Pismeni ispit iz predmeta Matematika, 16.06.2009.
Neki zadaci nisu detaljno raspisani,
Za uočene greške pisati na infoarrt@gmail.com

1. U razvoju binoma $\left(\frac{1}{\sqrt{x^3}}+\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[8]{x^3}}\right)^{35}$ naći član koji sadrži x^7.

Rj. $\left(\frac{1}{\sqrt{x^3}}+\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[8]{x^3}}\right)^{35}=\left(x^{-\frac{3}{2}}+x^{-\frac{1}{8}}\right)^{35}=\sum_{k=0}^{35}\binom{35}{k}\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)^{35-k}\left(x^{-\frac{1}{8}}\right)^{k}=$

$$=\sum_{k=0}^{35}\binom{35}{k}x^{\frac{-105+3k}{2}-\frac{k}{8}}=\sum_{k=0}^{35}\binom{35}{k}x^{\frac{-420+11k}{8}}$$

$\frac{-420+11k}{8}=7 \Rightarrow 11k=476$
$k\approx 43,2$

Ni jedan član u razvoju binoma ne sadrži x^7.

2. Dokazati metodom matematičke indukcije tvrdnju $\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{5^j}=\frac{5}{16}-\frac{4n+5}{16\cdot 5^n}$ $(n\in\mathbb{N})$.

Rj. $\frac{1}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\dots+\frac{n}{5^n}=\frac{5}{16}-\frac{4n+5}{16\cdot 5^n}$, $n\in\mathbb{N}$

BAZA INDUKCIJE

$n=1$: $\frac{1}{5}=\frac{5}{16}-\frac{4+5}{16\cdot 5}=\frac{25-9}{16\cdot 5}=\frac{16}{16\cdot 5}=\frac{1}{5}$

tvrdnja je tačna za $n=1$.

KORAK INDUKCIJE

pretpostavimo da je jednakost $\frac{1}{5}+\frac{2}{5^2}+\dots+\frac{k}{5^k}=\frac{5}{16}-\frac{4k+5}{16\cdot 5^k}$ tačna za $k=1,2,\dots,n$. Dokažimo da je tačna i za $n+1$

tj. $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\dots+\frac{n}{5^n}+\frac{n+1}{5^{n+1}}=\frac{5}{16}-\frac{4(n+1)+5}{16\cdot 5^{n+1}}$

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\dots+\frac{n}{5^n}+\frac{n+1}{5^{n+1}}=\frac{5}{16}-\frac{4n+5}{16\cdot5^n}+\frac{n+1}{5^{n+1}}=$$

$$=\frac{5}{16}-\frac{4n+5}{16\cdot5^n}+\frac{n+1}{5^n\cdot5}=\frac{5}{16}+\frac{(-4n-5)\cdot5+(n+1)\cdot16}{16\cdot5^n\cdot5}=$$

$$=\frac{5}{16}+\frac{-20n-25+16n+16}{16\cdot5^{n+1}}=\frac{5}{16}+\frac{-4n-4-5}{16\cdot5^{n+1}}=\frac{5}{16}-\frac{4(n+1)+5}{16\cdot5^{n+1}}$$

prema tome, tvrdnja je tačna ~~za~~ $n+1$

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve

3. Naći sve vrijednosti $\sqrt[3]{z}$ ako je $z=(\sqrt{3}-i)^5(1+i\sqrt{3})$.

Rj. $z_1=\sqrt{3}-i$ $\qquad z_1=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$|z_1|=2,\ \varphi_1=-\frac{\pi}{6}$ $\qquad z_1^5=2^5\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$

$z_2=1+i\sqrt{3}$ $\qquad z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

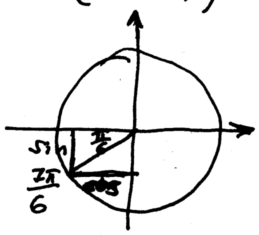
$|z_2|=2,\ \varphi_2=\frac{\pi}{3}$ $\qquad z_1^5\cdot z_2=2^6\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=z$

$$z_k=\sqrt[3]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right)$$

$z_0=4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=2(\sqrt{3}-i)$

$z_1=4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=4i$

$z_3=4\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)\to$



$\sqrt[3]{z}\in\{2(\sqrt{3}-i),\ 4i,\ -2(\sqrt{3}+i)\}$ tražena rješenja

4. Riješiti matričnu jednačinu $AX=(X^{-1}+B^{-1})^{-1}$, ako je $A=\begin{bmatrix}3&-4&5\\0&-3&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&-1\end{bmatrix}$. $I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

Rj. $AX=(X^{-1}+B^{-1})^{-1}\ /^{-1}$

$X^{-1}\cdot A^{-1}=X^{-1}+B^{-1}$

$X^{-1}\cdot A^{-1}-X^{-1}=B^{-1}$

$X^{-1}(A^{-1}-I)=B^{-1}$

$X^{-1}=B^{-1}(A^{-1}-I)^{-1}\ /^{-1}$

$X=(A^{-1}-I)B$

$\det A=9$

$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{4}{9}&\frac{11}{9}\\0&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\0&0&-1\end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix}\frac{8}{9}&-\frac{38}{9}&-\frac{5}{3}\\-\frac{10}{3}&-\frac{2}{3}&3\\-4&4&2\end{bmatrix}$

