vrijednosti $\Rightarrow$ plan nije optimalan. Polje (1,4) ima manje vrijeme od polja (1,3) te želimo da polje (1,4) bude bazično

				α_i
0 / 55	M / M+1	0 / 0	0 / ε	0
1 / 0	0 / 55	1 / 25+ε	0 / −1	1
0 / 0	0 / 1	0 / 40+ε	1 / 1	0
0 / 0	0 / 1	0 / 25−2ε	0 / 20+3ε	0
β_j: 0	−1	0	0	

$t_{max} = 10$

računamo karakteristike nebazičnih polja

Plan nije optimalan.

				α_i
0 / 55	M / M	0 / −1	0 / ε	0
1 / 1	0 / 55	1 / 5−2ε	0 / 20+3ε	0
0 / 1	0 / 1	0 / 40+ε	1 / 2	−1
0 / 1	0 / 1	0 / 45+ε	0 / 1	−1
β_j: 0	0	1	0	

$t_{max} = 10$

računamo karakteristike nebazičnih polja

Plan nije optimalan

				α_i
0 / 55	M / M+1	0 / ε	0 / 1	0
1 / 0	0 / 55	1 / 5−3ε	0 / 20+4ε	1
0 / 0	0 / 1	0 / 40+ε	1 / 2	0
0 / 0	0 / 1	0 / 45+ε	0 / 1	0
β_j: 0	−1	0	−1	

$t_{max} = 10$

računamo karakteristike nebazičnih polja

Plan je optimalan

Najbolje što se može postići je da 5 tona putuje iz M_2 u O_3 10 sati. Ostali plin će putovati kraće.

(#) Potrebno je obraditi dvije vrste proizvoda. Obradu proizvoda prolaze kroz različite faze u tri smjene. U prvoj smjeni vrijeme za obradu prvog proizvoda je 5 sati, a drugog proizvoda 2 sata. Radno vrijeme prve smjene je 16 sati. U drugoj smjeni vrijeme za obradu prvog proizvoda je 2 sata a drugog proizvoda -1 sat. Radno vrijeme druge smjene je 4 sata. U trećoj smjeni vrijeme za obradu prvog proizvoda je -1 sat a drugog proizvoda 2 sata. Radno vrijeme treće smjene je 4 sata. Dobit ostvaren obradom prvog proizvoda je 220 novčanih jedinica, dok je dobit ostvaren obradom drugog proizvoda 80 novč. jedinica. Formirati matematički model problema pod uslovom da želimo ostvariti maksimalnu dobit. Problem riješiti metodom odsječaka.

Rj.

$$\max\ z = 220x_1 + 80x_2$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 16$$
$$2x_1 - x_2 \le 4$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

1 KORAK

Zanemarimo ograničenja $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ i riješimo problem simpleks metodom

5	2	1	0	0	16
$\boxed{2}$	-1	0	1	0	4 ←
-1	2	0	0	1	4
-220 ↑	-80	0	0	0	0

$\min\left\{\frac{16}{5}, \frac{4}{2}\right\} = 2$

$II_v : 2$

$I_v + II_v \cdot (-5)$

$III_v + II_v \cdot$

$IV_v + II_v \cdot 220$

0	$\boxed{9/2}$	1	-5/2	0	6 ←
1	-1/2	0	1/2	0	2
0	3/2	0	1/2	1	6
0	-180 ↑	0	110	0	440

$\min\left\{\frac{6}{\frac{9}{2}}, \frac{6}{\frac{3}{2}}\right\} = \min\left\{\frac{12}{9}, \frac{12}{3}\right\} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

$I_v \cdot \frac{2}{9}$ $\quad III_v + I_v \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$

$II_v + I_v \cdot (\frac{1}{2}$ $\quad IV_v + I_v \cdot 180$

		u_1	u_2	u_3	
0	1	$\frac{2}{9}$	$-\frac{5}{9}$	0	4/3
1	0	1/9	2/9	0	8/3
0	0	-1/3	4/3	1	4
0	0	$\frac{380}{9}$	40/9	0	$\frac{2080}{3}$

$x_1 = \frac{8}{3}$

$x_2 = \frac{4}{3}$

$z = \frac{2080}{3}$

Kako rješenje nije cjelobrojno prelazimo na drugi korak.

