Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Matematika i informatika
03.02.2011.

Pismeni ispit iz predmeta **Operaciona istraživanja**

Zadatak br. 1

Jedna vrsta eksplozivnog plina treba prevesti željeznicom. Plin treba putovati iz mjesta M1, M2 i M3 u odredišta O1, O2, O3 i 04. Iz mjesta M1 do odredišta prevoz traje redom 3, 15, 6 i 4 sata. Da bi iz M2 plin došao do spomenutih odredišta trebapo 10, 8, 10 i 5 sati. Konačno prevoz iz M3 traju 4, 3, 6 i 10 sati. Treba napraviti takav plan da je što je moguće manje plina na najdužem putu. U mjestima M1, M2 i M3 je na raspolaganju redom 55, 80 i 40 tona plina dok odredišta O1, O2, O3 i 04 mogu primiti najviše redom 55, 55, 90 i 20 tona.

Zadatak br. 2

Proizvodnom procesu kreiranja hemiske olovke karakterišu tri različite vrste poslova, koji se istovremeno obavljaju na mašinama M1 i M2. Potrebno vrijeme koje mašine zahtijevaju (u satima) prikazano u tabeli.

mašine / posao	M1	M2
P1	-1	2
P2	1	-1
P3	4	1

Na spomenutim poslovima mašine M1 i M2 ne smiju raditi, redom, duže od 4, 1 i 12 sati. Količina hemiski olovki koje se proizvedu (u jednom satu) je 5 na mašini M1 i 1 na mašini M2. Odrediti koliko sati trebaju biti uključene mašine M1 i M2 da bi se ostvario maksimalan broj potpuno završenih hemiski olovki. Problem riješiti metodom grananja i ograničavanja.

Zadatak br. 3

Poznata japanska igra Nui-Kami igra se na sljedeći način: Prvi igrač ima paket vrećica u kojoj su tri boje: crvena, zelena i plava, dok drugi igrač ima paket vrećica u kojoj su sljedeće boje: smeđa, ljubičasta i žuta. Oba igrača, nezavisno jeda od drugog, bacaju vrećice prema zidu koji se nalazi nasuprot njih. Igrači znaju koja je boja u vrečici. Od kombinacije dvije boje koje se nalaze na zidu zavisi koliko će igrač 1 dobiti bodova u odnosu na igrača 2. Cilj igrača 1 je da ostvari što veći broj bodova, dok je cilj igrača 2 da ga u tome spriječi. Data je tabela bodovanja.

	crvena	zelena	plava
smeđa	2	4	0
ljubičasta	4	0	8
žuta	2	5	1

Dati grafički interpretaciju matrične igre, odrediti optimalne strategije igrača i pronaći vrijednost igre.

Zadatak br. 4

Asim Cigla je student Pedagoškog fakulteta, kome je ostalo još 7 predmeta da diplomira. Učeći i čitajući svaki predmet po malo, on je procijenio koliko vremena mu treba da "savlada" predmet i njihovu međusobnu zavisnost, što je prikazano u tabeli.

a) nacrtati PERT mrežu za ovaj projekat

b) pronaći kritičan put

c) odrediti očekivano vrijeme završetka i varijansu projekta

d) izračunati kolika je vjerovatnoća da se projekat završi unutar 20 dana? 25 dana?

		trajanje (u danima)		
Aktivnost	Zavisi od	Optimističko vrijeme (o)	Najvjerovatnije vrijeme (n)	Pesimističko vrijeme (p)
A	-	1	3	5
B	-	3	4	5
C	A, B	4	5	6
D	B	3	5	7
E	D	5	6	13
F	C, E	4	7	10
G	D	6	8	10

(zadaci su skinuti sa stranice pf.unze.ba\nabokov
Za uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(#) Jednu vrstu eksplozivnog plina treba prevesti željeznicom. Plin treba putovati iz mjesta M_1, M_2 i M_3 u odredišta O_1, O_2, O_3 i O_4. Iz mjesta M_1 do odredišta prevoz traje redom 3, 15, 6 i 4 sata. Da bi iz M_2 plin došao do spomenutih odredišta treba po 10, 8, 10 i 5 sati. Konačno prevoz iz M_3 traju 4, 3, 6 i 10 sati. Treba napraviti takav plan da je što je moguće manje plina na najdužem putu. U mjestima M_1, M_2 i M_3 je na raspolaganju redom 55, 80 i 40 tona plina dok odredišta O_1, O_2, O_3 i O_4 mogu primiti najviše, redom, 55, 55, 90 i 20 tona.