5. Ispitati f-ju i nacrtati joj grafik $y = \frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$.

Rj:

$D: x \in \mathbb{R}$

$(0,4)$ je tačka presjeka sa y-osom

f-ja nije ni parna ni neparna

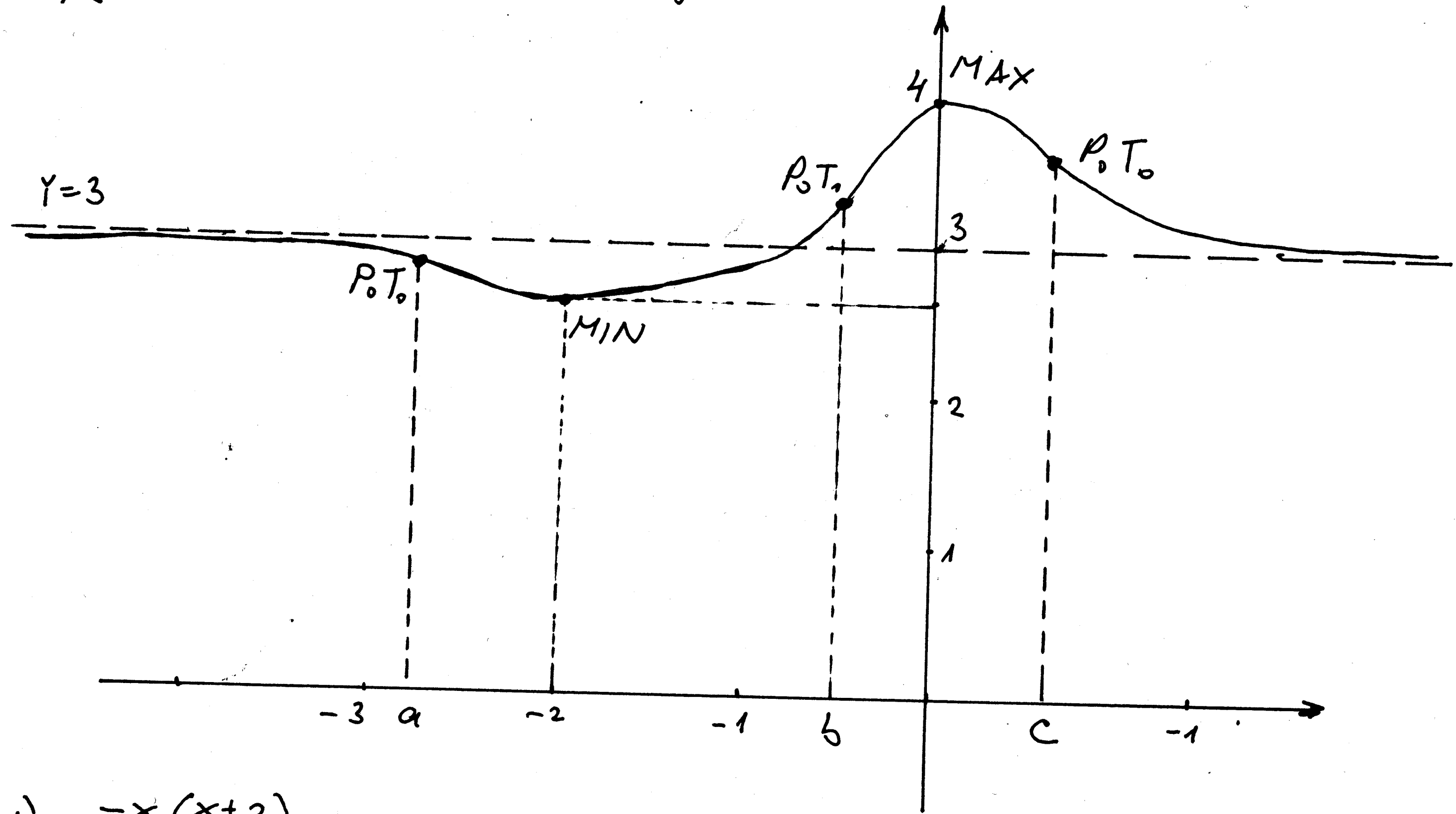
nije periodična

f-ja nema nula

$f(x) > 0 \ \forall x$ (znak f-je)

f-ja je definisana u svakoj tački $\Rightarrow$ nema V. A.

$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = 3 \Rightarrow y = 3$ je H. A.



$$y' = \frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$y'' = \frac{2(x^3+3x^2-1)}{(x^2+x+1)^3}$$

$-2 \quad 0$ ← prekidi y + nule y'

x	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,+\infty)$
y'	$-$	$+$	$-$
y	↘	↗	↘
	MIN	MAX	

rast i opadanje

$(-2, 2\frac{2}{3})$ je tačka minimuma

$(4, 0)$ je tačka maksimuma

$g(x) = x^3 + 3x^2 - 1$

$g(-3) = -1,\ g(-2) = 19 \Rightarrow$ postoji nula između -3 i -2 označimo je sa a

$g(0) = -1,\ g(1) = 3 \Rightarrow$ postoji nula između 0 i 1 označimo je sa c

$g(0) = -1,\ g(-1) = 1$ postoji nula između 0 i -1 označimo je sa b

x	$(-\infty,a)$	(a,b)	(b,c)	$(c,+\infty)$
y''	$-$	$+$	$-$	$+$
y	∩	∪	∩	∪
		P.T.	P.T.	P.T.

konv. i konk.

