Ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka. Obavezno obratiti pažnju na **matematičku kulturu** i **matematičku pismenost** pri rješavanju zadataka: ne ostavljati izraze da "vise" u zraku, svaki korak u računu detaljno naspisati, riječima objasniti šta ste našli, šta je konačno rješenje i slično...

Drugi parcijalni pismeni ispit iz predmeta **Matematika**, 15.01.2013.

1. Naći ekstreme funkcije $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

2. Izračunati integrale (a) $I = \int \frac{sin\,x \cdot cos\,x}{e^x} dx$, (b) $\int \frac{sin\,x + cos\,x}{sin\,x + 2cos\,x}$.

3. Izračunati površinu ravne figure koja je ograničena linijama $y = -x^2$ i $x - y - 2 = 0$.

4. Odrediti opšte rješenje diferencijalne jednačine $2x^3y' = 2x^2y - y^3$.

Ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka. Obavezno obratiti pažnju na **matematičku kulturu** i **matematičku pismenost** pri rješavanju zadataka: ne ostavljati izraze da "vise" u zraku, svaki korak u računu detaljno naspisati, riječima objasniti šta ste našli, šta je konačno rješenje i slično...

Drugi parcijalni pismeni ispit iz predmeta **Matematika**, 15.01.2013.

1. Naći ekstreme funkcije $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

2. Izračunati integrale (a) $I = \int \frac{sin\,x \cdot cos\,x}{e^x} dx$, (b) $\int \frac{sin\,x + cos\,x}{sin\,x + 2cos\,x}$.

3. Izračunati površinu ravne figure koja je ograničena linijama $y = -x^2$ i $x - y - 2 = 0$.

4. Odrediti opšte rješenje diferencijalne jednačine $2x^3y' = 2x^2y - y^3$.

Ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka. Obavezno obratiti pažnju na **matematičku kulturu** i **matematičku pismenost** pri rješavanju zadataka: ne ostavljati izraze da "vise" u zraku, svaki korak u računu detaljno naspisati, riječima objasniti šta ste našli, šta je konačno rješenje i slično...

Drugi parcijalni pismeni ispit iz predmeta **Matematika**, 15.01.2013.

1. Naći ekstreme funkcije $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

2. Izračunati integrale (a) $I = \int \frac{sin\,x \cdot cos\,x}{e^x} dx$, (b) $\int \frac{sin\,x + cos\,x}{sin\,x + 2cos\,x}$.

3. Izračunati površinu ravne figure koja je ograničena linijama $y = -x^2$ i $x - y - 2 = 0$.

4. Odrediti opšte rješenje diferencijalne jednačine $2x^3y' = 2x^2y - y^3$.

\# Naći ekstreme f-je $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Rj.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12$$

$3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \quad /:3$

$6xy - 12 = 0 \quad /:6$

$x^2 + y^2 - 5 = 0 \quad /\cdot x^2$

$xy - 2 = 0 \Rightarrow xy = 2$

$x^4 + (xy)^2 - 5x^2 = 0$

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$x^2 = t \Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0$

$D = 25 - 16 = 9$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$t_1 = \frac{2}{2} = 1$$

$$t_2 = \frac{8}{2} = 4$$

$t_1 = 1 \Rightarrow x^2 = 1$

$x_1 = -1 \Rightarrow -y = 2 \Rightarrow y_1 = -2$

$x_2 = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow y_2 = 2$

$t_2 = 4 \Rightarrow x^2 = 4$

$x_3 = -2 \Rightarrow -2y = 2 \Rightarrow y = -1$

$x_4 = 2 \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1$

Stacionarne tačke su $M_1(-1,-2)$, $M_2(1,2)$, $M_3(-2,-1)$; $M_4(2,1)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x$$

$M_1(-1,-2)$: $A = -6$, $B = -12$, $C = -6$

$D = AC - B^2 = 36 - 12^2 = 36 - 144 < 0$

f-ja u tački M_1 nema ekstrema

$M_2(1,2)$: $A = 6$, $B = 12$, $C = 6$

$D = AC - B^2 = 36 - 144 < 0$ f-ja u tački M_2 nema ekstrema

$M_3(-2,-1)$: $A = -12$, $B = -6$, $C = -12$, $D = AC - B^2 = 12^2 - 6^2 > 0$

f-ja u tački M_3 ima ekstrem, $A < 0 \Rightarrow$ f-ja ima max

$z_{max}(-2,-1) = -8 - 6 + 30 + 12 = 42 - 14 = 28$

$M_4(2,1)$: $A = 12$, $B = 6$, $C = 12$, $D = AC - B^2 = 12^2 - 6^2 > 0$

f-ja u tački M_3 ima ekstrem, $A > 0 \Rightarrow$ f-ja ima min

$z_{min}(2,1) = 8 + 6 - 30 - 12 = 14 - 42 = -28$

(#) Izračunati integral $I=\int \frac{\sin x\cdot\cos x}{e^x}\,dx$.

