Univerzitet u Zenici
Mašinski fakultet
Odsjek: Opšte mašinstvo
Zenica, 16.06.2011.

Pismeni ispit iz predmeta Matematika 1

1. Neka je $x \in \mathbb{R}$. Metodom matematičke indukcije dokazati da za sve prirodne brojeve $n \in \mathbb{N}$ važi

$$1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^{n-1}x^{n-1} = \frac{1 + (-1)^{n-1}x^n}{1 + x}.$$

2. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra λ:

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + y + az &= 1 \\ 2x + 2ay + 2z &= 3 \end{aligned} .$$

3. Odrediti λ u jednačini prave $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{\lambda} = \frac{z+2}{-1}$ da bi se sijekla sa pravom $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-1}$ i u tom slučaju naći presječnu tačku i ugao između pravih.

4. Ispitati i grafički predstaviti funkciju $y = \frac{(x-1)^4}{x^3}$.

(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

Dokazati matematičkom indukcijom da važi

$$1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^{n-1}x^{n-1}=\frac{1+(-1)^{n-1}x^n}{1+x} \quad (x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}).$$

Rj: BAZA INDUKCIJE

Dokažimo da je jednakost tačna za broj 1

$$1=\frac{1+(-1)^0x^1}{1+x}=\frac{1+x}{1+x}=1$$

Jednakost je tačna za broj 1.

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je jednakost $1-x+x^2-\dots+(-1)^{k-1}x^{k-1}=\frac{1+(-1)^{k-1}x^k}{1+x}$ tačna za sve brojeve k od 1 do n i na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je jednakost tačna za $n+1$ tj. dokažimo $1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+(-1)^nx^n=\frac{1+(-1)^nx^{n+1}}{1+x}$

$$1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+(-1)^nx^n \overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{=\!=\!=} \frac{1+(-1)^{n-1}x^n}{1+x}+(-1)^nx^n=$$

$$=\frac{1+(-1)^{n-1}x^n+(-1)^nx^n\cdot(1+x)}{1+x}=\frac{1+[(-1)^{n-1}+(-1)^n(1+x)]x^n}{1+x}=$$

$$=\frac{1+[(-1)^{n-1}(1+(-1)(1+x)]x^n}{1+x}=\frac{1+[(-1)^{n-1}\cdot(1-1-x]x^n}{1+x}=$$

$$=\frac{1+(-1)^{n-1}\cdot(-1)x\cdot x^n}{1+x}=\frac{1+(-1)^nx^{n+1}}{1+x}$$

što je i trebalo dobiti

Jednakost je tačna za $n+1$

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve.

Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra

$$\begin{aligned} ax+y+z&=1 \\ x+y+az&=1 \\ 2x+2ay+2z&=3 \end{aligned}$$

Rj. Sistem ću riješiti Cramerovom metodom

$$D=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 2 & 2a & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} \overset{I_k+(II_k+III_k)}{=\!=} 2\begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ a+2 & 1 & a \\ a+2 & a & 1 \end{vmatrix} \overset{I_v-II_v}{=\!=} 2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-a \\ a+2 & 1 & a \\ a+2 & a & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(1-a)(a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = -2(a-1)(a+2)(a-1) = (-2)(a-1)^2(a+2)$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 3 & 2a & 2 \end{vmatrix} \overset{II_v-I_v}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 3 & 2a & 2 \end{vmatrix} = -(a-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2a \end{vmatrix} = (1-a)(2a-3) = (3-2a)(a-1)$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \underset{III_v-II_v\cdot 3}{\overset{I_v-II_v}{=\!=}} \begin{vmatrix} a-1 & 0 & 1-a \\ 1 & 1 & a \\ -1 & 0 & 2-3a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1 & \overset{-(a-1)}{1-a} \\ -1 & 2-3a \end{vmatrix} = (a-1)\overbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2-3a \end{vmatrix}}^{2-3a-1\,=\,1-3a} =$$

$$= (a-1)(1-3a)$$

$$D_z=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2a & 3 \end{vmatrix} \overset{I_v-II_v}{=\!=} \begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2a & 3 \end{vmatrix} = (a-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2a & 3 \end{vmatrix} = (a-1)(3-2a)$$

1° za $D\neq 0$ tj. za $a\neq 1$ i $a\neq -2$ sistem ima jedinstveno rješenje:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-(2a-3)(a-1)}{(-2)(a-1)^2(a+2)}=\frac{2a-3}{2(a-1)(a+2)},\quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{3a-1}{2(a-1)(a+2)},\quad z=\frac{D_z}{D}=\frac{2a-3}{2(a-1)(a+2)}$$

2° za $a=-2$ imamo da je $D_x\neq 0 \Rightarrow$ sistem nema rješenja

3° za $a=1$ imamo $D=D_x=D_y=D_z=0$ pa sistem postaje

$$\begin{aligned} x+y+z&=1 \quad /\cdot 2 \\ x+y+z&=1 \quad /\cdot 2 \\ 2x+2y+2z&=3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &2x+2y+2z=1 \\ -\;&2x+2y+2z=3 \\ \hline &0=-2 \end{aligned}$$

sistem nema rješenja

(#) Odrediti λ u jednačini prave $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{\lambda}=\frac{z+2}{1}$ da bi se sjekla sa pravom $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-1}$ i u tom slučaju naći presječnu tačku i ugao između pravih.

