Univerzitet u Zenici
Mašinski fakultet
Odsjek: Opšte mašinstvo
Zenica, 03.02.2011.

Pismeni ispit iz predmeta Matematika 1

1. Metodom matematičke indukcije dokazati da za sve prirodne brojeve n važi

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{n^2+3n+2}=\frac{n}{2n+4}.$$

2. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra λ:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 4 \\ x+\lambda y+z &= 3 \\ x+2\lambda y+z &= 4 \ . \end{aligned}$$

3. Kroz tačku $M_1(1,-2,1)$ povući pravu paralelnu pravoj $\left\{ \begin{array}{r} x-y+z-4=0 \\ 2x+y-2z+5=0 \end{array} \right.$.

4. Ispitati i grafički predstaviti funkciju $y=\dfrac{x^3-2}{2x^2}$.

(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(#) Dokazati metodom matematičke indukcije da za sve prirodne brojeve n važi

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\dots+\frac{1}{n^2+3n+2}=\frac{n}{2n+4}.$$

Rj. $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\dots+\frac{1}{k^2+3k+2}=\frac{k}{2k+4}$, k je pozitivan cijeli br.

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $\frac{1}{6}=\frac{1}{2\cdot 1+4} \Rightarrow \frac{1}{6}=\frac{1}{6}$ jednakost je tačna za $k=1$.

INDUKCISKI KORAK

Pretpostavimo da je jednakost tačna za $k=1,2,\dots,n$, tj. $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\dots+\frac{1}{k^2+3k+2}=\frac{k}{2k+4}$, $k=1,2,\dots,n$.

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je jednakost tačna za $n+1$ tj. da je

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\dots+\frac{1}{(n+1)^2+3(n+1)+2}=\frac{n+1}{2(n+1)+4}$$

$(n+1)^2=n^2+2n+1$

$3(n+1)=3n+3$

ili drugačije napisano $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\dots+\frac{1}{n^2+5n+6}=\frac{n+1}{2n+6}$

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\dots+\frac{1}{n^2+3n+2}+\frac{1}{n^2+5n+5}\overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{=}\frac{n}{2n+4}+\frac{1}{n^2+5n+6}$$

$n^2+5n+6=0$

$D=25-24=1$

$n_{1,2}=\frac{-5\pm 1}{2}$

$n_1=\frac{-6}{2}=-3 \quad n_2=\frac{-4}{2}=-2$

$$=\frac{n}{2(n+2)}{}_{\cdot(n+3)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}{}_{\cdot 2}=\frac{n(n+3)+2}{2(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{n^2+3n+2}{2(n+2)(n+3)}=\frac{\cancel{(n+2)}(n+1)}{2\cancel{(n+2)}(n+3)}=\frac{n+1}{2n+6}$$ što je i trebalo dobiti

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve.

Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra λ

$$\begin{aligned} x+y+z&=4\\ x+\lambda y+z&=3\\ x+2\lambda y+z&=4 \end{aligned}$$

Rj. Sistem rješavamo Cramerovom metodom

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\lambda&1\\1&2\lambda&1\end{vmatrix}\overset{II_v-III_v}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-\lambda&0\\1&2\lambda&1\end{vmatrix}=-\lambda\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}4&1&1\\3&\lambda&1\\4&2\lambda&1\end{vmatrix}\underset{III_v-II_v}{\overset{I_v-II_v}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}1&1-\lambda&0\\3&\lambda&1\\1&\lambda&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1-\lambda\\1&\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-(1-\lambda))=1-\lambda-\lambda=1-2\lambda$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1&4&1\\1&3&1\\1&4&1\end{vmatrix}\overset{III_k-I_k}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&4&0\\1&3&0\\1&4&0\end{vmatrix}=0$$

$$D_z=\begin{vmatrix}1&1&4\\1&\lambda&3\\1&2\lambda&4\end{vmatrix}\underset{III_v-II_v}{\overset{I_v-II_v}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}0&1-\lambda&1\\1&\lambda&3\\0&\lambda&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\\lambda&1\end{vmatrix}=-(1-\lambda-\lambda)=2\lambda-1$$

Kako je $D=0$ to sistem može da ima beskonačno mnogo rješenja ili da nema rješenja.