2 KORAK

Formiramo odsječak - novo linearno ograničenje sa kojim se proširuje simpleks tabela.

U opštem slučaju novo ograničenje se formira na sljedeći način. Ako se uvedu oznake

$\{a\}$ - decimalni dio broja a

$[a]$ - najveći cio broj manji ili jednak datom broju a

k - indeks promenjivih koje u posljednjoj simpleks tabeli ne pripadaju bazi

s - broj reda u posljednjoj simpleks tabeli sa najvećom vrijednošću a_{s0}

tada se novo ograničenje (Gomory-jev odsječak) može pisati u obliku

$$\{a_{s0}\} - \sum_k \{a_{sk}\} x_k \leq 0$$

U našem primeru je

$a_{s0} = \frac{8}{3}$, $\{a_{s0}\} = \{\frac{8}{3}\} = \frac{2}{3}$, u_1 i u_2 ne pripadaju bazi

$\{\frac{2}{9}\} = \frac{2}{9}$ $\{-\frac{5}{9}\} = -\frac{5}{9} + 1 = \frac{4}{9}$

Ograničenje je oblika

$$\frac{2}{3} - \frac{2}{9} u_1 - \frac{4}{9} u_2 \leq 0$$

Uvođenjem nove izravnavajuće promenjive dobija se

$$-\frac{2}{9}u_1 - \frac{4}{9}u_2 + u_4 = -\frac{2}{3}$$

3 KORAK

Dodajemo novo dobijeno ograničenje u posljednju simpleks tabelu, dobija se nova simpleks tabela

$IV_v \cdot (-\frac{9}{4})$ (stara) (nova)

$I_v + IV_v \cdot (\frac{5}{9})$

$II_v + IV_v \cdot (-\frac{2}{9})$

$III_v + IV_v \cdot (-\frac{4}{3})$

$V_v + IV_v \cdot (-\frac{40}{9})$

0	1	2/9	−5/9	0	0	4/3
1	0	1/9	2/9	0	0	8/3
0	0	−1/3	4/3	1	0	4
0	0	−2/9	$\boxed{-4/9}$	0	1	−2/3
0	0	380/9	40/9	0	0	2080/3

← red u_4

U redu u_4 bira se kolona r sa najvećim po apsolutnoj vrijednosti negativnim brojem i provjerava se da li dobija $\min\left\{\frac{b_i}{a_{ir}}\right\}$

$$\min\left\{\frac{\frac{8}{3}}{\frac{2}{9}}, \frac{4}{\frac{4}{3}}, \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{4}{9}}\right\} = \min\left\{\frac{72}{6}, \frac{12}{4}, \frac{18}{12}\right\} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

		u_1	u_2	u_3	u_4	
0	1	1/2	0	0	−5/4	13/6
1	0	0	0	0	1/2	7/3
0	0	−1	0	1	3	2
0	0	1/2	1	0	−9/4	3/2
0	0	40	0	0	10	2060/3

$x_1 = \frac{7}{3}$

$x_2 = \frac{13}{6}$

$z = \frac{2060}{3}$

Kako rješenje nije cjelobrojno prelazimo na drugi korak.

