Univerzitet u Zenici
Fakultet za metalurgiju i materijale

Prvi parcijalni pismeni ispit iz predmeta MATEMATIKA 2, 04.05.2009.

1. Ispitati i grafički predstaviti funkciju: $y = \frac{6}{x} ln x$.

2. Odrediti $\int \frac{2x^3 + x^2 - 4}{2x^2 - x - 3} dx$.

3. Odrediti stranice pravougaonika najveće površine upisanog u elipsu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

4. Odrediti prevojne tačke i intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$.

1. Ispitati i grafički predstaviti f-ju $y = \frac{6}{x} \ln x$.

Rj. $D: x \in (0, +\infty)$

x	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
y	$-$	$+$

znak f-je

nije ni parna ni neparna

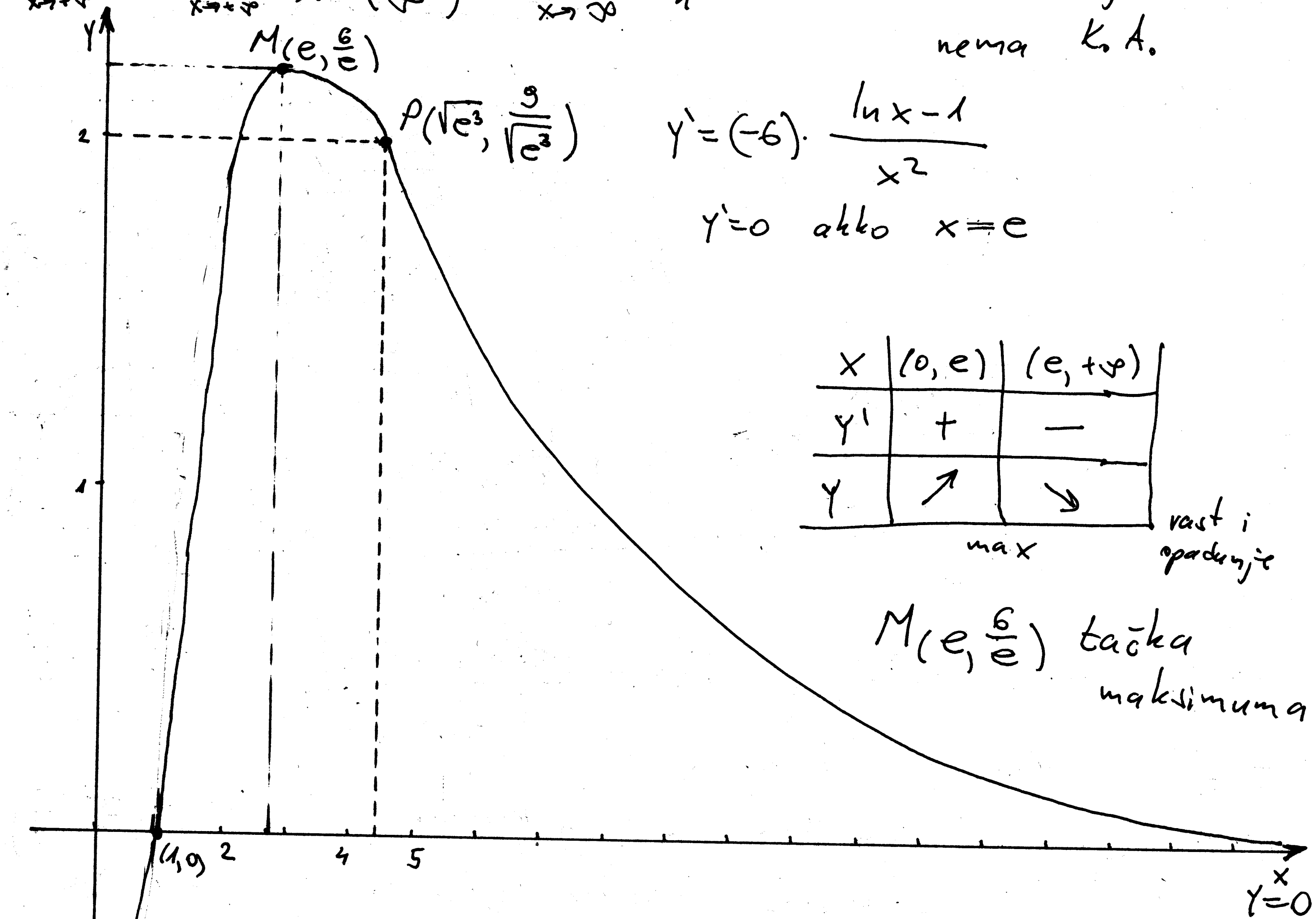
$(1,0)$ je nula f-je

u tački $x=0$ f-ja nije definisana

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{6\ln x}{x} = \frac{6\ln 0+}{0+} = \frac{-\infty}{+0} = -\infty \Rightarrow x=0 \text{ je V. A.}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{6\ln x}{x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L.P.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{6\cdot\frac{1}{x}}{1} = 0 \Rightarrow y=0 \text{ je H. A.}$$

nema K. A.