6. Ispitati f-ju i nacrtati joj grafik: $y = x + 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$.

Rj. $y = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2}$

$x^3 + x^2 - x - 1 = 0$

$x^2(x+1) - 1(x+1) = 0 \Rightarrow (x^2-1)(x+1) = 0$

$D: x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$(1,0)$ i $(-1,0)$ nule f-je $\quad (x-1)(x+1)^2 = 0$

f-ja nije ni parna ni neparna
nije periodična

f-ja ne siječe y-osu

$-1 \quad 0 \quad 1$ ← prekidi y + nule y

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$x+1$	−	+	+	+
x^2-1	+	−	−	+
y	−	−	−	+

znak f-je

$\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = -\infty$

$\Rightarrow x = 0$ je V. A.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$ nema H. A.

$y = kx + n$, $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - kx] = 1$

$y = x + 1$ je K. A.

$y' = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{x^3 + x + 2}{x^3} = \frac{(x+1)\overbrace{(x^2-x+2)}^{>0\ \forall x}}{x^3}$

$-1 \quad 0$ ← prekidi y + nule y'

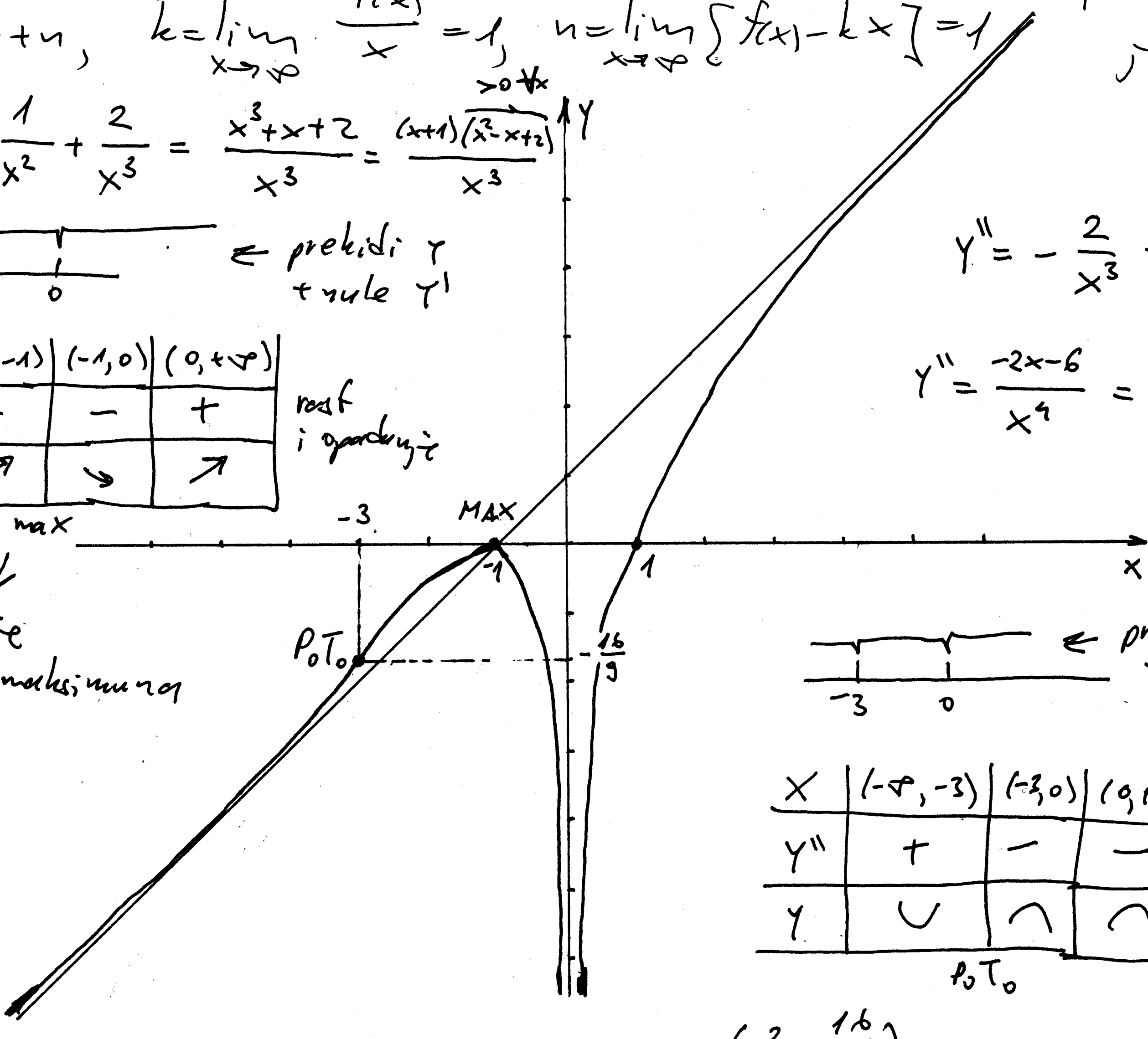
x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,+\infty)$
y'	+	−	+
y	↗	↘	↗

rast i opadanje

max

$y'' = -\frac{2}{x^3} - \frac{6}{x^4}$

$y'' = \frac{-2x-6}{x^4} = \frac{(-2)(x+3)}{x^4}$



$(-1,0)$ je tačka maksimuma

$-3 \quad 0$ ← prekidi y + nule y''

x	$(-\infty,-3)$	$(-3,0)$	$(0,+\infty)$
y''	+	−	−
y	∪	∩	∩

P. T.

$(-3, -\frac{16}{9})$ je prevojna tačka

7. Ispitati f-ju i nacrtati joj grafik $y = e^{\frac{x^2-8}{x+3}}$.

Rj. $D: x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

f-ja nije ni parna ni neparna

f-ja nije periodična

$(0, e^{-\frac{8}{3}})$ je presjek sa y-osom

$e^{-\frac{8}{3}} \approx 0{,}06$

f-ja nema nule

$y > 0 \quad \forall x \in D$ (znak f-je)