Rj. Provjerimo da li je problem otvorenog ili zatvorenog tipa

	O_1	O_2	O_3	O_4	na raspolag.
M_1	3	15	6	4	55
M_2	10	8	10	5	80
M_3	4	3	6	10	40
mogu primiti	55	55	90	20	220 / 175

Problem je otvorenog tipa. Uvodimo fiktivno mjesto M_4 koje ima na raspolaganju $220-175=45$ tona plina i čije je vrijeme dostave u odredišta 0 sati.

Početno bazično rješenje napravimo dijagonalnom metodom.

3 (55)	15 (ε)	6	4	$55+\varepsilon$
10	8 ($55-\varepsilon$)	10 ($25+2\varepsilon$)	5	$80+\varepsilon$
4	3	6 ($40+\varepsilon$)	10	$40+\varepsilon$
0	0	0 ($25-3\varepsilon$)	0 ($20+4\varepsilon$)	$45+\varepsilon$
55	55	90	$20+4\varepsilon$	

Bazični problem u prethodnoj tablici ima 6 varijabli različitih od nule. Međutim prema $m+n-1=7$, treba imati 7 varijabli različitih o nule.

Uvodimo proizvoljno malu veličinu ε.

Napravimo transformaciju prema formuli

$$h_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{za } c_{ij} < t_{max} \\ 1, & \text{za } c_{ij} = t_{max} \\ M, & \text{za } c_{ij} > t_{max} \end{cases}.$$

gdje je u našem slučaju $t_{max} = 15$

					α_i
0 / 55	1 / ε	0 / -1	0 / -1	$55+\varepsilon$	0
0 / 1	0 / $55-\varepsilon$	0 / $25+2\varepsilon$	0 / 0	$80+\varepsilon$	-1
0 / 1	0 / 0	0 / $40+\varepsilon$	0 / 0	$40+\varepsilon$	-1
0 / 1	0 / 0	0 / $25-3\varepsilon$	0 / $20+4\varepsilon$	$45+\varepsilon$	-1
55	55	90	$20+4\varepsilon$		
β_j: 0	1	1	1		

Računamo karakteristike nebazičnih polja uz pomoć formule $k_{ij} = c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j)$.

Tabela ima negativne vrijednosti $\Rightarrow$ plan nije optimalan. Polje (1,4) ima manje vrijeme od polja (1,3) te želimo da polje (1,4) bude bazično

				α_i
0 / 55	M / M+1	0 / 0	0 / ε	0
1 / 0	0 / 55	1 / 25+ε	0 / −1	1
0 / 0	0 / 1	0 / 40+ε	1 / 1	0
0 / 0	0 / 1	0 / 25−2ε	0 / 20+3ε	0
β_j: 0	−1	0	0	

$t_{max} = 10$

računamo karakteristike nebazičnih polja

Plan nije optimalan.

				α_i
0 / 55	M / M	0 / −1	0 / ε	0
1 / 1	0 / 55	1 / 5−2ε	0 / 20+3ε	0
0 / 1	0 / 1	0 / 40+ε	1 / 2	−1
0 / 1	0 / 1	0 / 45+ε	0 / 1	−1
β_j: 0	0	1	0	

$t_{max} = 10$

računamo karakteristike nebazičnih polja

Plan nije optimalan

				α_i
0 / 55	M / M+1	0 / ε	0 / 1	0
1 / 0	0 / 55	1 / 5−3ε	0 / 20+4ε	1
0 / 0	0 / 1	0 / 40+ε	1 / 2	0
0 / 0	0 / 1	0 / 45+ε	0 / 1	0
β_j: 0	−1	0	−1	

$t_{max} = 10$

računamo karakteristike nebazičnih polja

Plan je optimalan

Najbolje što se može postići je da 5 tona putuje iz M_2 u O_3 10 sati. Ostali plin će putovati kraće.