$$y' = (-6)\cdot\frac{\ln x - 1}{x^2}$$

$y' = 0$ akko $x = e$

x	$(0,e)$	$(e,+\infty)$
y'	$+$	$-$
y	$\nearrow$	$\searrow$
	max	

rast i opadanje

$M(e, \frac{6}{e})$ tačka maksimuma

$$y'' = 6\cdot\frac{2\ln x - 3}{x^2}$$

$y'' = 0$ akko $x = e^{\frac{3}{2}}$

x	$(0,\sqrt{e^3})$	$(\sqrt{e^3},+\infty)$
y''	$-$	$+$
y	$\frown$	$\smile$
	P. T.	

konveksnost i konkavnost

$P(\sqrt{e^3}, \frac{9}{\sqrt{e^3}})$ prevojna tačka

2. Odrediti $\int \frac{2x^3+x^2-4}{2x^2-x-3}\,dx$.

Rj.

$$(2x^3+x^2-4):(2x^2-x-3) = x+1+\frac{4x-1}{2x^2-x-3}$$

$$(2x^2-x-3)=(2x-3)(x+1)$$

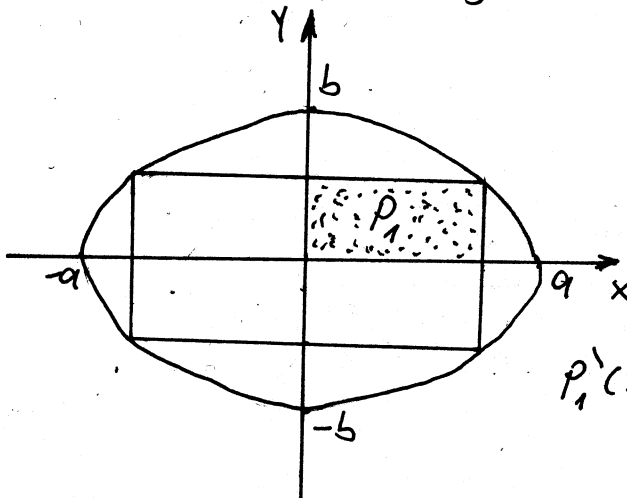
$$\frac{4x-1}{2x^2-x-3} = \frac{A}{2x-3}+\frac{B}{x+1} \Rightarrow A=2\ ;\ B=1$$

$$\int \frac{2x^3+x^2-4}{2x^2-x-3}\,dx = \frac{1}{2}x^2+x+\ln|x+1|+\ln|2x-3|+C =$$

$$=\frac{1}{2}x^2+x+\ln|2x^2-x-3|+C$$

3. Odrediti stranice pravougaonika najveće površine upisanog u elipsu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

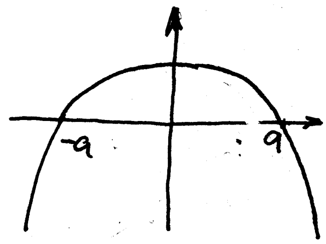
Rj.



$P=a\cdot b$ $\quad P_1=\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}$ $\quad y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$

$P=4P_1$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



$$P_1(x)=\frac{b}{a}x\sqrt{a^2-x^2}$$

$$P_1'(x)=\frac{ba^2-2bx^2}{a\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

$P_1'(x)=0$ akko $x=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $\quad P_1''(x)=\frac{-3bxa^2+2bx^3}{a\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$ $\quad y\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{b\sqrt{2}}{2}$

$x=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ je stacionarna tačka

$P_1''\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)<0 \Rightarrow$ f-ja $P_1(x)$ ima maksimum u tački $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2},\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)$

Stranice pravougaonika najveće površine upisanog u elipsu su $a\sqrt{2}$ i $b\sqrt{2}$

4. Odrediti prevojne tačke i intervale konveksnosti i konkavnosti f-je $y=x^4-12x^3+48x^2-50$.

Rj.

$y'=4x^3-24x^2+96x$

$y''=12x^2-48x+96$

$y''=0$ akko $12x^2-48x+96=0$

$x_1=2$ i $x_2=4$ kandidati za prevojne tačke

x	$(-\infty,2)$	$(2,4)$	$(4,+\infty)$
y''	+	−	+
y	$\cup$	$\cap$	$\cup$

$P_1(2,62)$ i $P_2(4,206)$ su prevojne tačke