Rj:

$a: \frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{\lambda}=\frac{z+2}{1}, \quad \vec{p}_a=(1,\lambda,1), \quad x_1=3, \quad y_1=1, \quad z_1=-2$

$b: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-1}, \quad \vec{p}_b=(2,1,-1), \quad x_2=1, \quad y_2=2, \quad z_2=1$

Potreban uslov da se prave sijeku: $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \; \frac{I_R + III_R \cdot 3}{II_R + III_R} \; \begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & \lambda+1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (-1)(4\lambda+4-12)=(-1)(4\lambda-8)$$

$(-1)(4\lambda-8)=0$

$\lambda=2$

Za vrijednost $\lambda=2$ prave a i b se sijeku.

a:

$\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{1} \quad (=t)$

$x-3=t \qquad x=t+3$

$y-1=2t \qquad y=2t+1$

$z+2=t \qquad z=t-2$

b:

$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-1} \quad (=s)$

$x-1=2s \qquad x=2s+1$

$y-2=s \qquad y=s+2$

$z-1=-s \qquad z=-s+1$

$t+3=2s+1$

$2t+1=s+2$

$t-2=-s+1$

$t-2s=-2 \quad /\cdot 2$

$2t-s=1$

$t+s=3 \quad /\cdot 2$

$2t-4s=-4 \quad (1)$

$2t-s=1 \quad (2)$

$2t+2s=6 \quad (3)$

$(1)-(3): \; -6s=-10$

$(2)-(3): \; -3s=-5$

$s=\frac{5}{3}$

$t=2s-2=\frac{10}{3}-\frac{6}{3}=\frac{4}{3} \qquad x=\frac{4}{3}+3=\frac{13}{3}, \quad y=\frac{8}{3}+1=\frac{11}{3}, \quad z=\frac{4}{3}-2=-\frac{2}{3}$

Presječna tačka pravih je $M\left(\frac{13}{3}, \frac{11}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

$\vec{p}_a \cdot \vec{p}_b=(1,2,1)\cdot(2,1,-1)=2+2-1=3$

$|\vec{p}_a|=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}, \quad |\vec{p}_b|=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$

$\vec{p}_a\cdot\vec{p}_b=|\vec{p}_a|\cdot|\vec{p}_b|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{p}_a,\vec{p}_b)$

$\Rightarrow \cos\sphericalangle(\vec{p}_a,\vec{p}_b)=\frac{\vec{p}_a\cdot\vec{p}_b}{|\vec{p}_a|\cdot|\vec{p}_b|}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \Rightarrow \sphericalangle(\vec{p}_a,\vec{p}_b)=60^\circ$ ugao između pravih

#) Ispitati f-ju i nacrtati joj grafik $Y = \frac{(x-1)^4}{x^3}$.

Rj: definiciono područje

$x^3 \neq 0$

$D: x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

parnost, neparnost, periodičnost

$f(-x) = \frac{(-x-1)^4}{-x^3}$ f-ja nije ni parna ni neparna

f-ja nije periodična

nule, presjek sa Y-osom, znak f-je

$Y = 0$ akko $(x-1)^4 = 0$

$x - 1 = 0$

$x = 1$

(1,0) je nula f-je

f-ja ne siječe Y-osu

$(x-1)^4 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

X	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Y	$-$	$+$

znak f-je

ponašanje na krajevima intervala definisanosti i asimptote

za $x=0$ f-ja ima prekid

$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{(x-1)^4}{x^3} = \frac{((0+)-1)^4}{(0+)^3} = \frac{(-1+0)^4}{0+} = +\infty \Rightarrow x = 0$ je V_0A_0

$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \frac{(x-1)^4}{x^3} = \frac{((0-)-1)^4}{(0-)^3} = \frac{(-1-0)^4}{0-} = -\infty \Rightarrow x = 0$ je V_0A_0

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \quad /:x^3}{x^3 \quad /:x^3} = \frac{\infty}{1} = \infty$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \frac{\infty}{1} = \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f-ja nema H_0A_0

