(#) Dokazati metodom matematičke indukcije da vrijedi

$$20 \mid (4\cdot 6^n + 5^{n+1} - 9), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Rj.

$$20 \mid (4\cdot 6^k + 5^{k+1} - 9), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

BAZA INDUKCIJE

$k=0$: $\quad 20 \mid (4\cdot 6^0 + 5^{0+1} - 9)$ $\qquad$ Tvrdnja je tačna za $k=0$.

$20 \mid 0$ $\qquad$ 20 dijeli 0

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za sve brojeve k od od 0 do n tj. $20 \mid (4\cdot 6^k + 5^{k+1} - 9)$ za $k = 0, 1, 2, \dots, n$

(ova pretpostavka uključuje i n tj. $20 \mid (4\cdot 6^n + 5^{n+1} - 9)$.)

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da $20 \mid (4\cdot 6^{n+1} + 5^{n+2} - 9)$

$$\begin{aligned}
4\cdot 6^{n+1} + 5^{n+2} - 9 &= \overset{(5+1)}{6}\cdot 4\cdot 6^n + \overset{(1+4)}{5}\cdot 5^{n+1} - 9 \\
&= 4\cdot 6^n + 5^{n+1} - 9 + 5\cdot 4\cdot 6^n + \overbrace{4\cdot 5^{n+1}}^{5\cdot 5^n} \\
&= (4\cdot 6^n + 5^{n+1} - 9) + 20\cdot 6^n + 20\cdot 5^n \\
&= \underbrace{(4\cdot 6^n + 5^{n+1} - 9)}_{\text{ovo je prema pretpostavci djeljivo sa 20}} + \underbrace{20\,(6^n + 5^n)}_{\text{vidimo da je djeljivo sa 20}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &4\cdot 6^n + 5\cdot 4\cdot 6^n \\ &= 6\cdot 4\cdot 6^n \end{aligned}}$$

Tvrdnja je tačna za $n+1$

ZAKLJUČAK

Tvrdnja je tačna za sve prirodne brojeve uključujući i nulu.

(#) Ispitati i grafički predstaviti f-ju $y=(1-x^2)\,e^{x^2}$.

Rj.

definiciono područje

F-ja je definisana za $\forall x \in \mathbb{R}$

$\mathcal{D}: x \in \mathbb{R}$

nule, presjek sa y-osom, znak

$y=0$ akko $1-x^2=0$

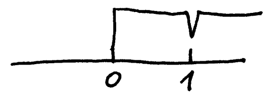
$x^2=1$

$x_{1,2}=\pm 1$

Nule f-je su $A(-1,0)$ i $B(1,0)$

$f(0)=1\cdot e^0=1$

$(0,1)$ je presjek sa y-osom



prekidi y + nule y

parnost (neparnost), periodičnost

$f(-x)=(1-(-x)^2)\,e^{(-x)^2}=$

$=(1-x^2)\,e^{x^2}=f(x)$ f-ja je parna

f-ja nije periodična

f-ja je simetrična u odnosu na y-osu pa ju je dovoljno ispitati za $x>0$

$e^{x^2}>0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

x	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$1-x^2$	$+$	$-$
y	$+$	$-$

znak f-je

ponašanje na krajevima intervala definisanosti i asimptote

f-ja nema prekid $\Rightarrow$ f-ja nema V. A.

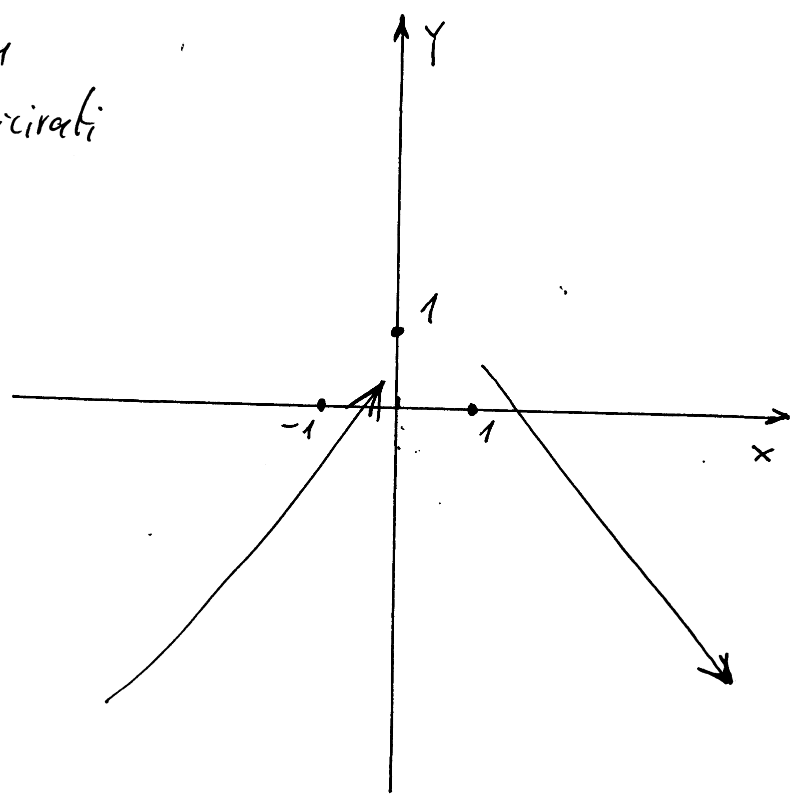
$$\lim_{x\to\mp\infty} f(x)=\lim_{x\to\mp\infty}(1-x^2)\,e^{x^2}=(-\infty)\cdot\infty=-\infty$$ f-ja nema H. A.