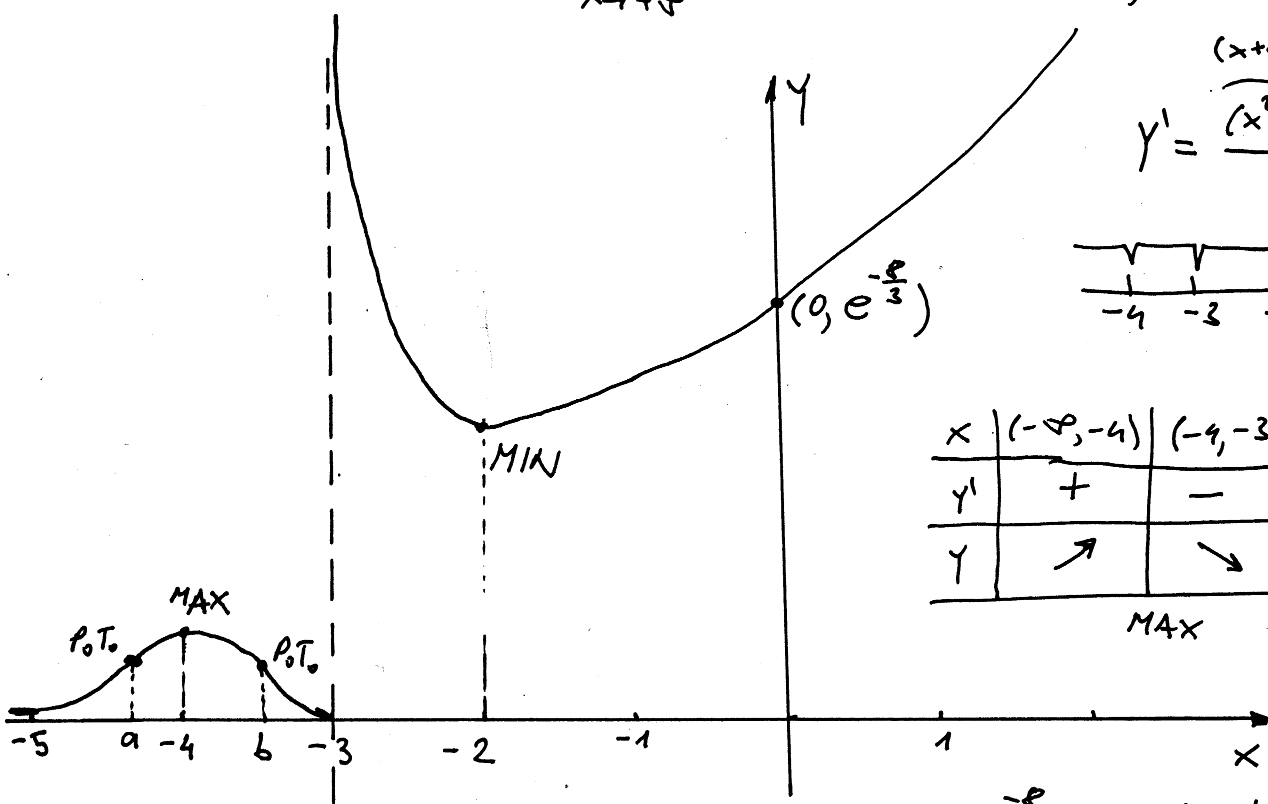
$x = -3$ je prekid f-je

$\lim\limits_{x \to -3-0} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -3+0} f(x) = \infty \Rightarrow x = -3$ je V. A.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ je H. A.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ f-ja nema K. A.



$$y' = \frac{\overbrace{(x^2+6x+8)}^{(x+4)(x+2)} e^{\frac{x^2-8}{x+3}}}{(x+3)^2}$$

-4, -3, -2: prekidi y + nule y'

x	$(-\infty,-4)$	$(-4,-3)$	$(-3,-2)$	$(-2,+\infty)$
y'	+	−	−	+
y	↗	↘	↘	↗

MAX, MIN: rast i opad

$(-4, e^{-8})$ je tačka maksimuma

$(-2, e^{-4})$ je tačka minimuma

$$y'' = \frac{(x^4+12x^3+52x^2+98x+70)\, e^{\frac{x^2-8}{x+3}}}{(x+3)^4}$$

$g(x) = x^4 + 12x^3 + 52x + 98x + 70$

$$\left.\begin{array}{l} g(-5) = 5 \\ g(-4) = -2 \\ g(-3) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a \in (-5,-4) \text{ i } b \in (-4,-3) \text{ su nule f-je } y''$$

x	$(-\infty, a)$	(a, b)	$(b, -3)$	$(-3, +\infty)$
y''	+	−	+	+
y	∪	∩	∪	∪

P. T., P. T.: konveksnost i konkavnost

8) Ispitati f-ju i nacrtati joj grafik $y=\dfrac{1}{\ln(x+3)-1}$.