(#) Proizvodnom procesu kreiranja hemiske olovke karakteriše tri različite vrste poslova, koji se istovremeno obavljaju na mašinama M_1 i M_2. Potrebno vrijeme koje mašine zahtjevaju (u satima) prikazano je na sljedećoj tabeli

	M_1	M_2
P_1	-1	2
P_2	1	-1
P_3	4	1

Na spomenutim poslovima mašine M_1 i M_2 ne smiju raditi, redom, duže od 4, 1 i 12 sati. Količina hemiski olovki koje se proizvede (u jednom satu) je 5 na mašini M_1 i 1 na mašini M_2. Odrediti koliko sati trebaju biti uključene mašine M_1 i M_2 da bi se ostvario maksimalan broj potpuno završenih hemiski olovki. Problem riješiti metodom grananja i ograničavanja.

Rj.

$$\max\ z = 5x_1 + x_2$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$4x_1 + x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$

Zanemarimo ograničenja $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$, uvedimo dopunske promjenjive u_1, u_2 i u_3 i riješimo problem simpleks metodom

$$\begin{array}{rrrrr|r}
-1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
\boxed{1} & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 12 \\
\hline
-5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\uparrow & & & & &
\end{array} \leftarrow$$

$\min\{1, \frac{12}{4}\} = 1$

$I_v + II_v$

$III_v + II_v \cdot (-4)$

$4-4 \quad 0-4$

$1+4 \quad 1-0$

$0+0 \quad 12-4$

$IV_v + II_v \cdot 5$

$-5+5$

$-1-5$

$0+0$

$0+5$

$0+0$

$0+5$

0	1	1	1	0	5
1	-1	0	1	0	1
0	$\boxed{5}$	0	-4	1	8 ←
0	-6	0	5	0	5
	↑				

$\min\{5, \frac{8}{5}\} = \frac{8}{5}$

$I_v - III_v$ (članci) (nove)	$II_v + III_v$ (članci) (nove)
$0 - 0$	$1 + 0$
$1 - 1$	$-1 + 1$
$1 - 0$	$0 + 0$
$1 + \frac{4}{5}$	$1 - \frac{4}{5}$
$0 - \frac{1}{5}$	$0 + \frac{1}{5}$
$5 - \frac{8}{5}$	$1 + \frac{8}{5}$

x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	
0	0	1	$\frac{9}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{17}{5}$
1	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{13}{5}$
0	1	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$
0	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{73}{5}$

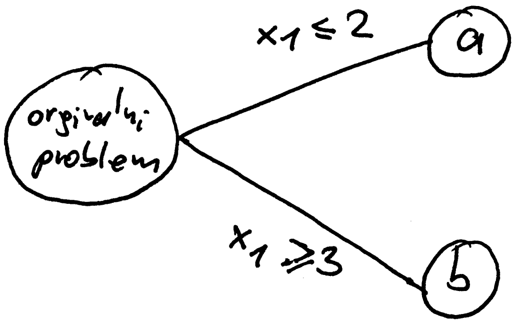
$IV_v + III_v \cdot 6$ (članci) (nove)

$0 + 0$	$5 - \frac{24}{5}$
$-6 + 6$	$0 + \frac{6}{5}$
$0 + 0$	$5 + \frac{48}{5}$

25
48

$x_1 = \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$ $x_2 = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$ $\max Z = \frac{73}{5} = 14\frac{3}{5}$

Kako je $2 < x_1 < 3$ metod grananja i ograničavanja pravi dva nova cjelobrojna problema



a) imamo orginalni problem plus novo ograničenje $x_1 \leq 2$. Zanemarimo ograničenja $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ uvedimo dopunske promjenjive i rješimo novonastali problem simpleks metodom.