Rj.

$$I=\int \frac{\sin x\cdot\cos x}{e^x}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2\sin x\cos x}{e^x}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{\sin 2x}{e^x}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int e^{-x}\sin 2x\,dx=\begin{vmatrix} u=e^{-x} & dv=\sin 2x\,dx \\ du=-e^{-x}dx & v=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x-\frac{1}{2}\int e^{-x}\cos 2x\,dx\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}e^{-x}\cos 2x-\frac{1}{4}\int e^{-x}\cos 2x\,dx$$

$$\int e^{-x}\cos 2x\,dx=\begin{vmatrix} u=e^{-x} & dv=\cos 2x\,dx \\ du=-e^{-x}dx & v=\frac{1}{2}\sin 2x\end{vmatrix}=\frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x+\frac{1}{2}\int e^{-x}\sin 2x\,dx$$

Dobili smo

$$\underline{\frac{1}{2}\int e^{-x}\sin 2x\,dx}=-\frac{1}{4}e^{-x}\cos 2x-\frac{1}{8}e^{-x}\sin 2x-\underline{\frac{1}{8}\int e^{-x}\sin 2x\,dx}$$

$$\frac{5}{8}\int e^{-x}\sin 2x\,dx=-\frac{1}{4}e^{-x}\cos 2x-\frac{1}{8}e^{-x}\sin 2x \quad /\cdot\frac{8}{10}$$

$$\frac{1}{2}\int e^{-x}\sin 2x\,dx=-\frac{2}{10}e^{-x}\cos 2x-\frac{1}{10}e^{-x}\sin 2x$$

Kako je $I=\int\frac{\sin x\cdot\cos x}{e^x}\,dx=\frac{1}{2}\int e^{-x}\sin 2x\,dx$ to je

$$\int\frac{\sin x\cdot\cos x}{e^x}\,dx=-\frac{1}{10}e^{-x}\left(2\cos 2x+\sin 2x\right)$$

(#) Izračunati integral $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sin x+2\cos x}\,dx$

Rj. $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sin x+2\cos x}\,dx \begin{matrix} 1:\cos x \\ 1:\cos x \end{matrix} = \int \frac{tg x+1}{tg x+2}\,dx = \left| \begin{matrix} tg x = t \\ x = arctg\, t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| =$

$= \int \frac{t+1}{t+2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt = \int \frac{t+1}{(t+2)(1+t^2)}\,dt$

$\frac{t+1}{(t+2)(t^2+1)} = \frac{A}{t+2} + \frac{Bt+C}{t^2+1} \quad /(t+2)(t^2+1)$

$t+1 = A(t^2+1) + (Bt+C)(t+2)$

$t+1 = A(t^2+1) + B(t^2+2t) + C(t+2)$

$A+B = 0 \Rightarrow A = -B$

$2B+C = 1$

$A+2C = 1 \Rightarrow A = 1-2C$

$A = -B$

$A = 1-2C$

$-B = 1-2C \quad /(-1)$

$B = 2C-1$

$2B+C = 1$

$2(2C-1)+C = 1$

$4C-2+C = 1$

$5C = 3$

$C = \frac{3}{5}, \quad A = 1-\frac{6}{5} = -\frac{1}{5}$

$B = \frac{1}{5}$

$\int \frac{t+1}{(t+2)(t^2+1)}\,dt = \int \frac{-\frac{1}{5}}{t+2}\,dt + \int \frac{\frac{1}{5}t+\frac{3}{5}}{t^2+1}\,dt = -\frac{1}{5}\ln|t+2| + \frac{1}{5}\int \frac{t+3}{t^2+1}\,dt$

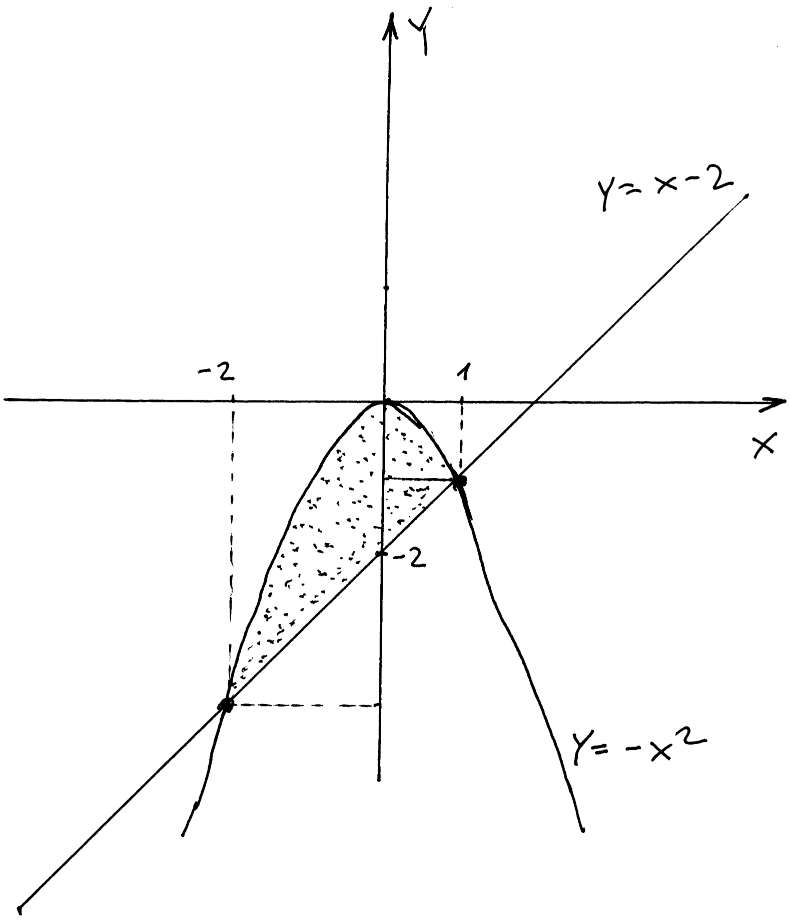
$= -\frac{1}{5}\ln|t+2| + \frac{1}{5}\int \frac{t\,dt}{t^2+1} + \frac{3}{5}\int \frac{dt}{t^2+1} = \left| \begin{matrix} t^2+1 = s \\ 2t\,dt = ds \\ t\,dt = \frac{ds}{2} \end{matrix} \right| =$