2 KORAK

Formiramo odsječak. $a_{s0} = \frac{7}{3}$, $\{a_{s0}\} = \frac{1}{3}$, u_4 ne pripada bazi

$\left\{\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$ Novo ograničenje je oblika $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}u_5 \le 0$

Uvođenjem nove izravnavajuće promjenljive dobija se

$$-\frac{1}{2}u_5 + u_6 \le -\frac{1}{3}$$

0	1	1/2	0	0	-5/4	0	13/6
1	0	0	0	0	1/2	0	7/3
0	0	-1	0	1	3	0	2
0	0	1/2	1	0	-9/4	0	3/2
0	0	0	0	0	$\boxed{-\frac{1}{2}}$	1	$-\frac{1}{3}$
0	0	40	0	0	10	0	$\frac{2060}{3}$

↑

3 KORAK

Dodajemo novo ograničenje u simpleks tabelu

$$\min\left\{\frac{\frac{7}{3}}{\frac{1}{2}}, \frac{2}{3}, \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}\right\} = \frac{2}{3}$$

$V_v \cdot (-2)$

$I_v + V_v \cdot \left(\frac{5}{4}\right)$

$II_v + V_v \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$III_v + V_v \cdot (-3)$

$IV_v + V_v \cdot \left(\frac{9}{4}\right)$

$VI_v + V_v \cdot (-10)$

0	1	1/2	0	0	0	$-\frac{5}{2}$	3
1	0	0	0	0	0	1	2
0	0	-1	0	1	0	6	0
0	0	1/2	1	0	0	-9/2	3
0	0	0	0	0	1	-2	$\frac{2}{3}$
0	0	40	0	0	0	20	680

$x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $z = 680$ Rješenja su cjelobrojna.

Maksimalna dobit koja se može dobiti obradom proizvoda je 680 novčanih jedinica.

7) Igra je definisana na sljedeći način: Igrač A ima dvije karte na kojima su oznake A_1 i A_2, dok igrač B ima pet karti na kojima su oznake B_1, B_2, B_3, B_4 i B_5. Oba igrača nezavisno jedan od drugog, istovremeno biraju po jednu kartu i pokazuju drugom igraču. Dobit igrača A u odnosu na igrača B u zavisnosti od kombinacije pokazanih karti je prikazano u sljedećoj tabeli:

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	2	4	0	3	5
A_2	6	3	8	4	2

Dati grafičku interpretaciju matrične igre, odrediti optimalne strategije igrača i pronaći vrijednost igre.

Rj.

	A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	igrač A minim. može da dobije
p_1	A_1	2	4	0	3	5	0
p_2	A_2	6	3	8	4	2	2
	igrač B maksimalno može da izgubi	6	4	8	4	5	

α - donja vrijednost igre

$\alpha = \max\limits_i \min\limits_j (a_{ij}) = 2$

β - gornja vrijednost igre

$\beta = \min \max (a_{ij}) = 4$

V - vrijednost igre

$2 < V < 4$

Matrična igra nema sedlo, rješenje igre je u domenu čistih strategija.