-1	2	1	0	0	0	4	
$\boxed{1}$	-1	0	1	0	0	1	←
4	1	0	0	1	0	12	
1	0	0	0	0	1	2	
-5	-1	0	0	0	0	0	
↑							

$\min\left\{1, \frac{12}{4}, 2\right\} = 1$

$I_v + II_v$

$IV_v - II_v$

$III_v + II_v \cdot (-4)$

$4-4$, $1+4$, $0+0$, $0-4$, $1+0$, $0+0$, $12-4$

0	1	1	1	0	0	5	
1	-1	0	1	0	0	1	
0	5	0	-4	1	0	8	
0	$\boxed{1}$	0	-1	0	1	1	←
0	-6	0	5	0	0	5	
	↑						

$V_v + II_v \cdot 5$

$-5+5$, $-1-5$, $0+0$, $0+5$, $0+0$, $0+0$, $0+5$

$\min\left\{5, \frac{8}{5}, 1\right\}$

$I_v - IV_v$

$II_v + IV_v$

$III_v + IV_v \cdot (-5)$

$0+0$, $5-5$, $0+0$, $-4+5$, $1+0$, $0-5$, $8-5$

$V_v + IV_v \cdot 6$

$0+0$, $-6+6$, $0+0$, $5-6$, $0+0$, $0+6$, $5+6$

0	0	1	$\boxed{2}$	0	-1	4	←
1	0	0	0	0	1	2	
0	0	0	1	1	-5	3	
0	1	0	-1	0	1	1	
0	0	0	-1	0	6	11	
			↑				

$\min\left\{\frac{4}{2}, 3\right\} = 2$

$III_v - I_v$ (novi) (stari)

$1-1$, $1-0$, $-5+\frac{1}{2}$, $3-2$

$IV_v + I_v$

$0+0$, $1+0$, $0+\frac{1}{2}$, $-1+1$, $0+0$, $1-\frac{1}{2}$, $1+2$

$V_v + I_v$

$0+0$, $0+0$, $0+\frac{1}{2}$, $-1+1$, $0+0$, $6-\frac{1}{2}$, $11+2$

0	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	2
1	0	0	0	0	1	2
0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{9}{2}$	1
0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	3
0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{11}{2}$	13

$x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $z = 13$

Rješenje su cijeli brojevi pa imamo rješenje za prvu granu.

b) Imamo orginalni problem plus ograničenje $x_1 \geq 3$ tj:

$$\max z = 5x_1 + x_2$$
$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1 - x_2 \leq 1$$
$$4x_1 + x_2 \leq 12 \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$
$$x_1 \geq 3$$

Zanemarimo ograničenje $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$, uvedimo dopunske i artificijalne varijable i riješimo problem

$$\max z = 5x_1 + x_2 - Mw_1$$

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + u_1 &= 4 \\ x_1 - x_2 + u_2 &= 1 \\ 4x_1 + x_2 + u_3 &= 12 \\ x_1 - v_1 + w_1 &= 3 \end{aligned}$$

M je neki veliki broj

-1	2	1	0	0	0	0	4
$\boxed{1}$	-1	0	1	0	0	0	1 ←
4	1	0	0	1	0	0	12
1	0	0	0	0	-1	1	3
-M-5	-1	0	0	0	M	0	-3M
↑							

$\min\{1, \frac{12}{4}, 3\} = 1$

$I_v + II_v$ $\quad III_v + II_v(-4)$

4-4, 1+4, 0+0, 0-4 $\quad$ 1+0, 0+0, 0+0, 12-4

$IV_v - II_v$ $\quad V_v + II_v(M+5)$

-M-5+M+5, -1-M-5, 0+0, 0+M+5, 0+0 $\quad$ M+0, 0+0, -M+M+5

0	1	1	1	0	0	0	5
1	-1	0	1	0	0	0	1
0	$\boxed{5}$	0	-4	1	0	0	8 ←
0	1	0	-1	0	-1	1	2
0	-M-6	0	M+5	0	M	0	5-2M
	↑						

