Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Matematika i informatika
17.02.2011.

Pismeni ispit iz predmeta **Operaciona istraživanja**

Zadatak br. 1

Radna organizacija treba da otvori četiri nova radna mjesta. Raspisan je konkurs. U uži izbor je ušlo pet kandidata. Izvršena je provjera njihove stručne sposobnosti za obavljanje datih poslova. Broj osvojenih poena dat je u tabeli.
Kako rasporediti radnike na radna mjesta, pa da ukupna efikasnost bude najveća? Koji radnik neće biti primljen?

radna mjesta / radnici	M1	M2	M3	M4
R1	5	7	5	2
R2	3	5	5	5
R3	6	7	6	2
R4	7	11	10	5
R5	9	7	8	7

Zadatak br. 2

Potrebno je obraditi dvije vrste proizvoda. Obrada proizvoda prolazi kroz različite faze u tri smjene. U prvoj smjeni vrijeme za obradu prvog proizvoda je 5 sati, da drugog proizvoda 2 sata. Radno vrijeme prve smjene je 16 sati. U drugoj smjeni vrijeme za obradu prvog proizvoda je 2 sata a drugog proizvoda je -1 sat. Radno vrijeme druge smjene je 4 sata. U trećoj smjeni vrijeme za obradu prvog proizvoda je -1 sat a drugog proizvoda je 2 sata. Radno vrijeme treće smjene je 4 sata. Dobit ostvaren obradom prvog proizvoda je 220 novčanih jedinica, dok je dobit ostvarena obradom drugog proizvoda 80 novčanih jedinica. Formirati matematički model problema pod uslovom da želimo ostvariti maksimalnu dobit. Problem riješiti metodom odsječaka.

Zadatak br. 3

Igra je definisana na sljedeći način: Igrač A ima dvije karte na kojima su oznake A1 i A2, dok igrač B ima pet karti na kojima su oznake B1, B2, B3, B4 i B5. Oba igrača nezaviso jedan od drugog, istovremeno biraju po jednu kartu i pokazuju drugom igraču. Dobit igrača A u odnosu na igrača B u zavisnositi od kombinacije pokazanih karti je prikazano u tabeli.

A / B	B1	B2	B3	B4	B5
A1	2	4	0	3	5
A2	6	3	8	4	2

Dati grafički interpretaciju matrične igre, odrediti optimalne strategije igrača i pronaći vrijednost igre.

Zadatak br. 4

Kompanija ZzKablovi d.o.o. razmatra konstrukciju nove tvornice. Tabela pokazuje aktivnosti projekta, njihovu međusobnu zavisnost i procjenjeno vrijeme (u sedmicama).

a) nacrtati CPM mrežu ovog projekta

b) pronaći kritičan put i objasniti šta za projekat predstavlja kritičan put

c) pronači početno i završno najranije i najkasnije vrijeme i vremenske rezerve za svaku od aktivnosti

d) naći vrijeme završetka projekta.

Aktivnosts	Zavisi od	Vrijeme
A	-	5
B	-	5
C	B	2
D	A, C	2
E	A, C	3
F	A, C	1
G	B	2
H	B	7
I	E	13
J	E, D	6
K	F, G, H	4
L	H	5
M	J, K, L	5

(zadaci su skinuti sa stranice **pf.unze.ba\nabokov**)
(za uočene greške pisati na infoarrt@gmail.com)

(#) Radna organizacija treba da otvori četiri nova radna mjesta. Raspisan je konkurs. U uži izbor je ušlo pet kandidata. Izvršena je provjera njihove stručne sposobnosti za obavljanje poslova. Broj osvojenih poena dat je u sljedećoj tabeli:

radnici \ radna mjesta	M_1	M_2	M_3	M_4
R_1	5	7	5	2
R_2	3	5	5	5
R_3	6	7	6	2
R_4	7	11	10	5
R_5	9	7	8	7

Kako rasporediti radnike na radna mjesta, pa da ukupna efikasnost bude najveća? Koji radnik neće biti primljen?

Rj. Matematički model ovog problema je

$$\max F(X) = \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$$

pri ograničenjima
$$\sum_{i=1}^{5} x_{ij} = 1, \quad j=\overline{1,4}$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} \leq 1, \quad i=\overline{1,5}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } i\text{-ti radnik raspoređen na } j\text{-to mjesto} \\ 0, & \text{u suprotnom} \end{cases}$$

Ovo je otvoreni problem, pa prije nego što ga počnemo rješavati dodajmo fiktivnu mašinu M_5 pa ga svedimo na zatvoreni problem.