1° $\lambda=\frac{1}{2}$

$D=0,\ D_x=0,\ D_y=0,\ D_z=0$

Sistem ćemo riješiti Gauss-ovom metodom

$$\begin{aligned} x+y+z&=4\\ x+\tfrac{1}{2}y+z&=3 \quad /\cdot 2\\ x+y+z&=4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y+z&=4 \quad (1)\\ 2x+y+2z&=6 \quad (2) \end{aligned}$$

$(2)-(1):\ x+z=2$

$x=2-z$

$x+y+z=4$

$2-z+y+z=4$

$y=2$

Za $\lambda=\frac{1}{2}$ sistem ima ∞ mnogo rješenja koja su oblika $(2-t,2,t)$ gdje je $t\in\mathbb{R}$.

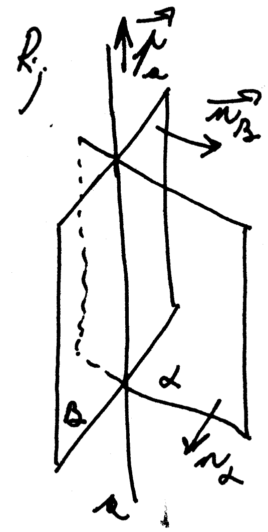
2° $\lambda\neq\frac{1}{2}$

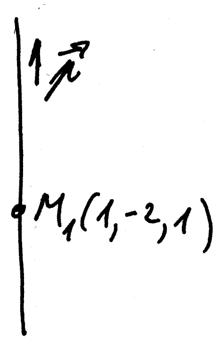
$D=0,\ D_x\neq 0 \Rightarrow$ sistem za $\lambda\neq\frac{1}{2}$ nema rješenja

(#) Kroz tačku $M_1(1,-2,1)$ povući pravu paralelnu

pravoj $\begin{cases} x-y+z-4=0 \\ 2x+y-2z+5=0 \end{cases}$.

Rj.





$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$ jednačina prave kroz tačku $M(x_1,y_1,z_1)$

$\alpha: x-y+z-4=0$

$\vec{n}_\alpha=(1,-1,1)$ vektor normale na ravan α

$\beta: 2x+y-2z+5=0$

$\vec{n}_\beta=(2,1,-2)$ vektor normale na ravan β

$\vec{p}_a \parallel \vec{p}$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{p}_a \perp \vec{n}_\alpha \\ \vec{p}_a \perp \vec{n}_\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{p}_a \parallel \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta \\ \vec{p} \parallel \vec{p}_a \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{p} \parallel \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$$

$$\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (2-1)\vec{i}-(-2-2)\vec{j}+(1+2)\vec{k}=(1,4,3)$$

Za vektor pravca tražene prave mogu uzeti

$$\vec{p}=(1,4,3)$$

$$M_1(\overset{x_1}{1},\overset{y_1}{-2},\overset{z_1}{1})$$

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{3}$$

jednačina tražene prave

(#) Ispitati f-ju i nacrtati njen grafik: $y=\frac{x^3-2}{2x^2}$.

Rj. definiciono područje

$D: x\neq 0$

parnost (neparnost), periodičnost

$$f(-x)=\frac{(-x)^3-2}{2(-x)^2}=\frac{-x^3-2}{2x^2}\neq \pm f(x)$$

• f-ja nije ni parna ni neparna

f-ja nije periodična

nule, presjek sa y-osom, znak

$y=0$ akko $x^3-2=0$

$x=\sqrt[3]{2}\approx 1,26$

$(\sqrt[3]{2},0)$ je nula f-je

$f(0)=$ nije definisano

f-ja ne siječe y-osu

$2x^2>0 \quad \forall x\in D$

$$\left.\begin{array}{lll} y>0 & \text{za} & x>\sqrt[3]{2} \\ y<0 & \text{za} & x<\sqrt[3]{2} \end{array}\right\} \text{znak f-je.}$$

ponašanje na krajevima intervala definisanosti i asimptote

za $x=0$ f-ja ima prekid

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}\frac{x^3-2}{2x^2}=\frac{(0-)^3-2}{2(0-)^2}=\frac{-2-0}{0+}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{(0+)^3-2}{2(0+)^2}=\frac{-2+0}{+0}=-\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x=0 \text{ je V. A.}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-2 \quad /:x^2}{2x^2 \quad /:x^2}=\pm\infty$$ f-ja nema H. A.

