Univerzitet u Zenici
Mašinski fakultet
Odsjek: Opšte mašinstvo
Zenica, 18.02.2010.

Pismeni ispit iz predmeta Matematika 1

1. Izračunati: $\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -5 & 1 \\ 4 & 4 & -7 & 5 \end{vmatrix}$.

2. Kroz središte S duži određene tačkama $A(1,3,0)$ i $B(-3,7,2)$ postaviti ravan α koja će biti okomita na ravan $\beta: 6x - 4y + z = 16$ i $\gamma: y + 2z + 1 = 0$. (Obavezno nacrtati sliku).

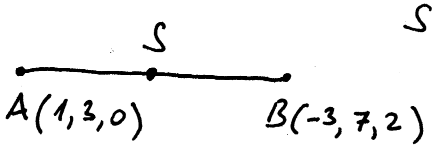
3. Izračunati: $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1 + 2 + 3 + ... + (n-1)}{n+1} - \dfrac{n}{2} \right]$.

4. Ispitati i grafički predstaviti funkciju $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{3 - x}$.

(Web stranica kursa je \pf.unze.ba\nabokov
Za uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

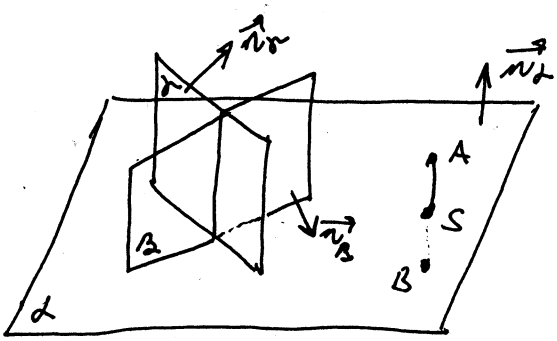
Kroz središte S duži određene tačkama $A(1,3,0)$ i $B(-3,7,2)$ postaviti ravan α koja će biti okomita na ravan $\beta: 6x-4y+z=16$ i $\gamma: y+2z+1=0$. (Obavezno nacrtati sliku).

Rj:



$$S\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

$$S(-1, 5, 1)$$



$\beta: 6x-4y+z=16$

$\vec{n_\beta}=(6,-4,1)$

$\gamma: y+2z+1=0$

$\vec{n_\gamma}=(0,1,2)$

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$

jednačina ravni kroz jednu tačku

$\vec{n_\alpha}=(A,B,C)$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n_\alpha}\perp\vec{n_\beta}\\ \vec{n_\alpha}\perp\vec{n_\gamma}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n_\alpha}\parallel\vec{n_\beta}\times\vec{n_\gamma}$$

$$\Downarrow$$

$$\exists k\in\mathbb{R} \quad \vec{n_\alpha}=k(\vec{n_\beta}\times\vec{n_\gamma})$$

$$\vec{n_\beta}\times\vec{n_\gamma}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & -4 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=-9\vec{i}-12\vec{j}+6\vec{k}=(-9,-12,6)$$

pa za $\vec{n_\alpha}$ možemo uzeti

$\vec{n_\alpha}=(3,4,-2)$

$$3(x-(-1))+4(y-5)+(-2)(z-1)=0$$

$$3x+4y-2z+3-20+2=0$$

$3x+4y-2z-15=0$ jednačina tražene ravni

Izračunati $\begin{vmatrix} 1 & a & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -5 & 1 \\ 4 & 4 & -7 & 5 \end{vmatrix}$.

Rj.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -5 & 1 \\ 4 & 4 & -7 & 5 \end{vmatrix} \underset{III_k + IV_k \cdot 2}{\overset{\substack{I_k + III_k \\ II_k + III_k}}{=}} \begin{vmatrix} 4 & a+3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ -2 & -2 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & a+3 & 7 \\ -2 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \end{vmatrix} \underset{II_k + III_k}{\overset{I_k + III_k}{=}}$$

$$= \begin{vmatrix} 11 & a+10 & 7 \\ -5 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 11 & a+10 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) \begin{vmatrix} 11 & a+10 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -15(11-a-10)$$

$$= -15(-a+1) = 15a - 15$$

Izračunati limes $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1+2+3+\ldots+(n-1)}{n+1} - \frac{n}{2} \right)$

Rj.

$$1+2+3+\ldots+(n-1) = \frac{n-1}{2}\left(1+(n-1)\right) \quad \leftarrow \text{suma aritmetičkog niza}$$

$$= \frac{n-1}{2} \cdot n = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1+2+3+\ldots+(n-1)}{n+1} - \frac{n}{2} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n+1} - \frac{n}{2} \right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n(n-1)}{2(n+1)} - \frac{n}{2} \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(n-1) - n(n+1)}{2(n+1)} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 - n - n^2 - n}{2n+2} = \lim_{n \to \infty} \frac{-2n}{2(n+1)} = \lim_{n \to \infty} \frac{-n}{n+1} \begin{matrix} :n \\ :n \end{matrix} \left(= \frac{\infty}{\infty} \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{-1}{1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}} = -1$$

Ispitati i grafički predstaviti f-ju $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{3-x}$.