Tražimo kosu asimptotu u obliku $y=kx+n$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^2}{x}\,e^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\Big(\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}-x\Big)\,e^{x^2}=(-\infty)\cdot\infty=-\infty$$

f-ja nema kosu asimptotu

Poslije ovog koraka počinjemo skicirati grafik f-je.



rast i opadanje

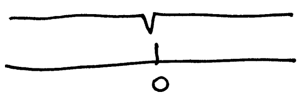
$y'=\left((1-x^2)\,e^{x^2}\right)'=$

$=-2x\,e^{x^2}+(1-x^2)\,e^{x^2}\cdot 2x$

$=2x\,e^{x^2}(-1+1-x^2)=$

$=-2x^3\,e^{x^2}$

$y'=0$ akko $x=0$



prekidi y
+ nule y'

x	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
y'	+	−
y	↗	↘
	max	

rast i opadanje

$f(0) = 1$

ekstremi f-je

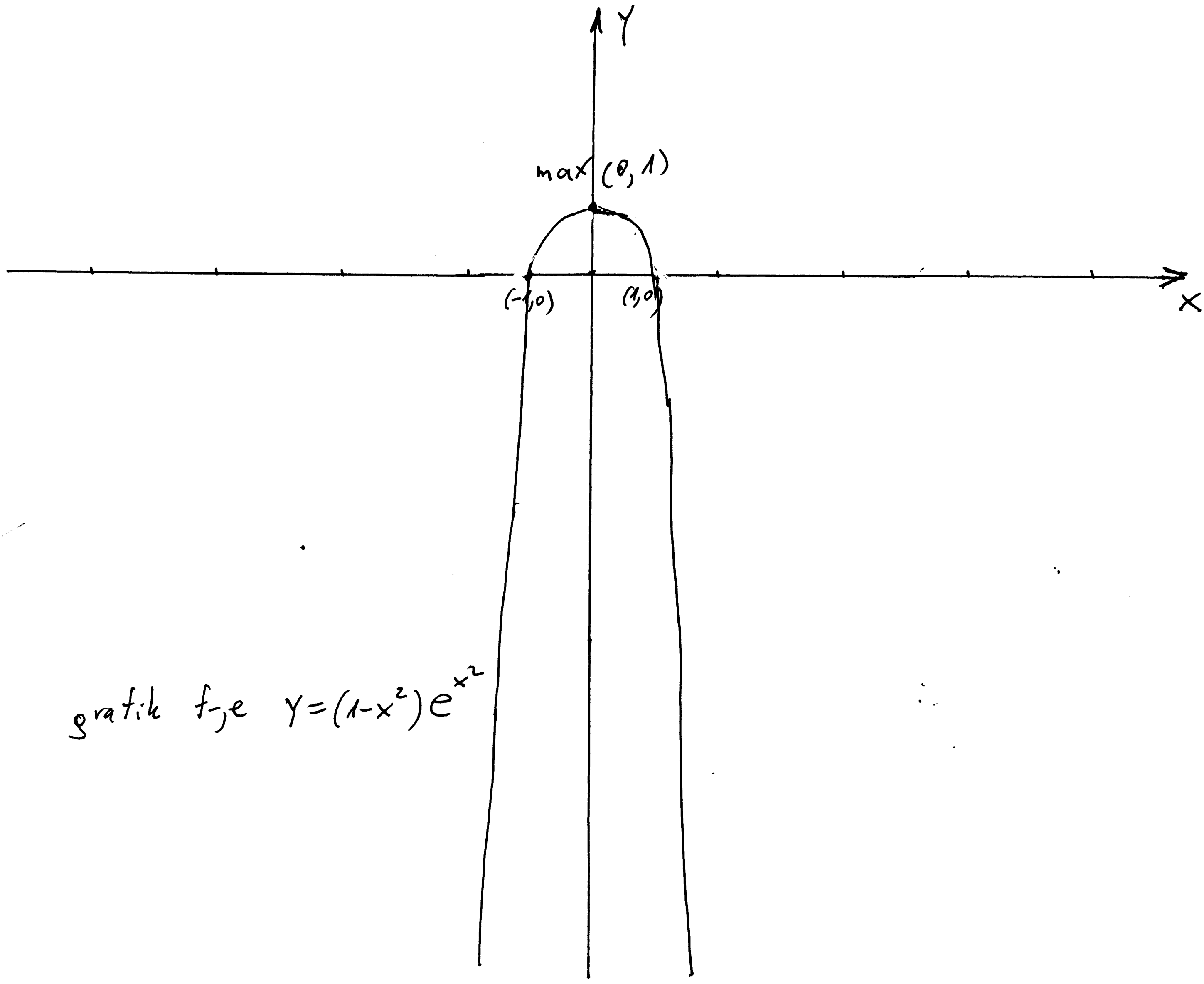
Na osnovu tabele rasta i opadanja f-ja ima ekstrem u tački $(0,1)$ i to maksimum.