Poslije dodavanja dobijemo sljedeću kvadratnu matricu:

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 5 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 5 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 6 & 2 & 0 \\ 7 & 11 & 10 & 5 & 0 \\ 9 & 7 & 8 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Kako se traži maksimalna vrijednost f-je $F(X)$ postupak za rješavanje je sljedeći

1. u svakoj koloni od svih elemenata se oduzima najveći element.

Tako se dobije:

$$\begin{bmatrix} -4 & -4 & -5 & -5 & 0 \\ -6 & -6 & -5 & -2 & 0 \\ -3 & -4 & -4 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Znajući da je $\max F(X) = C \cdot X \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \min F_1(x) = -CX$ dobijena kvadratna matrica se množi sa (-1) i dalje rješavanje se nastavlja po postupku za izračunavanje minimalne vrijednosti f-je.

$$\begin{array}{c} * \\ (*) \\ (*) \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 5 & 5 & \boxed{0} \\ 6 & 6 & 5 & 2 & \cancel{0} \\ 3 & 4 & 4 & 5 & \cancel{0} \\ 2 & \boxed{0} & \cancel{0} & 2 & \cancel{0} \\ \boxed{0} & 4 & 2 & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix}$$

U svakom redu postoji bar jedna nula

Razvrstavamo nule na zavisne i nezavisne

Rješenje nije optimalno (imamo tri nezavisne nule)

a) označimo redove sa (*) bez nezavisnih nula (R_2, R_3)

b) precrtamo sve kolone koje imaju zavisnu nulu u označenim redovima

c) označimo redove sa (*) koje imaju nezavisnu nulu u precrtan.

d) precrtamo kolone koje imaju zavisnu nulu u novom označenom redu, c) i d) ponavljamo

e) precrtamo redove koji nisu označeni sa (*) u postupcima a) i c)

f) pronađemo najmanji neprecrtan element (2)

g) najmanji element pod f) dodamo elementima koji se nalaze na presjeku precrtanih kolona i redova

h) vrijednost najmanjeg elementa oduzmemo od svih neprecrtanih elemenata

i) svi ostali precrtani elementi se ne mijenjaju

j) razvrstavamo nule na zavisne i nezavisne

$$\begin{array}{c}* \\ \\ * \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 & \boxed{0} \\ 4 & 4 & 3 & \boxed{0} & \cancel{0} \\ 1 & 2 & 2 & 3 & \cancel{0} \\ 2 & \boxed{0} & 0 & 2 & 2 \\ \boxed{0} & 4 & 2 & \cancel{0} & 2 \end{bmatrix}$$

Razvrstavamo na zavisne i nezavisne.
Nije optimalno.
a) - e)
najmanji element je 1 g) - i)

$$\begin{array}{c}* \\ * \\ * \\ \\ * \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & \boxed{0} \\ 4 & 4 & 3 & \boxed{0} & 1 \\ \boxed{0} & 1 & 1 & 2 & \cancel{0} \\ 2 & \boxed{0} & \cancel{0} & 2 & 3 \\ \cancel{0} & 4 & 2 & \cancel{0} & 3 \end{bmatrix}$$

Razvrstavamo na zavisne i nezavisne.

Nije optimalno
a) - e)
najmanji element je 1
g) - i)

Razvrstavamo nule na zavisne i nezavisne

$$\begin{bmatrix} 1 & \boxed{0} & 1 & 2 & \cancel{0} \\ 4 & 3 & 2 & \boxed{0} & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & 2 & \boxed{0} \\ 3 & \cancel{0} & \boxed{0} & 3 & 4 \\ \boxed{0} & 3 & 1 & \cancel{0} & 3 \end{bmatrix}$$

Nule smo mogli razvrstati i na drugi način

$$\begin{bmatrix} 1 & \cancel{0} & 1 & 2 & \boxed{0} \\ 4 & 3 & 2 & \boxed{0} & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \boxed{0} & 2 & \cancel{0} \\ 3 & \boxed{0} & \cancel{0} & 3 & 4 \\ \boxed{0} & 3 & 1 & \cancel{0} & 3 \end{bmatrix}$$

Dobili smo dva optimalna rješenja

prvo: $x_{12}=1,\ x_{24}=1,\ x_{35}=1,\ x_{43}=1,\ x_{51}=1$

$$\max F = 7+5+10+9 = 31$$

drugo:

$x_{15}=1,\ x_{24}=1,\ x_{33}=1,\ x_{42}=1,\ x_{51}=1$

$$\max F = 5+6+11+9 = 31$$

Primjetimo da postoji i treće optimalno rješenje. KOJE?
Na osnovu prvog optimalnog rješenja možemo zaključiti da na radna mjesta M_1, M_2, M_3 i M_4 treba rasporediti redom petog, prvog, drugog i četvrtog radnika dok radnik tri neće biti primljen.
Na osnovu drugog optimalnog rješenja radnik jedan neće biti primljen. Prema tome konkursna komisija treba iznaći nove uslove na osnovu kojih će odlučiti da li da zaposli prvog ili trećeg radnika.

\# Potrebno je obraditi dvije vrste proizvoda. Obradu proizvodi prolaze kroz različite faze u tri smjene. U prvoj smjeni vrijeme za obradu prvog proizvoda je 5 sati, a drugog proizvoda 2 sata. Radno vrijeme prve smjene je 16 sati. U drugoj smjeni vrijeme za obradu prvog proizvoda je 2 sata a drugog proizvoda −1 sat. Radno vrijeme druge smjene je 4 sata. U trećoj smjeni vrijeme za obradu prvog proizvoda je −1 sat a drugog proizvoda 2 sata. Radno vrijeme treće smjene je 4 sata. Dobit ostvaren obradom prvog proizvoda je 220 novčanih jedinica, dok je dobit ostvaren obradom drugog proizvoda 80 novč. jedinica. Formirati matematički model problema pod uslovom da želimo ostvariti maksimalnu dobit. Problem rješiti metodom odsječaka.

Rj.

$$\max\ z = 220x_1 + 80x_2$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 16$$

$$2x_1 - x_2 \leq 4$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

1 KORAK

Zanemarimo ograničenja $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ i rješimo problem simpleks metodom

$$\begin{array}{ccccc|c}
5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 16 \\
\boxed{2} & -1 & 0 & 1 & 0 & 4 \leftarrow \\
-1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 4 \\
\hline
-220 & -80 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\uparrow & & & & &
\end{array}$$

$\min\left\{\frac{16}{5}, \frac{4}{2}\right\} = 2$

$II_v : 2$

$I_v + II_v \cdot (-5)$

$III_v + II_v \cdot$

$IV_v + II_v \cdot 220$

$$\begin{array}{ccccc|c}
0 & \boxed{9/2} & 1 & -5/2 & 0 & 6 \leftarrow \\
1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 2 \\
0 & 3/2 & 0 & 1/2 & 1 & 6 \\
\hline
0 & -190 & 0 & 110 & 0 & 440 \\
 & \uparrow & & & &
\end{array}$$

$\min\left\{\frac{6}{\frac{9}{2}}, \frac{6}{\frac{3}{2}}\right\} = \min\left\{\frac{12}{9}, \frac{12}{3}\right\} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

$I_v \cdot \frac{2}{9}$ $\qquad III_v + I_v \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$

$II_v + I_v \cdot (\frac{1}{2}$ $\qquad IV_v + I_v \cdot 190$

		u_1	u_2	u_3	
0	1	$\frac{2}{9}$	$-\frac{5}{9}$	0	$4/3$
1	0	$1/9$	$2/9$	0	$8/3$
0	0	$-1/3$	$4/3$	1	4
0	0	$\frac{380}{9}$	$40/9$	0	$\frac{2080}{3}$

$x_1 = \frac{8}{3}$

$x_2 = \frac{4}{3}$

$z = \frac{2080}{3}$

Kako rješenje nije cjelobrojno prelazimo na drugi korak.

2 KORAK

Formiramo odsječak – novo linearno ograničenje sa kojim se proširuje simpleks tabela.