Tražimo kosu asimptotu u obliku $y=kx+n$.

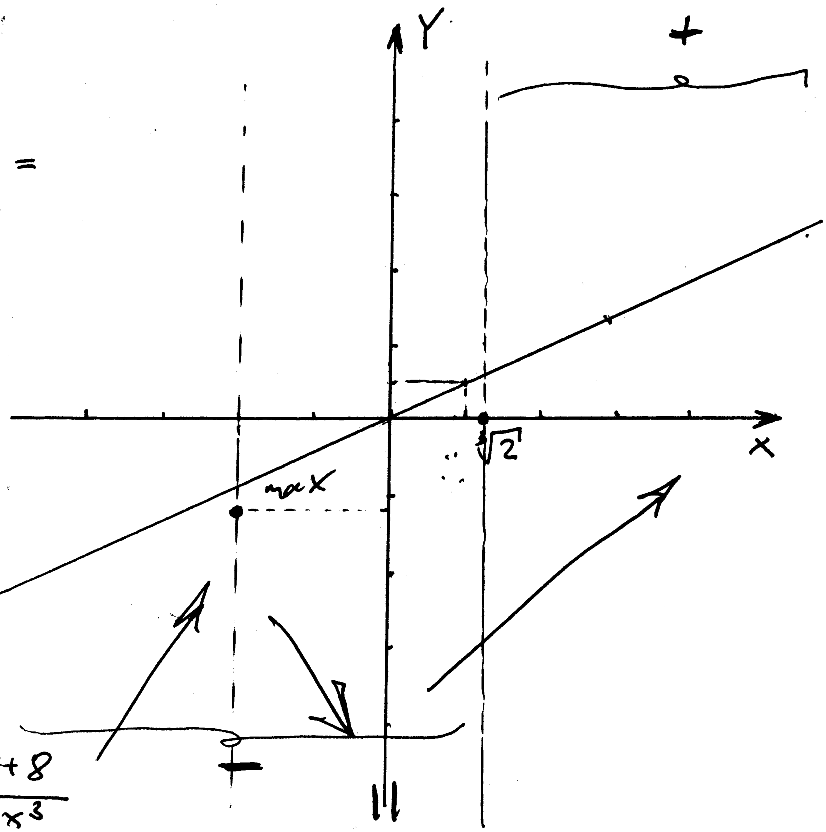
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2 \quad /:x^3}{2x^3 \quad /:x^3}=\frac{1}{2}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3-2}{2x^2}-\frac{1}{2}x\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2-x^3}{2x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{2x^2}=0$$

kosa asimptota je $y=\frac{1}{2}x$

Poslije ovog koraka počinjemo skicirati grafik.



rast i opadanje

$$y'=\left(\frac{x^3-2}{2x^2}\right)'=\frac{3x^2\cdot 2x^2-(x^3-2)4x}{4x^4}=$$

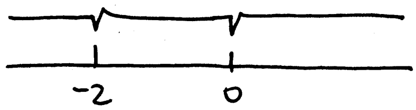
$$=\frac{6x^4-4x^4+8x}{4x^4}=\frac{2x^4+8x}{4x^4}=\frac{x^3+8}{2x^3}$$

$y' = \dfrac{x^3+8}{2x^3}$, $y' = 0$ akko $x^3+8=0$

$x^3 = -8$

$x = -2$

prekidi y + nule y'



x	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,+\infty)$
y'	+	−	+
y	↗	↘	↗
	max	N.D.	

$f(-2) = \dfrac{(-2)^3-2}{2(-2)^2} = \dfrac{-10}{8} = -\dfrac{5}{4} \approx -1{,}25$

prevojne tačke i intervali konveksnosti i konkavnosti

$y'' = \left(\dfrac{x^3+8}{2x^3}\right)' = \dfrac{3x^2\cdot 2x^3 - (x^3+8)\cdot 6x^2}{4x^6} = \dfrac{6x^5-6x^5-48}{4x^6} = \dfrac{-48}{4x^6} = -\dfrac{12}{x^6} < 0$

F-ja nema prevojnih tački i uvijek je negativna što znači uvijek je $\cap$ oblika.

graf f-je

$y = \dfrac{x^3-2}{2x^2}$