Rj. $\mathcal{D}: x\in(-3,e-3)\cup(e-3,+\infty)$

$y\neq 0\ \forall x$ f-ja nema nula

f-ja nije ni parna ni neparna

f-ja nije periodična

$\left(0,\dfrac{1}{\ln 3-1}\right)$ presjek sa Y-osom

$\lim\limits_{x\to(e-3)-0} f(x)=-\infty \Rightarrow x=e-3$ V. A.

$\lim\limits_{x\to(e-3)+0} f(x)=+\infty \Rightarrow x=e-3$ V. A.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

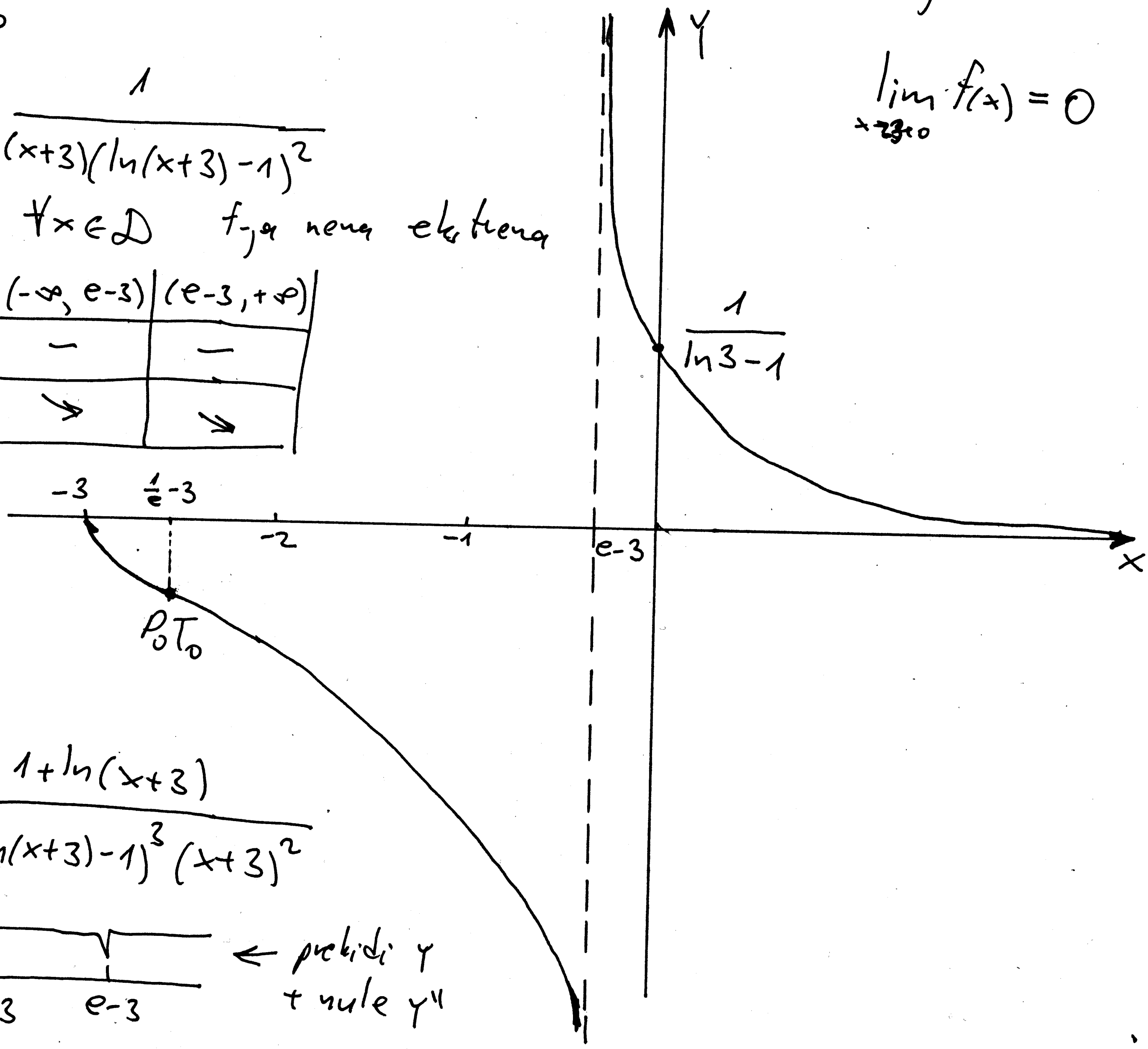
$\Rightarrow y=0$ je H. A.