$\min\{5, \frac{8}{5}, 2\} = \frac{8}{5}$

$I_v - III_v$ (stari) (novi)

$0-0$, $1-1$, $1-0$, $1+\frac{4}{5}$ $\quad$ $0-\frac{1}{5}$, $0-0$, $0-0$, $5-\frac{8}{5}$

$II_v + III_v$ (stari) (novi)

$1+0$, $-1+1$, $0+0$, $1-\frac{4}{5}$ $\quad$ $0+\frac{1}{5}$, $0+0$, $0+0$, $1+\frac{8}{5}$

$IV_v - III_v$ (stari) (novi)

$0-0$, $1-1$, $0-0$, $-1+\frac{4}{5}$ $\quad$ $0-\frac{1}{5}$, $-1-0$, $1-0$, $2-\frac{8}{5}$

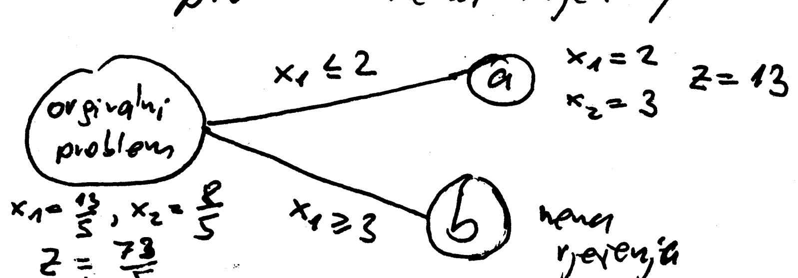
$V_v + III_v(M+6)$ (stari) (novi)

$0+0$, $-M-6+M+6$, $0+0$, $M+5-\frac{4}{5}M-\frac{24}{5}$, $0+\frac{1}{5}(M+6)$, $M+0$, $0+0$, $5-2M+\frac{8}{5}M+\frac{48}{5}$

x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	v_1	w_1	
0	0	1	$\frac{9}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{17}{5}$
1	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{13}{5}$
0	1	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{8}{5}$
0	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	-1	1	$\frac{2}{5}$
0	0	0	$\frac{1}{5}M+\frac{1}{5}$	$\frac{M}{5}+\frac{6}{5}$	M	0	$\frac{73}{5}-\frac{2}{5}M$

$x_1 = \frac{13}{5}$, $x_2 = \frac{8}{5}$, $w_1 = \frac{2}{5}$

problem nema rješenja.



Mašine M_1 i M_2 maksimalno mogu biti uključene redom 2 i 3 sata i broj hemikalija koji će se proizvesti je 13.

(#) Poznata japanska igra Nui-Kami igra se na sljedeći način: Prvi igrač ima paket vrećica u kojoj su tri boje crvena, zelena i plava, dok drugi igrač ima paket vrećica u kojoj su sljedeće boje smeđa, ljubičasta i žuta. Oba igrača, nezavisno jedan od drugog, bacaju vrećice prema zidu koji se nalazi nasuprot njih. Igrači znaju koja je boja u vrećici. Od kombinacije dvije boje koje se nalaze na zidu zavisi koliko će igrač 1 dobiti bodova u odnosu na igrača 2. Tabela bodovanja izgleda ovako:

	crvena	zelena	plava
smeđa	2	4	0
ljubičasta	4	0	8
žuta	2	5	1

Dati grafičku interpretaciju matrične igre, odrediti optimalne strategije igrača i pronaći vrijednost igre.

Rj. Nacrtajmo tabelu na drugačiji način. Provjerimo da li matrična igra ima sedlo.

	igrač 2 \ igrač 1	smeđa (q_1)	ljubičasta (q_2)	žuta (q_3)	igrač 1 minimalno može da dobije
p_1	crvena	2	4	2	2
p_2	zelena	4	0	5	0
p_3	plava	0	8	1	0
	igrač 2 maksimalno može da izgubi	4	8	5	

$$\alpha = \max\{2,0,0\} = 2$$

$$\beta = \min\{4,8,5\} = 4$$

$$\alpha < V < \beta$$

$$2 < V < 4$$

Matrična igra nema sedlo. Rješenje igre je u domenu čistih strategija.