Sračunajmo očekivane dobitke igrača A

$C(P, B_1) = 2p_1 + 6p_2$

$C(P, B_2) = 4p_1 + 3p_2$

$C(P, B_3) = 8p_2$

$C(P, B_4) = 3p_1 + 4p_2$

$C(P, B_5) = 5p_1 + 2p_2$

Kako je $p_1 + p_2 = 1$ imamo $p_2 = 1 - p_1$

$C(P, B_1) = 2p_1 + 6(1-p_1) =$
$= -4p_1 + 6$

$C(P, B_2) = 4p_1 + 3(1-p_1) = p_1 + 3$

$C(P, B_5) = 5p_1 + 2(1-p_1) = 3p_1 + 2$

$C(P, B_3) = 8(1-p_1) = -8p_1 + 8$

$C(P, B_4) = 3p_1 + 4(1-p_1) = -p_1 + 4$

$C(P, B_1) = -4p_1 + 6$

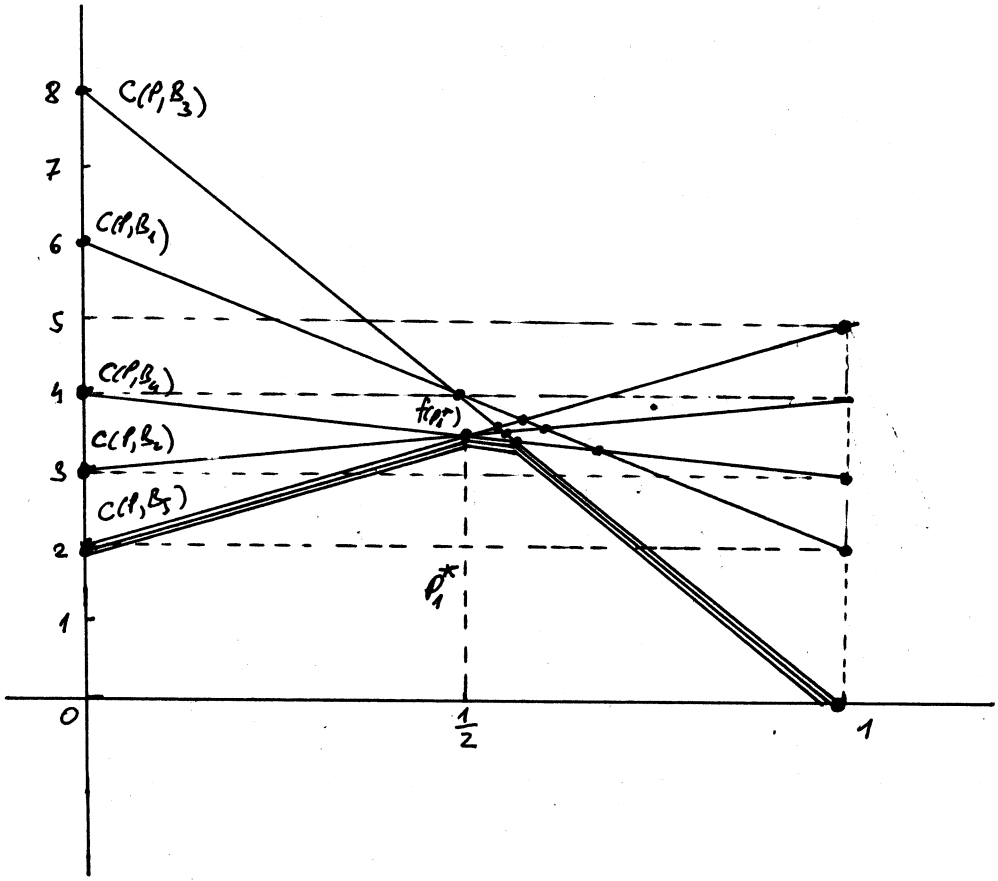
$C(P, B_2) = p_1 + 3$

$C(P, B_3) = -8p_1 + 8$

$C(P, B_4) = -p_1 + 4$

$C(P, B_5) = 3p_1 + 2$

Grafički prikaz:



Igrač A nastojaće da odabere takvu (strategiju) vjerovatnoću p_1 tako da maksimizira minimalne moguće dobitke tj. da ne dozvoli da njegovi dobici budu manji od vrijednosti igre.

Optimalna vrijednost p_1^* određuje se na osnovu izraza

$$f(p_1^*) = \min_{p_1} \{f(p_1)\} \quad \text{gdje je} \quad f(p_1) = \min\{-4p_1+6, p_1+3, -8p_1+8, -p_1+4, 3p_1+2\}$$

Na osnovu grafika vidimo da se prave

$C(P, B_2) = p_1 + 3$

$C(P, B_4) = -p_1 + 4$

$C(P, B_5) = 3p_1 + 2$

sijeku u istoj tački. Provjerimo to:

$p_1 + 3 = -p_1 + 4$

$p_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow p_2 = \frac{1}{2}$

$3p_1 + 2 = p_1 + 3$

$2p_1 = 1$

$p_1 = \frac{1}{2}$

tačno

$V = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$

$C(P, B_1) = 6 - 2 = 4$

$C(P, B_2) = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$

$C(P, B_3) = 8 - 4 = 4$

$C(P, B_4) = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

$C(P, B_5) = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$

Imajući u vidu opšti izraz za vrijednost matrične igre može se pisati da je

$$v = C(P,Q) = \sum_{i=1}^{5} C(P,B_i)\, q_i =$$

$$= 4q_1 + \frac{7}{2} q_2 + 4q_3 + \frac{7}{2} q_4 + \frac{7}{2} q_5$$

Kako je još $q_1+q_2+q_3+q_4+q_5 = 1$ $(q_5 = 1 - q_1 - q_2 - q_3 - q_4)$ imamo

$$C(P,Q) = \frac{1}{2} q_1 + \frac{1}{2} q_3 + \frac{7}{2}$$

$$v = \frac{7}{2} = \frac{1}{2}(q_1 + q_3) + \frac{7}{2} \Rightarrow q_1 + q_2 = 0 \overset{q_i \geq 0}{\Rightarrow} q_1 = q_3 = 0$$

$$q_2 + q_4 + q_5 = 1$$

$$\frac{7}{2} q_2 + \frac{7}{2} q_4 + \frac{7}{2} q_5 = V$$

Za igrača B igra se svodi na matricu cijena

	q_2	q_4	q_5
	B_2	B_4	B_5
A_1	4	3	5
A_2	3	4	2

Odredimo očekivane gubitke igrača B

$$C(A_1,Q) = 4q_2 + 3q_4 + 5q_5$$

$$C(A_2,Q) = 3q_2 + 4q_4 + 2q_5$$

$$q_2 + q_4 + q_5 = 1 \Rightarrow q_5 = 1 - q_2 - q_4$$

$$C(A_1,Q) = 4q_2 + 3q_4 + 5(1 - q_2 - q_4) = 5 - q_2 - 2q_4$$

$$C(A_2,Q) = 3q_2 + 4q_4 + 2(1 - q_2 - q_4) = 2 + q_2 + 2q_4$$

$$q_2 + q_4 + q_5 = 1 \Rightarrow q_4 = 1 - q_2 - q_5$$

$$C(A_1,Q) = 4q_2 + 3(1 - q_2 - q_5) + 5q_5 = 3 + q_2 + 2q_5$$

$$C(A_2,Q) = 3q_2 + 4(1 - q_2 - q_5) + 2q_5 = 4 - q_2 - 2q_5$$

Iz prethodno napisanog ali i iz grafičke interpretacije možemo vidjeti da za igrača B aktivan par strategija je bilo koji par B_2B_4, B_2B_5 ili B_4B_5.

Ako igrač B uzme za aktivne strategije A_4 i A_5 matrica cijena će biti

$$\begin{array}{c|cc} & q_4 & q_5 \\ & B_4 & B_5 \\ \hline A_1 & 3 & 5 \\ A_2 & 4 & 2 \end{array}$$

Očekivani gubitak igrača B $\quad C(A_1, Q) = 3q_4 + 5q_5$

$\quad C(A_2, Q) = 4q_4 + 2q_5$

$$\Rightarrow \quad 3q_4 + 5q_5 = 4q_4 + 2q_5$$

$$q_4 = 3q_5$$

Kako je još $q_4 + q_5 = 1 \quad \Rightarrow \quad 3q_5 + q_5 = 1$

$$q_5 = \frac{1}{4} \Rightarrow q_4 = \frac{3}{4}$$

Optimalne strategije igrača su $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ i $Q = \left(0, 0, 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Vrijednost igre je $\frac{7}{2}$.

(#) Mia Fredlund je predsjednica istraživačkog odjeljenja za kompaniju Zdravlje d.d., jedne od najače farmaceutske kompanije u BiH. Njezin najvažniji projekat koji dolazi je razvijanje novog lijeka koji će se suprostaviti AIDS-u. Ona je prepoznala 10 grupa u svom odjeljenju koji trebaju da sprovedu različite faze ovog istraživanja i razvoja projekta. Pozivajući se na posao koji treba obaviti, Mia je procjenila vremena za aktivnosti (A, B, ..., J) i njihovu međusobnu zavisnost, što je prikazano u sljedećoj tabeli.