U opštem slučaju novo ograničenje se formira na sljedeći način. Ako se uvedu oznake

$\{a\}$ – decimalni dio broja a

$[a]$ – najveći cio broj manji ili jednak datom broju a

k – indeks promjenjivih koje u posljednjoj simpleks tabeli ne pripadaju bazi

s – broj reda u posljednjoj simpleks tabeli sa najvećom vrijednošću a_{s0}

tada se novo ograničenje (Gomory-jev odsječak) može pisati u obliku

$$\{a_{s0}\} - \sum_k \{a_{sk}\} x_k \leq 0$$

U našem primjeru je

$a_{s0} = \frac{8}{3}$, $\{a_{s0}\} = \{\frac{8}{3}\} = \frac{2}{3}$, u_1 i u_2 ne pripadaju bazi

$\{\frac{2}{9}\} = \frac{2}{9}$ $\{-\frac{5}{9}\} = -\frac{5}{9} + 1 = \frac{4}{9}$

Ograničenje je oblika

$$\frac{2}{3} - \frac{2}{9} u_1 - \frac{4}{9} u_2 \leq 0$$

Uvođenjem nove izravnavajuće promjenjive dobija se

$$-\frac{2}{9}u_1 - \frac{4}{9}u_2 + u_4 = -\frac{2}{3}$$

3 KORAK

Dodajemo novo dobijeno ograničenje u posljednju simpleks tabelu, dobija se nova simpleks tabela

0	1	2/9	-5/9	0	0	4/3
1	0	1/9	2/9	0	0	8/3
0	0	-1/3	4/3	1	0	4
0	0	-2/9	$\boxed{-4/9}$	0	1	-2/3
0	0	380/9	40/9	0	0	2080/3

← red u_4

$IV_v \cdot (-\frac{9}{4})$ (nova)

$I_v + IV_v \cdot (\frac{5}{9})$

$II_v + IV_v \cdot (-\frac{2}{9})$

$III_v + IV_v \cdot (-\frac{4}{3})$

$V_v + IV_v \cdot (-\frac{40}{9})$

U redu u_4 bira se kolona r sa najvećim po apsolutnoj vrijednosti negativnim brojem i provjerava se da li dobija $\min\left\{\frac{b_i}{a_{ir}}\right\}$

$$\min\left\{\frac{\frac{8}{3}}{\frac{2}{9}}, \frac{4}{\frac{4}{3}}, \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{4}{9}}\right\} = \min\left\{\frac{72}{6}, \frac{12}{4}, \frac{18}{12}\right\} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

		u_1	u_2	u_3	u_4	
0	1	1/2	0	0	-5/4	13/6
1	0	0	0	0	1/2	7/3
0	0	-1	0	1	3	2
0	0	1/2	1	0	-9/4	3/2
0	0	40	0	0	10	2060/3

$x_1 = \frac{7}{3}$

$x_2 = \frac{13}{6}$

$z = \frac{2060}{3}$

Kako rješenje nije cjelobrojno prelazimo na drugi korak.

2 KORAK

Formiramo odsječak. $a_{s0} = \frac{7}{3}$, $\{a_{s0}\} = \frac{1}{3}$, u_4 ne pripada bazi

$\{\frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}$ Novo ograničenje je oblika $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}u_5 \leq 0$

Uvođenjem nove izravnavajuće promjenjive dobija se

$$-\frac{1}{2}u_5 + u_6 \leq -\frac{1}{3}$$

0	1	1/2	0	0	-5/4	0	13/6
1	0	0	0	0	1/2	0	7/3
0	0	-1	0	1	3	0	2
0	0	1/2	1	0	-9/4	0	3/2
0	0	0	0	0	$\boxed{-\frac{1}{2}}$	1	$-\frac{1}{3}$
0	0	40	0	0	10	0	$\frac{2060}{3}$

3 KORAK

Dodajemo novo ograničenje u simpleks tabelu

$$\min\left\{\frac{\frac{7}{3}}{\frac{1}{2}}, \frac{2}{3}, \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}\right\} = \frac{2}{3}$$

$V_v \cdot (-2)$

$I_v + V_v \cdot (\frac{5}{4})$

$II_v + V_v \cdot (-\frac{1}{2})$

$III_v + V_v \cdot (-3)$

$IV_v + V_v \cdot (\frac{9}{4})$

$VI_v + V_v \cdot (-10)$

0	1	1/2	0	0	0	$-\frac{5}{2}$	3
1	0	0	0	0	0	1	2
0	0	-1	0	1	0	6	0
0	0	1/2	1	0	0	-9/2	3
0	0	0	0	0	1	-2	$\frac{2}{3}$
0	0	40	0	0	0	20	680

$x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $z = 680$ Rješenja su celobrojna.

Maksimalna dobit koja se može dobiti obradom proizvoda je 680 novčanih jedinica.