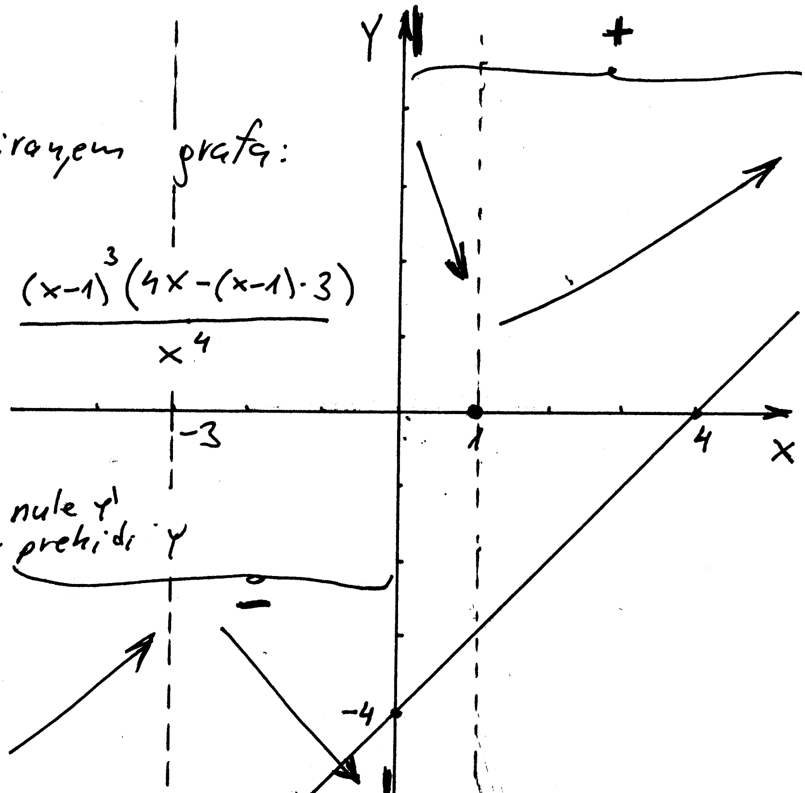
$y = kx + n$ je oblika K_0A_0

$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \quad /:x^4}{x^4 \quad /:x^4} = \frac{1}{1} = 1$

$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{(x-1)^4}{x^3} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^4} - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 - \cancel{x^4} \quad /:x^3}{x^3 \quad /:x^3} = \frac{-4}{1} = -4$

$Y = x - 4$ je K_0A_0

nakon ovog koraka počinjemo sa skiciranjem grafa:



rast i opadanje

$Y' = \left(\frac{(x-1)^4}{x^3} \right)' = \frac{4(x-1)^3 \cancel{x^3} - (x-1)^4 \cdot 3\cancel{x^2}}{x^{\cancel{6}4}} = \frac{(x-1)^3 (4x - (x-1)\cdot 3)}{x^4}$

$Y' = \frac{(x-1)^3 (x+3)}{x^4}$ $\quad Y' = 0$ akko $x = 1$ ili $x = -3$

-3 0 1 $\leftarrow$ nule Y' + prekidi Y

X	$(-\infty, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
Y'	$+$	$-$	$-$	$+$
Y	↗	↘	↘	↗

max min

$$f(-3)=\frac{(-3-1)^4}{(-3)^3}=\frac{16\cdot 16}{-27}=-\frac{256}{27}\approx -9{,}4815$$

ekstremi f-je

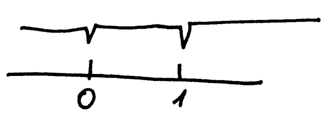
Iz tabele rasta i opadanja f-ja ima lokalni maksimum u tački $\left(-3,-\frac{256}{27}\right)$ i lokokalni minimum u tački $(1,0)$.

prevojne tačke i intervali konveksnosti i konkavnosti

$$y''=\left(\frac{(x-1)^3(x+3)}{x^4}\right)'=\frac{(3(x-1)^2(x+3)+(x-1)^3)\cancel{x^4}-(x-1)^3(x+3)\cdot 4\cancel{x^3}}{x^{\cancel{8}5}}$$

$$y''=\frac{(x-1)^2\left[3x(x+3)+x(x-1)-4\overbrace{(x-1)(x+3)}^{x^2+2x-3}\right]}{x^5}=\frac{(x-1)^2(\cancel{3x^2}+\cancel{9x}+\cancel{x^2}-\cancel{x}-\cancel{4x^2}-\cancel{8x}+12)}{x^5}$$

$$y''=\frac{12(x-1)^2}{x^5}\qquad y''=0 \text{ akko } x=1$$



← prekidi y + nule y''

x	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
y''	−	+	+
y	∩	∪	∪

f-ja nema prevojnih tački