$\lim\limits_{x\to-3+0} f(x)=0$

$y'=-\dfrac{1}{(x+3)(\ln(x+3)-1)^2}$

$y'\neq 0,\ \forall x\in\mathcal{D}$ f-ja nema ekstrema

x	$(-\infty,e-3)$	$(e-3,+\infty)$
y'	$-$	$-$
y	$\searrow$	$\searrow$



$y''=\dfrac{1+\ln(x+3)}{(\ln(x+3)-1)^3(x+3)^2}$

$\frac{1}{e}-3$ $e-3$ ← prekidi y + nule y''

x	$(-3,\frac{1}{e}-3)$	$(\frac{1}{e}-3,e-3)$	$(e-3,+\infty)$
y''	$+$	$-$	$-$
y	$\cup$	$\cap$	$\cap$

P. T.

9. Izračunati integral $I=\int \frac{21x^2-94x+72}{x^3-7x^2+12x}\,dx$.

Rj.:

$$\frac{21x^2-94x+72}{x^3-7x^2+12x}=\frac{21x^2-94x+72}{x(x-3)(x-4)}$$

$$\frac{21x^2-94x+72}{x(x-3)(x-4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x-4} \quad /x(x-3)(x-4)$$

$$21x^2-94x+72=A(x^2-7x+12)+B(x^2-4x)+C(x^2-3x)$$

$$\begin{aligned} A+B+C&=21 \\ -7A-4B-3C&=-94 \\ 12A&=72 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad A=6,\ B=7,\ C=8$$

$$I=\int\left(\frac{6}{x}+\frac{7}{x-3}+\frac{8}{x-4}\right)dx=6\ln|x|+7\ln|x-3|+8\ln|x-4|+C$$

10. Izračunati integral $I=\int \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x^2}\,dx$.

Rj.:

$$I=\int \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x^2}\,dx=\left|\begin{matrix} u=\operatorname{arctg} 2x & dv=\frac{dx}{x^2} \\ du=\frac{2}{1+4x^2}\,dx & v=-\frac{1}{x}\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{1}{x}\operatorname{arctg} 2x+2\int\frac{dx}{x(1+4x^2)}=-\frac{1}{x}\operatorname{arctg} 2x+2I_1$$

$$\frac{1}{x(1+4x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+4x^2} \quad /x(1+4x^2)$$

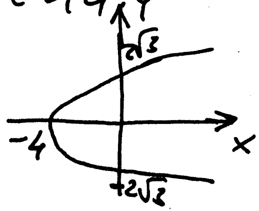
$$1=A(1+4x^2)+(Bx+C)x=A(4x^2+1)+Bx^2+Cx$$

$$\begin{aligned} 4A+B&=0 \\ C&=0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} A&=1 \\ B&=-4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad I_1=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{4x}{1+4x^2}\right)dx$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\int\frac{8x}{1+4x^2}\,dx=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|1+4x^2|$$

$$I=-\frac{1}{x}\operatorname{arctg} 2x+2\ln|x|-\ln|1+4x^2|+C.$$

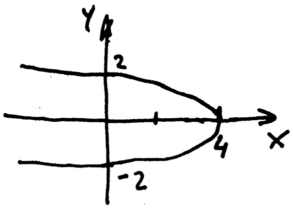
11. Izračunati površinu figure koja je zatvorena parabolama $y^2=4-x$ i $y^2=3x+12$.



Rj. $y^2=4-x$

$x=0 \Rightarrow y_{1,2}=\pm 2$

$y=0 \Rightarrow x=4$



$y^2=3x+12$

$x=0 \Rightarrow y=\pm 2\sqrt3 \approx 3,46$

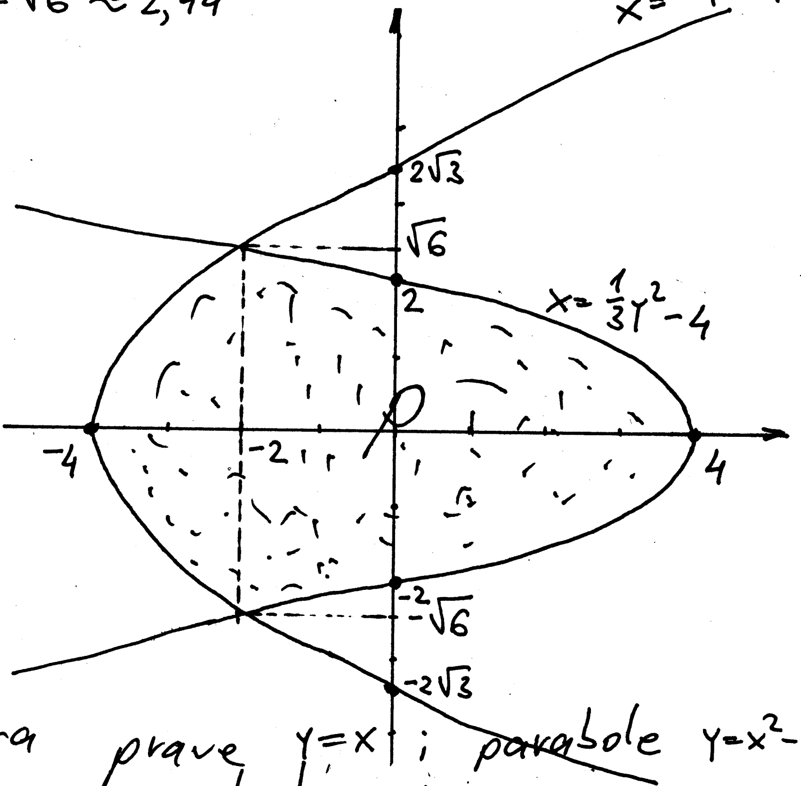
$y=0 \Rightarrow x=-4$

$$\begin{aligned} y^2&=4-x\\ y^2&=3x+12\\ \hline 4-x&=3x+12\\ x&=-2 \end{aligned}$$

$x=-2 \Rightarrow y_{1,2}=\pm\sqrt6 \approx 2,44$

$$P=\int_{-\sqrt6}^{\sqrt6}\left[(-y^2+4)-\left(\frac13 y^2-4\right)\right]dy=$$

$$\ldots=\frac{32}{3}\sqrt6$$



12. U presječnim tačkama prave $y=x$ i parabole $y=x^2-2$ povučene su tangente na parabolu. Nacrtati sliku, te izračunati veličinu površine što je zatvaraju tangente sa parabolom.