(7) Igra je definisana na sljedeći način: Igrač A ima dvije karte na kojima su oznake A_1 i A_2, dok igrač B ima pet karti na kojima su oznake B_1, B_2, B_3, B_4 i B_5. Oba igrača nezavisno jedan od drugog, istovremeno biraju po jednu kartu i pokazuju drugom igraču. Dobit igrača A u odnosu na igrača B u zavisnosti od kombinacije pokazanih karti je prikazano u sljedećoj tabeli:

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	2	4	0	3	5
A_2	6	3	8	4	2

Dati grafičku interpretaciju matrične igre, odrediti optimalne strategije igrača i pronaći vrijednost igre.

R.:

	A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	igrač A minim. može da dobije
p_1	A_1	2	4	0	3	5	0
p_2	A_2	6	3	8	4	2	2
	igrač B maksimalno može da izgubi	6	4	8	4	5	

α - donja vrijednost igre

$\alpha = \max\limits_i \min\limits_j (a_{ij}) = 2$

β - gornja vrijednost igre

$\beta = \min \max (a_{ij}) = 4$

V - vrijednost igre

$2 < V < 4$

Matrična igra nema sedlo, rješenje igre je u domenu čistih strategija.

Sračunajmo očekivane dobitke igrača A

$C(P, B_1) = 2p_1 + 6p_2$

$C(P, B_2) = 4p_1 + 3p_2$

$C(P, B_3) = 8p_2$

$C(P, B_4) = 3p_1 + 4p_2$

$C(P, B_5) = 5p_1 + 2p_2$

Kako je $p_1 + p_2 = 1$ imamo $p_2 = 1 - p_1$

$C(P, B_1) = 2p_1 + 6(1-p_1) =$
$= -4p_1 + 6$

$C(P, B_2) = 4p_1 + 3(1-p_1) = p_1 + 3$

$C(P, B_5) = 5p_1 + 2(1-p_1) = 3p_1 + 2$

$C(P, B_3) = 8(1-p_1) = -8p_1 + 8$

$C(P, B_4) = 3p_1 + 4(1-p_1) = -p_1 + 4$

$C(P, B_1) = -4p_1 + 6$

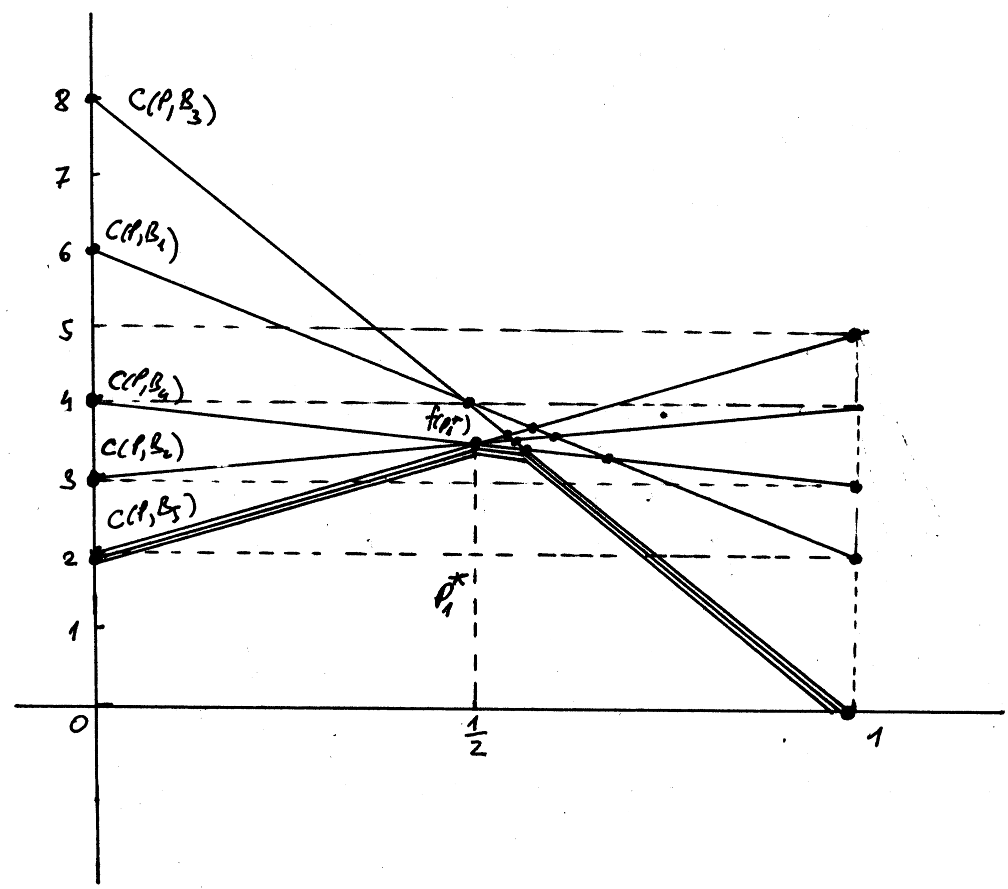
$C(P, B_2) = p_1 + 3$

$C(P, B_3) = -8p_1 + 8$

$C(P, B_4) = -p_1 + 4$

$C(P, B_5) = 3p_1 + 2$

Grafički prikaz:



Igrač A nastojaće da odabere takvu (strategiju) vjerovatnoću p_1 tako da maksimizira minimalne moguće dobitke tj. da ne dozvoli da njegovi dobici budu manji od vrijednosti igre.

Optimalna vrijednost p_1^* određuje se na osnovu izraza

$$f(p_1^*) = \min_{p_1} \{f(p_1)\} \quad \text{gdje je} \quad f(p_1) = \min\{-4p_1+6,\ p_1+3,\ -8p_1+8,\ -p_1+4,\ 3p_1+2\}$$

Na osnovu grafika vidimo da se prave

$C(P, B_2) = p_1 + 3$

$C(P, B_4) = -p_1 + 4$

$C(P, B_5) = 3p_1 + 2$

sijeku u istoj tački. Provjerimo to:

$$p_1 + 3 = -p_1 + 4$$

$$p_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow p_2 = \frac{1}{2}$$

$$3p_1 + 2 = p_1 + 3$$

$$2p_1 = 1$$

$$p_1 = \frac{1}{2}$$

tačno

$$V = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$$

$C(P, B_1) = 6 - 2 = 4$

$C(P, B_2) = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$

$C(P, B_3) = 8 - 4 = 4$

$C(P, B_4) = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

$C(P, B_5) = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$

Imajući u vidu opšti izraz za vrijednost matrične igre može se pisati da je

$$V = C(P,Q) = \sum_{i=1}^{5} C(P,B_i)\,q_i =$$

$$= 4q_1 + \frac{7}{2}q_2 + 4q_3 + \frac{7}{2}q_4 + \frac{7}{2}q_5$$

Kako je još $q_1+q_2+q_3+q_4+q_5=1$ $(q_5 = 1-q_1-q_2-q_3-q_4)$ imamo

$$C(P,Q) = \frac{1}{2}q_1 + \frac{1}{2}q_3 + \frac{7}{2}$$

$$V = \frac{7}{2} = \frac{1}{2}(q_1+q_3) + \frac{7}{2} \Rightarrow q_1+q_2=0 \overset{q_i\geq 0}{\Rightarrow} q_1=q_3=0$$

$$q_2+q_4+q_5=1$$

$$\frac{7}{2}q_2 + \frac{7}{2}q_4 + \frac{7}{2}q_5 = V$$

Za igrača B igra se svodi na matricu cijena

	q_2 B_2	q_4 B_4	q_5 B_5
A_1	4	3	5
A_2	3	4	2

Odredimo očekivane gubitke igrača B

$$C(A_1,Q) = 4q_2 + 3q_4 + 5q_5$$

$$C(A_2,Q) = 3q_2 + 4q_4 + 2q_5$$

$$q_2+q_4+q_5 = 1 \Rightarrow q_5 = 1-q_2-q_4$$

$$C(A_1,Q) = 4q_2 + 3q_4 + 5(1-q_2-q_4) = 5 - q_2 - 2q_4$$

$$C(A_2,Q) = 3q_2 + 4q_4 + 2(1-q_2-q_4) = 2 + q_2 + 2q_4$$

$$q_2+q_4+q_5=1 \Rightarrow q_4 = 1-q_2-q_5$$

$$C(A_1,Q) = 4q_2 + 3(1-q_2-q_5) + 5q_5 = 3 + q_2 + 2q_5$$

$$C(A_2,Q) = 3q_2 + 4(1-q_2-q_5) + 2q_5 = 4 - q_2 - 2q_5$$

Iz prethodno napisanog ali i iz grafičke interpretacije možemo vidjeti da za igrača B aktivan par strategija je bilo koji par $B_2 B_4$, $B_2 B_5$ ili $B_4 B_5$.