prevojne tačke i intervali konveksnosti i konkavnosti

$$y'' = \left(-2x^3 e^{x^2}\right)' = (-2)\left(x^3 e^{x^2}\right)' = (-2)\left(3x^2 e^{x^2} + x^3 \cdot e^{x^2} \cdot 2x\right) =$$
$$= (-2)\, x^2 e^{x^2} \left(3 + 2x^2\right)$$

Primjetimo da je $y'' < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ pa je uvijek $\cap$ oblika.

F-ja nema prevojnih tački



grafik f-je $y = (1-x^2)e^{x^2}$

Izračunati integral $I=\int_1^{7/4}\frac{dx}{16x^2-32x+25}$.

Rj.

$16x^2-32x+25=0$

$D=1024-1600<0$

ne može se rastaviti na faktore

$16x^2-32x+25=(4x)^2-2\cdot 4x\cdot 4+16$

$+9=(4x-4)^2+9$

$$I=\int_1^{\frac{7}{4}}\frac{dx}{16x^2-32x+25}=\int_1^{\frac{7}{4}}\frac{dx}{(4x-4)^2+9}=\left|\begin{array}{ll} 4x-4=3t & x=1 \Rightarrow t=0 \\ 4\,dx=3\,dt & x=\frac{7}{4} \Rightarrow t=1 \\ dx=\frac{3}{4}dt & \end{array}\right|$$

$$=\int_0^1\frac{\frac{3}{4}dt}{9t^2+9}=\frac{\cancel{3}^{\,1}}{4}\cdot\frac{1}{\cancel{9}_{\,3}}\int_0^1\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{12}\operatorname{arctg} t\Big|_0^1=\frac{1}{12}(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0)$$

$$=\frac{1}{12}\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=\frac{\pi}{48}$$ traženo rješenje

(#) Naći ekstreme f-je $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$

Rj.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 9y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 9x$$

$$3x^2 - 9y = 0 \quad /:3$$
$$3y^2 - 9x = 0 \quad /:3$$

$$x^2 - 3y = 0$$
$$y^2 - 3x = 0$$

$$3y = x^2$$
$$y^2 - 3x = 0$$

$$y = \frac{1}{3}x^2$$
$$y^2 - 3x = 0$$

$$\frac{1}{9}x^4 - 3x = 0$$

$$x\left(\frac{1}{9}x^3 - 3\right) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$\frac{1}{9}x^3 - 3 = 0 \quad /\cdot 9$$

$$x^3 = 27$$

$$x_2 = 3$$

$$y = \frac{1}{3}x^2$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0$$

$$x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = 3$$

Stacionarne tačke su $M_1(0,0)$ i $M_2(3,3)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -9$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$$

$M_1(0,0)$:

$A = 0, \; B = -9, \; C = 0$

$D = AC - B^2 = 0 - 81 = -81 < 0$

f-ja u tački M_1 nema ekstrema

$M_2(3,3)$: $A = 18, \; B = -9, \; C = 18,$

$D = AC - B^2 = 18^2 - 9^2 > 0 \Rightarrow$ f-ja u tački M_2 ima ekstrem

$A > 0 \Rightarrow$ f-ja ima minimum

$$z_{min}(3,3) = 3^3 + 3^3 - 9 \cdot 9 + 27 = 81 - 81 = 0$$