Iz tabele primjetimo da igrač 2 neće nikad birati žutu boju, zato što je ona uvijek nepovoljnija u odnosu na smeđu boju. Možemo je prekrižiti.

$$Q = (q_1, q_2, 0), \quad q_1 + q_2 = 1, \quad q_i \geq 0.$$

$$P = (p_1, p_2, p_3), \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad p_i \geq 0.$$

Ako prvi igrač odabere crvenu boju, očekivani gubitak igrača 2 je $C(\text{crvena}, Q) = 2q_1 + 4q_2$. Ostale čiste strategije su $C(\text{zelena}, Q) = 4q_1$

$C(\text{plava}, Q) = 8q_2$.

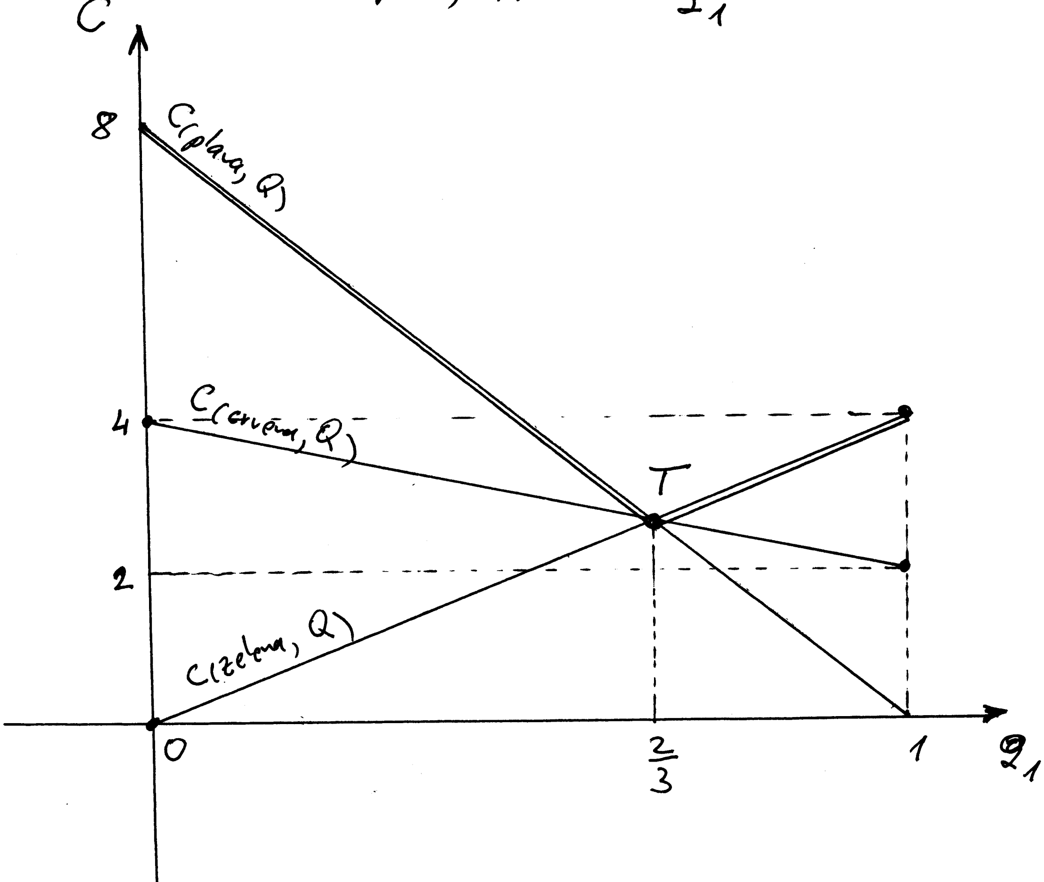
Kako je $q_1 + q_2 = 1$ imamo $C(\text{crv.}, Q) = 4 - 2q_1$

$C(\text{zel.}, Q) = 4q_1$.