Aktivnost	Zavisi od	trajanje (u sedmicama): optimističko vrijeme (o)	najvjerovatnije vrijeme (n)	pesimističko vrijeme (p)
A	—	7	16	28
B	A	4	19	25
C	A	10	16	37
D	B	7	13	37
E	B, C	13	19	33
F	B	19	22	33
G	D, E	4	7	19
H	F, G	13	19	49
I	B, C	13	25	37
J	I, H	7	13	19

b) pronaći kritičan put

c) odrediti očekivano vrijeme završetka i varijansu projekta

a) nacrtati PERT mrežu za ovaj projekat

d) izračunati kolika je vjerovatnoća da se projekat završi unutar dvije godine (104 sedmice).

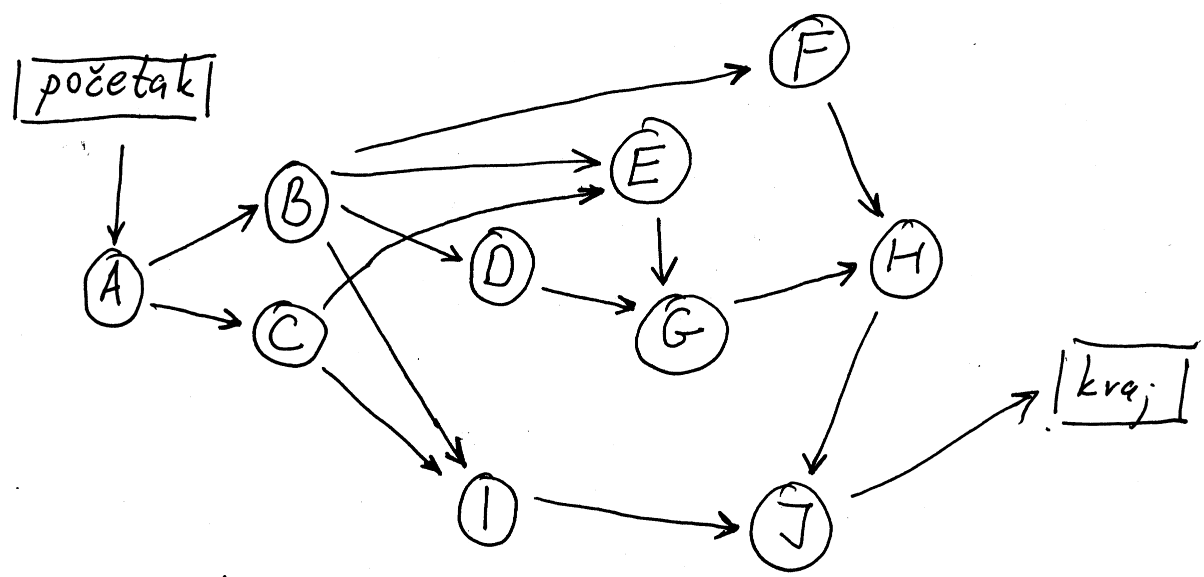
R: Priroda vjerovatnoće vremena aktivnosti je opisana pomoću beta distribucije čije se očekivanje i varijansa računaju:

$$E = \frac{o+p+4n}{6}, \quad \sigma_{ij}^2 = \left(\frac{p-o}{6}\right)^2.$$

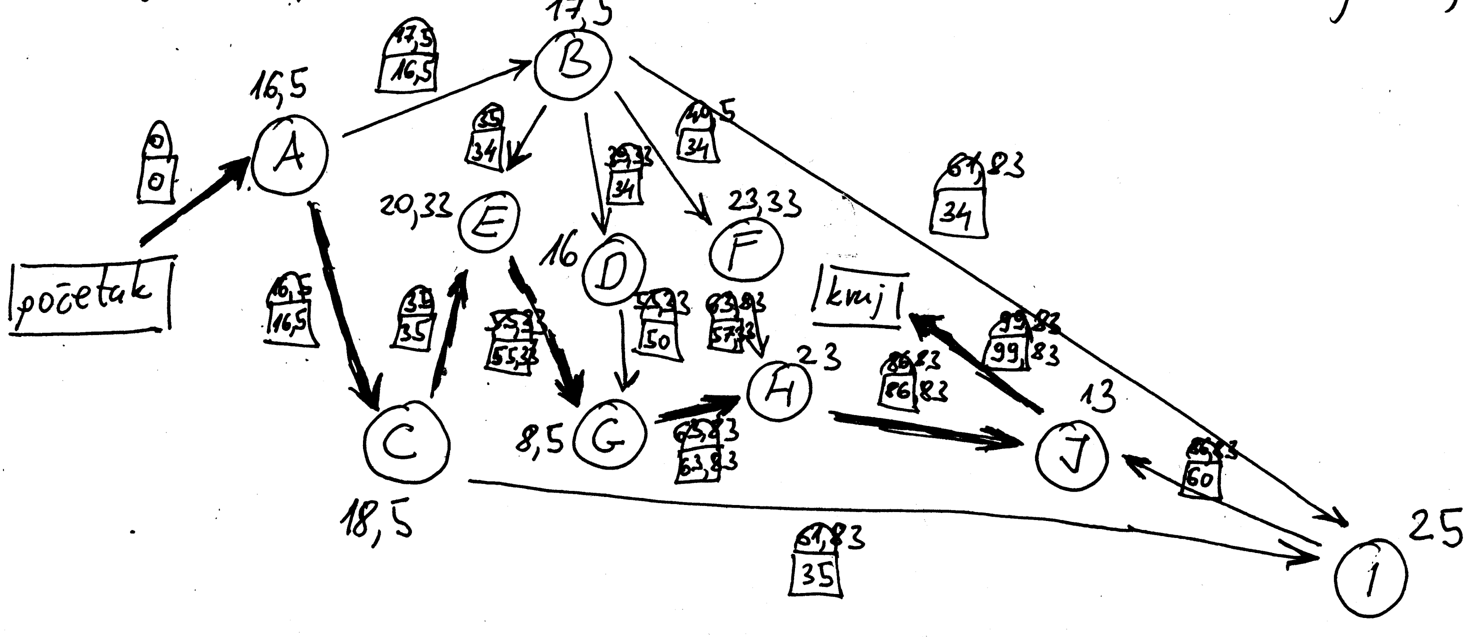
Nacrtajmo tabelu u koju ćemo staviti očekivano vrijeme i varijansu za svaku od aktivnosti.

Aktivnost	Očekivano vrijeme (E)	Varijansa σ_{ij}^2
A	16,5	12,25
B	17,5	12,25
C	18,5	20,25
D	16	25
E	20,33	11,11
F	23,33	5,44
G	8,5	6,25
H	23	36
I	25	16
J	13	4

a)



nacrtajmo ljepše ovu mrežu (da nam se ivice ne sijeku)



b) kritičan put je $A-C-E-G-H-J$

c) očekivano vrijeme završetka projekta $= 99{,}83$ sedmice

varijansa projekta $= \sigma^2 = \sigma_A^2 + \sigma_C^2 + \sigma_E^2 + \sigma_G^2 + \sigma_H^2 + \sigma_J^2$

$$= 12{,}25 + 20{,}25 + 11{,}11 + 6{,}25 + 36 + 4 = 89{,}86$$

d) vjerovatnoća da će se projekat završiti unutar 104 sedmice. ($T \leq 104$ sedmice)

$K = 104$

$E(T) = 99{,}83$

$\sigma = 9{,}48$

$$C = \frac{K - E(T)}{\sigma} = \frac{104 - 99{,}83}{9{,}48} = 0{,}44$$

$$P(T \leq 104) = P(z \leq 0{,}44) = 1 - 0{,}33 = 0{,}67$$

(iz tabele normalne distribucije)