Ako igrač B uzme za aktivne strategije A_4 i A_5 matrica cijena će biti

	q_4 B_4	q_5 B_5
A_1	3	5
A_2	4	2

Očekivani gubitak igrača B
$$C(A_1, Q) = 3q_4 + 5q_5$$
$$C(A_2, Q) = 4q_4 + 2q_5$$

$$\Rightarrow \quad 3q_4 + 5q_5 = 4q_4 + 2q_5$$
$$q_4 = 3q_5$$

Kako je još $q_4 + q_5 = 1$ $\Rightarrow$ $3q_5 + q_5 = 1$
$$q_5 = \frac{1}{4} \Rightarrow q_4 = \frac{3}{4}$$

Optimalne strategije igrača su $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ i $Q = (0, 0, 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$. Vrijednost igre je $\frac{7}{2}$.

Kompanija ZzKablovi d.o.o. razmatra konstrukciju nove tvornice. Tabela pokazuje aktivnosti projekta, njihovu međusobnu zavisnost i procjenjeno vrijeme (u sedmicama).

Aktivnost	Zavisi od	Vrijeme
A	—	5
B	—	5
C	B	2
D	A, C	2
E	A, C	3
F	A, C	1
G	B	2
H	B	7
I	E	13
J	E, D	6
K	F, G, H	4
L	H	5
M	J, K, L	5