$C(\text{plava}, Q) = 8 - 8q_1$

$0 \le q_1 \le 1$

Grafički:



Igrač 2 maksimalno može da izgubi vrijednosti sa podebljane liniju sa grafika. On želi minimizirati maksimalne gubitke i to će postići u vrijednosti T sa grafika. Odredimo tu vrijednost

$$4 - 2q_1 = 4q_1 \qquad 4q_1 = 8 - 8q_1 \qquad q_1 + q_2 = 1$$

$$6q_1 = 4 \qquad 12q_1 = 8 \qquad q_2 = \frac{1}{3}$$

$$\underbrace{q_1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \qquad q_1 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}}_{\text{prave se zaista sijeku u tački } T} \qquad C = 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

Sa grafika možemo primjetiti da za prvog igrača je svejedno koju će strategiju koristiti. Aktivan par strategija može biti bilo koji par crvena-zelena, crvena-plava ili zelena-plava.

Ako prvi igrač za aktivan par strategija uzme crvenu-zelenu matrica cijena je

$$
\begin{array}{c|c|c|}
 & q_1 & q_2 \\
\hline
p_1 & 2 & 4 \\
\hline
p_2 & 4 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

$$2p_1 + 4p_2 = V$$

$$4p_1 = V$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

$$p_1 = \frac{2}{3}, \quad p_2 = \frac{1}{3}, \quad V = \frac{8}{3}$$

Optimalna strategija prvog igrača je $P = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$, a drugog $Q = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$. Vrijednost igre je $V = \frac{8}{3}$.

(#) Asim Cigla je student Pedagoškog fakulteta, kome je ostalo još 7 predmeta da diplomira. Učeći i čitajući svaki predmet po malo, on je procijenio koliko vremena mu treba da "savlada" predmet i njihovu međusobnu zavisnost što je prikazano u tabeli.

a) nacrtati PERT mrežu za ovaj projekat
b) pronaći kritičan put
c) odrediti očekivano vrijeme završetka i varijansu projekta
d) Kolika je vjerovatnoća da će se projekat završiti unutar 20 dana? 25 dana?

Aktiv-nost	Zavisi od	trajanje (u danima) Optimističko vrijeme (o)	Najvjerovatnije vrijeme (n)	Pesimističko vrijeme (p)
A	—	1	3	5
B	—	3	4	5
C	A, B	4	5	6
D	B	3	5	7
E	D	5	6	13
F	C, E	4	7	10
G	D	6	8	10