$y=-2x-3$ jednačina tangente na parabolu u tački $(-1,-1)$

$y=4x-6$ jednačina tang. na par. u tač. $(2,2)$

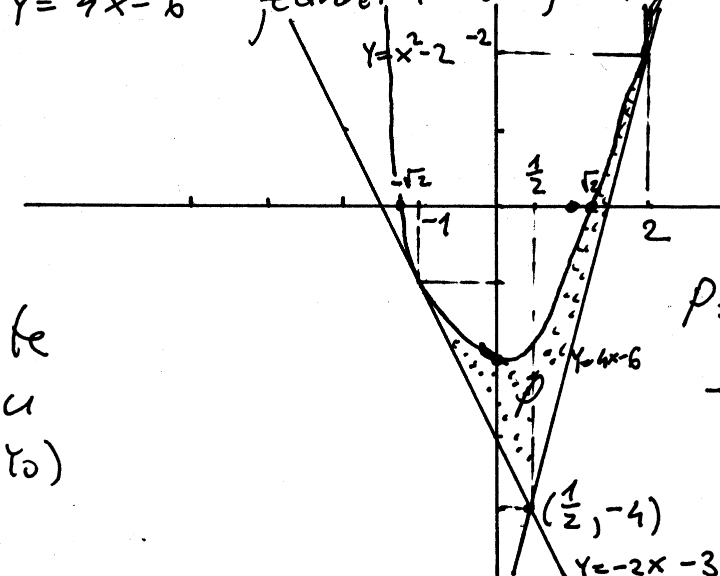
Rj. $$\begin{aligned} y&=x\\ y&=x^2-2 \\ \hline \end{aligned}$$

Presječne tačke prave i parabole su $(-1,-1)$ i $(2,2)$

$y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$ jednačina tangente na krivu $y=f(x)$ u datoj tački (x_0,y_0)

$y'=2x$ $\quad y'(-1)=-2$

$y'(2)=4$



$$P=\int_{-1}^{\frac12}\left[(x^2-2)-(-2x-3)\right]dx+\int_{\frac12}^{2}\left[(x^2-4)-(4x-6)\right]dx$$

$$\ldots=\frac98+\frac98=\frac94$$

13. Naći ekstreme f-je $z = 6xy - x^2y - xy^2$.

Rj.
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6y - 2xy - y^2$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 6x - x^2 - 2xy$$

$$6y - 2xy - y^2 = 0$$
$$6x - x^2 - 2xy = 0$$

$$y(6 - 2x - y) = 0$$
$$x(6 - x - 2y) = 0$$

$$y = 0$$
$$x(6 - x - 2y) = 0$$

$$y = 0,\ x = 0 \quad \text{ili} \quad y = 0,\ 6 - x - 2y = 0 \Rightarrow y = 0,\ x = 6$$

$M_1(0,0)$
$M_2(6,0)$

$$6 - 2x - y = 0$$
$$x(6 - x - 2y) = 0$$

$$6 - 2x - y = 0,\ x = 0 \Rightarrow x = 0,\ y = 6 \quad \text{ili} \quad 6 - 2x - y = 0,\ 6 - x - 2y = 0 \Rightarrow x = 2,\ y = 2$$

$M_3(0,6)$
$M_4(2,2)$

Stacionarne tačke su $M_1(0,0)$, $M_2(6,0)$, $M_3(0,6)$ i $M_4(2,2)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2y$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6 - 2x - 2y$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2x$$

za tačku $M_1(0,0)$
$D = AC - B^2 = -36$ f-ja nema ekstrema

za tačku $M_2(6,0)$
$D = AC - B^2 < 0$ f-ja nema ekstrema

za tačku $M_3(0,6)$
$D = AC - B^2 < 0 \Rightarrow$ f-ja nema ekstrem

za tačku $M_4(2,2)$

$A = -4$
$B = -2$
$C = -4$

$D = AC - B^2 = 16 - 4 = 12 > 0$

f-ja u tački $M_4(2,2)$ ima ekstrem

$A < 0 \Rightarrow$ f-ja ima maksimum

$$z_{max}(2,2) = 6\cdot 4 - 4\cdot 2 - 2\cdot 4 = 24 - 8 - 8 = 8$$

14. Naći uslovne ekstreme f-je $z = x^3y^3$ ako je $x^4+y^4=162$.

Rj. $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$

$F(x,y,\lambda) = x^3y^3 + \lambda(x^4+y^4-162)$

$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2y^3 + 4\lambda x^3$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 3x^3y^2 + 4\lambda y^3$