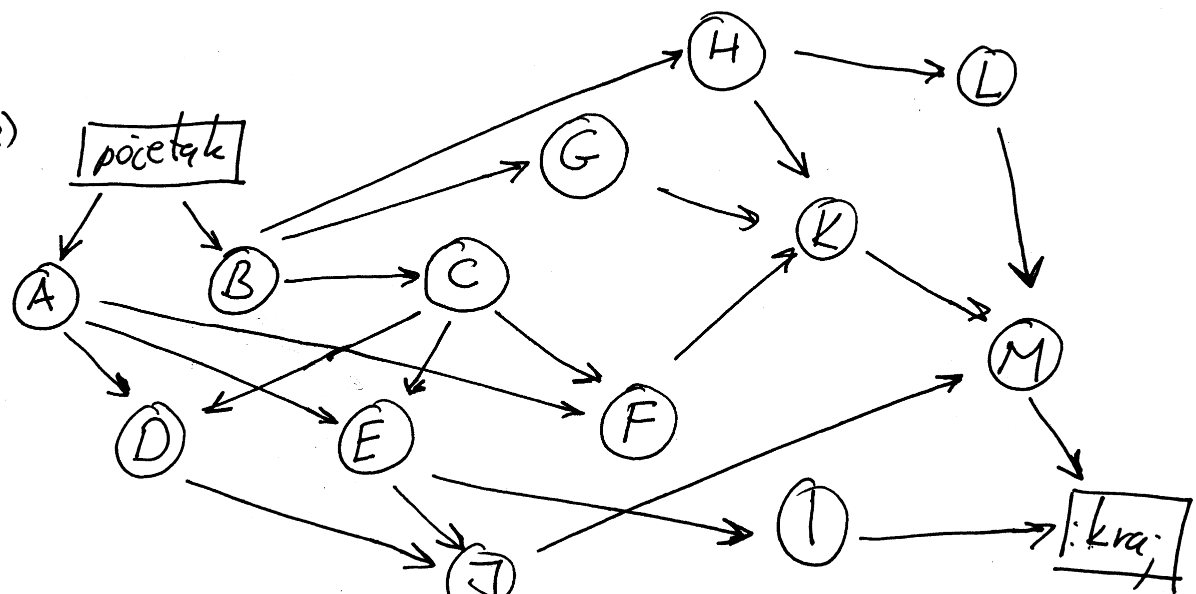
a) nacrtati CPM mrežu ovog projekta

b) pronaći kritičan put i objasniti šta za projekat predstavlja kritičan put

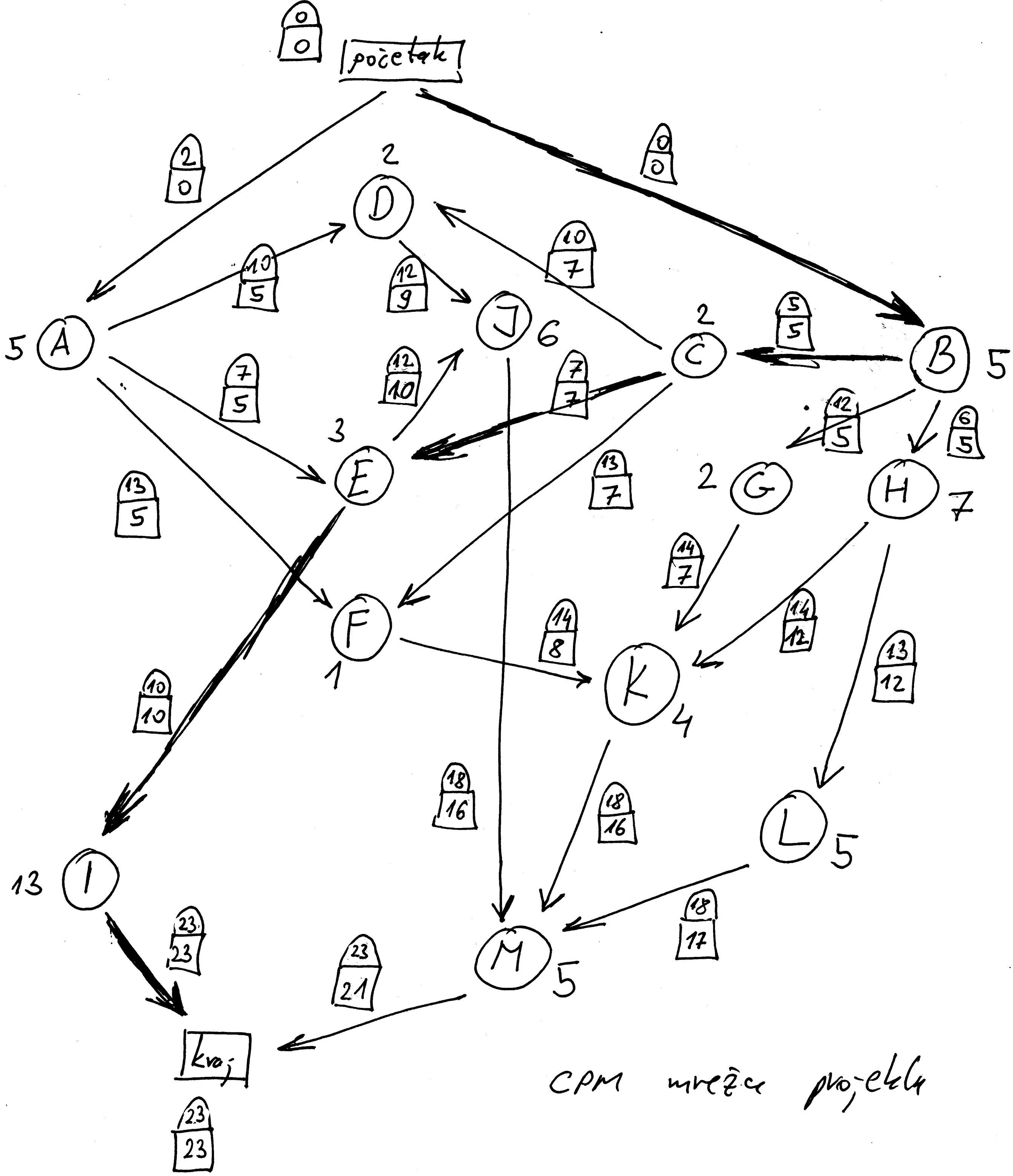
c) pronaći početno i završno najranije i najkasnije vrijeme i vremenske rezerve za svaku od aktivnosti

d) naći vrijeme završetka projekta.

Rj. a)



Nacrtajmo ljepše gornju CPM mrežu projekta.



CPM mreža projekta

b) Kritičan put projekta je B – C – E – I.

Kritičan put u projektu su aktivnosti koje se moraju završiti u procijenjenom vremenskom roku. Vrijeme završetka projekta će kasniti onoliko koliko budu kasnile aktivnosti na kritičnom putu.

c)

aktivnost	najranije početno vrijeme	najranije završno vrijeme	najkasnije početno vrijeme	najkasnije završno vrijeme	vremenske rezerve (v−u)
A	0	5	2	13	8
B	0	5	0	5	0
C	5	7	5	7	0
D	7	9	10	12	3
E	7	10	7	10	0
F	7	8	13	14	6
G	5	7	12	14	7
H	5	12	6	13	1
I	10	23	10	23	0
J	10	16	12	18	2
K	12	16	14	18	2
L	12	17	13	18	1
M	17	21	18	23	2

d) Projekat će se završiti za 23 sedmice.