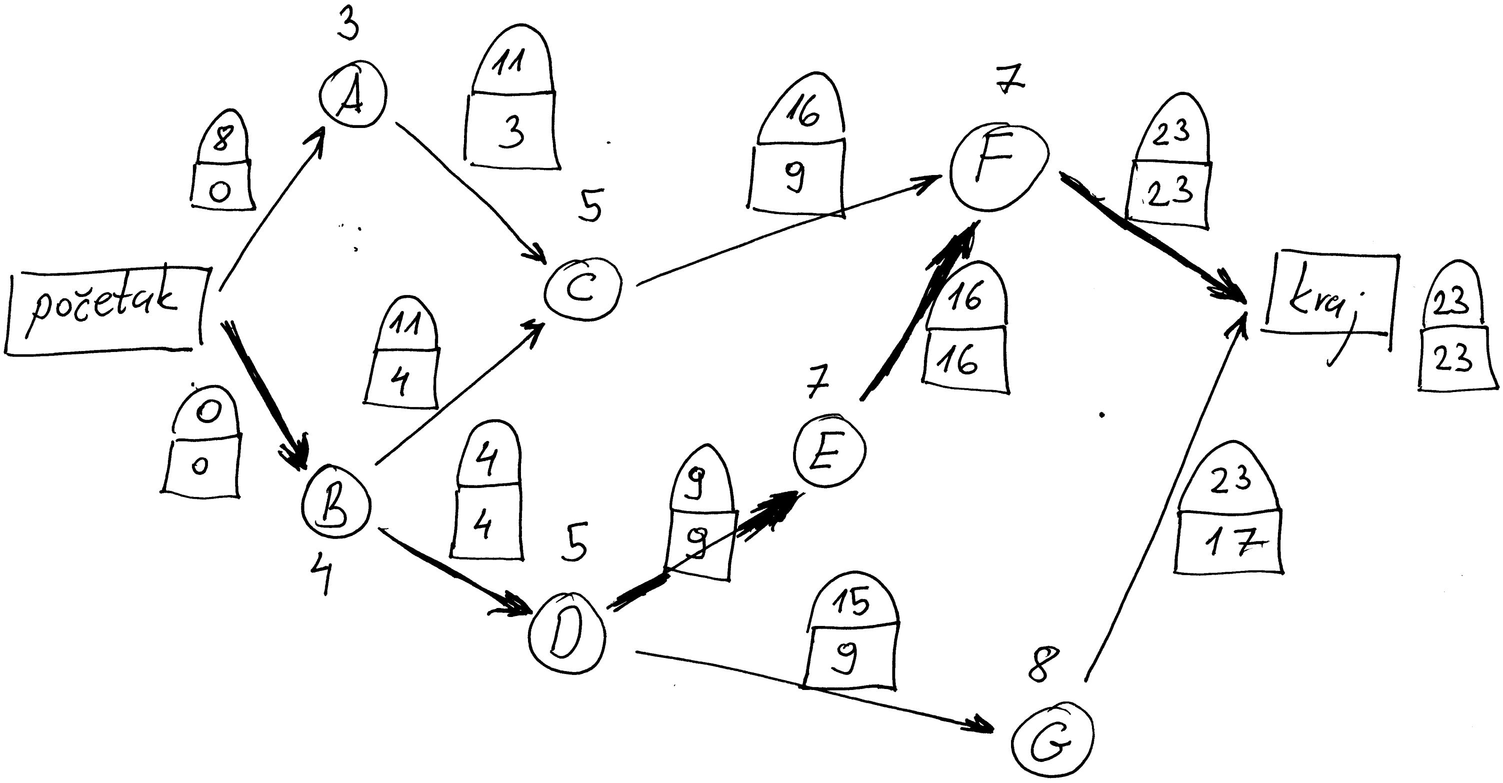
Rj: Očekivano vrijeme se računa po formuli $E = \frac{o+p+4n}{6}$

Varijansa $\sigma^2 = \left(\frac{p-o}{6}\right)^2$

Beta distribucija je

Aktivnost	Očekivano vrijeme E	Varijansa σ^2
A	3	0,4444
B	4	0,1111
C	5	0,1111
D	5	0,4444
E	7	1,7777
F	7	1
G	8	0,4444

a) PERT dijagram



b) Kritičan put je B-D-E-F

c) Očekivano vrijeme završetka projekta

$$E(P) = E(B) + E(D) + E(E) + E(F)$$
$$= 4+5+7+7 = 23 \text{ dana}$$

Varijansa projekta

$$\sigma^2 = 0{,}1111 + 0{,}4444 + 1{,}7777 + 1 = 3{,}3332$$

d) Vjerovatnoća da će se projekat završiti unutar 20 dana:

$K=20$, $E=23$, $\sigma = \sqrt{3{,}3332} \approx 1{,}83$

$$c = \frac{K-E}{\sigma} = \frac{20-23}{1{,}83} = -1{,}64$$

$P(T \leq 20) = P(Z \leq c) =$ (iz tabele normalne distribucije)
$= P(Z \leq -1{,}64) = 0{,}0505$

Vjerovatnoća da će se projekat završiti unutar 25 dana

$K=25$, $E=23$, $\sigma \approx 1{,}83$

$$c = \frac{K-E}{\sigma} = \frac{25-23}{1{,}83} = 1{,}09$$

$P(T \leq 25) = P(Z \leq c) =$
$= P(Z \leq 1{,}09) = 1 - 0{,}1379 = 0{,}8621$
(iz tabele normalne distribucije)