$= -\frac{1}{5}\ln|t+2| + \frac{1}{10}\ln|s| + \frac{3}{5}\,arctg\, t + C =$

$= -\frac{1}{5}\ln|tg x+2| + \frac{1}{10}\ln|tg^2 x+1| + \frac{3}{5}\,arctg\,(tg x) + C$

(#) Nađi površinu figure ograničene linijama $y=-x^2$, $x-y-2=0$.

Rj. Nacrtajmo sliku



Pronađimo presječne tačke krive $y=-x^2$ i prave $x-y-2=0$.

$$y=-x^2$$
$$x-y-2=0$$

$$x+x^2-2=0$$
$$x^2+x-2=0$$
$$D=1+8=9 \quad x_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{2}$$
$$x_1=-2, \quad x_2=1$$
$$(x-1)(x+2)=0$$
$$x=1 \Rightarrow y=-1$$
$$x=-2 \Rightarrow y=-4$$

I način:

$$P=\int_{-2}^{1}\left(-x^2-(x-2)\right)dx=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)\,dx=-\frac{1}{3}x^3\Big|_{-2}^{1}\underbrace{}_{1+8}-\frac{1}{2}x^2\Big|_{-2}^{1}\underbrace{}_{1-4}+2x\Big|_{-2}^{1}\underbrace{}_{1+2}=$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot 9+\frac{1}{2}\cdot 3+2\cdot 3=-3+\frac{3}{2}+6=-3-\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$$

II način:

$$P=\iint_D dx\,dy \quad \text{gdje je} \quad D:\begin{cases}-2\le x\le 1\\ x-2\le y\le -x^2\end{cases}$$

$$P=\iint_D dx\,dy=\int_{-2}^{1}dx\int_{x-2}^{-x^2}dy=\int_{-2}^{1}\left((-x^2)-(x-2)\right)dx=\ldots=\frac{9}{2}$$

(#) Riješiti diferencijalnu jednačinu $2x^3y' = 2x^2y - y^3$.

Rj.

$$2x^3y' = 2x^2y - y^3 \quad /:2$$

$$x^3y' - x^2y = \frac{-1}{2}y^3 \quad /:x^3$$

$$y' - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{2x^3}y^3$$

Ovo je Bernulijeva diferencijalna jedn.
$(y' + p(x)y = g(x)y^n, \ n \in \mathbb{R}, n \neq 0, n \neq 1)$

uvodimo smjenu $y = uv$

$y' = u'v + u \cdot v'$ gdje su u i v pomoćne f-je koje treba odrediti

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = -\frac{1}{2x^3}(uv)^3$$

$$u'v + u\underbrace{\left(v' - \frac{1}{x}v\right)} = -\frac{1}{2x^3}u^3v^3$$

a) $v' - \frac{1}{x}v = 0$

$v' = \frac{dv}{dx}$

$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}$

$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}$

$\ln|v| = \ln|x|$

$v = x$

---

b) $u'v + u\underbrace{\left(v' - \frac{v}{x}\right)} = -\frac{1}{2x^3}u^3v^3$

ovo je jednako nuli za $v = x$

$$u'x = -\frac{1}{2x^3} \cdot u^3 \cdot x^3$$

$$u' = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx}x = -\frac{1}{2} \cdot u^3 \Rightarrow \frac{du}{u^3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{dx}{x} \quad / \int$$

$$\frac{u^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2}\ln|x| + C_1 \quad / \cdot(-2)$$

$$\frac{1}{u^2} = \ln|x| + \ln C$$

$$u^2 = \frac{1}{\ln xC} \qquad u = \frac{1}{\sqrt{\ln xc}}$$

Rješenje diferencijalne jednačine je

$$y = \frac{x}{\sqrt{\ln xc}}$$