$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^4 + y^4 - 162$

$$\begin{aligned} 3x^2y^3 + 4\lambda x^3 &= 0 \\ 3x^3y^2 + 4\lambda y^3 &= 0 \\ x^4+y^4-162 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2(3y^3+4\lambda x) &= 0 \\ y^2(3x^3+4\lambda y) &= 0 \\ x^4+y^4 &= 162 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= 0 \\ y^2(3x^2+4\lambda y) &= 0 \\ x^4+y^4 &= 162 \end{aligned} \qquad \text{ili} \qquad \begin{aligned} 3y^3+4\lambda x &= 0 \\ y^2(3x^2+4\lambda y) &= 0 \\ x^4+y^4 &= 162 \end{aligned}$$

$x=0 \quad y = 3\sqrt[4]{2}$

$\lambda = 0$

$\therefore (*)$

$(*)$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} 3y^3+4\lambda x &= 0 \\ y^2 &= 0 \\ x^4+y^4 &= 162 \end{aligned} \qquad \text{ili} \qquad \begin{aligned} 3y^3+4\lambda x &= 0 \quad /\cdot y \ (y\neq 0) \\ 3x^3+4\lambda y &= 0 \quad /\cdot x \ (x\neq 0) \Rightarrow \\ x^4+y^4 &= 162 \end{aligned}$$

$y=0, \quad x = 3\sqrt[4]{2}$

$\lambda = 0$

$$\begin{aligned} 3y^4+4\lambda xy &= 0 \\ 3x^4+4\lambda xy &= 0 \\ x^4+y^4 &= 162 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3y^4 &= 3x^4 \\ x^4+y^4 &= 162 \end{aligned}$$

$|x| = |y| \Rightarrow$

$x = \pm 3 \quad$ i $\quad \lambda = \pm \frac{27}{4}$

Stacionarne tačke su

$M_1(0, 3\sqrt[4]{2})$ za $\lambda=0$, $M_2(3\sqrt[4]{2}, 0)$ za $\lambda = 0$, $M_3(-3,3)$ za $\lambda = +\frac{27}{4}$

$M_4(3,3)$ za $\lambda = -\frac{27}{4}$, $M_5(-3,-3)$ za $\lambda = -\frac{27}{4}$, $M_6(3,-3)$ za $\lambda = +\frac{27}{4}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^3 + 12\lambda x^2$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 9x^2y^2$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x^3y + 12\lambda y^2$

Za M_1, $A=0$, $B=0$, $C=0$
potrebno ispitati f-ju u okolini tačke

~~Za~~ M_2, $A=0$, $B=0$, $C=0$
potrebno ispitati f-ju u okolini tačke

Za $M_3(-3,3)$
$D<0$ f-ja nema ekstrem

Za $M_4(3,3)$, $D<0$ f-ja nema ekstrem $(A=-243, B=729, C=-243, D=-472392)$

Za $M_5(-3,-3)$, $D<0$ f-ja nema ekstrem $(A=-243, B=729, C=-243, D=-472392)$

Za $M_6(3,-3)$, $D<0$ f-ja nema ekstrem $(A=243, B=729, C=243, D=-472392)$

(15.) Riješiti diferencijalnu jednačinu $(y')^3 = 3(xy' - y)$.

Rj. $y'^3 = 3xy' - 3y$

$3y = 3xy' - y'^3 \quad /:3$

$y = xy' - \frac{1}{3}y'^3$ ovo je Lagranžova difer. jednačina (oblika $y = x f(y') + g(y')$)

Uvodimo smjenu $y' = p$

$y = xp - \frac{1}{3}p^3 \quad / \frac{d}{dx} \quad ...(*)$

$y' = p + xp' - \frac{1}{3}\cdot 3p^2 \cdot p'$

$y' = p \Rightarrow p = p + xp' - p^2 \cdot p'$

$xp' - p^2 p' = 0$

$(x - p^2)p' = 0$

$p' = 0$

$p = C \quad (*) \Rightarrow$

$\Rightarrow y = xC - \frac{1}{3}C^3$ opšte rješenje difer. jedn.

$x - p^2 = 0$

$p^2 = x \longrightarrow y'^2 = x$

$p = \pm\sqrt{x}$

$$\frac{y'^3 = 3xy' - 3y}{3y = 3xy' - xy'}$$

$y = \frac{2}{3}xy'$

$y = \frac{\pm 2}{3}x\sqrt{x}$ singularno rješenje

(16.) Naći opće i singularno rješenje diferencijalne jednačine $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0$, te partikularno rješenje za koje je $y(0) = 1$.

Rj. $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0$

$(x^2-1)\frac{dy}{dx} = -2xy^2$

$\frac{dy}{y^2} = -2x \cdot \frac{dx}{x^2-1}$ ovo je dif. jedn. sa razdv. promjenjivim

$\int \frac{dy}{y^2} = -\int \frac{2x\,dx}{x^2-1}$

$\frac{y^{-1}}{-1} = -\ln|x^2-1| + \ln C$

$\frac{1}{y} = \ln|x^2-1| \cdot C$

$y = \frac{1}{\ln|x^2-1| \cdot C}$ opšte rješenje diferencijalne jednačine

$y(0) = 1$

$\frac{1}{\ln|-C|} = 1$

$\ln|-C| = 1$

$C = e$

$C = e$

$y = \frac{1}{\ln e(x^2-1)}$ partikularno rješenje

Singularno rješenje ne može se dobiti iz opšteg rješenja ni za jednu vrijednost konstante C, a zadovoljava datu jednačinu.

$y = 0$ singularno rješenje.