Rj. definiciono područje

$3-x\neq 0$

$x\neq 3$

$\mathcal{D}: x\in(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$

parnost (neparnost), periodičnost

$\mathcal{D}$ nije simetrično $\Rightarrow$ f-ja nije ni parna ni neparna

F-ja nije periodična (periodične su samo trigonometrijske f-je)

nule, presjek sa y-osom, znak f-je

$y=0$ akko $x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$(-1,0)$ i $(2,0)$ su nule f-je

presjek sa y-osom

$f(0)=\dfrac{-2}{3}$

$(0,-\frac{2}{3})$ je presjek sa y-osom

znak f-je $\quad f(x)=\dfrac{(x+1)(x-2)}{3-x}$

$-1 \quad 2 \quad 3$ ← nule y, + prekidi y

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,2)$	$(2,3)$	$(3,+\infty)$
$x+1$	−	+	+	+
$x-2$	−	−	+	+
$3-x$	+	+	+	−
y	+	−	+	−

znak f-je

ponašanje na krajevima intervala definisanosti i asimptote

Za $x=3$ f-ja ima prekid

$\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 3-0}\dfrac{(x+1)(x-2)}{3-x}=\dfrac{(3-0+1)(3-0-2)}{3-(3-0)}=\dfrac{(4-0)(1-0)}{+0}=+\infty \Rightarrow x=3$ je V. A.

$\lim\limits_{x\to 3+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{(x+1)(x-2)}{3-x}=\dfrac{(3+0+1)(3+0-2)}{3-(3+0)}=\dfrac{(4+0)(1+0)}{-0}=-\infty \Rightarrow x=3$ je V. A.

$\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x-2 \quad /:x}{3-x \quad /:x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1-\frac{2}{x}\to 0}{\frac{3}{x}-1}=\dfrac{\infty}{-1}=-\infty \Rightarrow$ f-ja nema H. A.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x-1-\frac{2}{x}\to 0}{\frac{3}{x}-1}=\dfrac{-\infty}{-1}=+\infty \Rightarrow$ f-ja nema H. A.

Tražimo kosu asimptotu u obliku

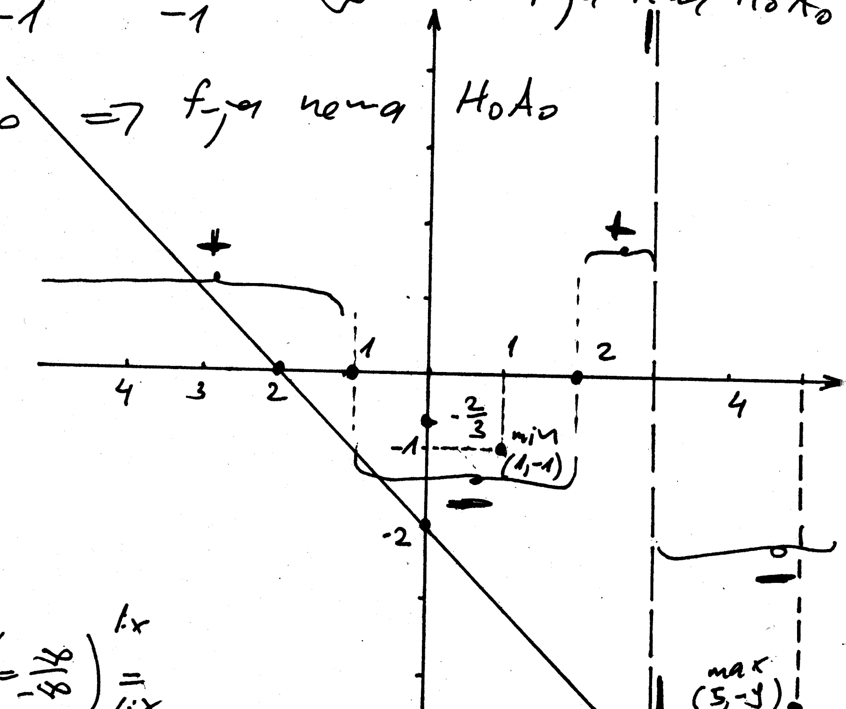
$y=kx+n$

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x-2 \quad /:x^2}{3x-x^2 \quad /:x^2}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{\frac{3}{x}-1}=\dfrac{1}{-1}=-1$

$n=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2-x-2}{3-x}+x\right]=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x-2+3x-x^2}{3-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-2}{3-x}\ \left(=\dfrac{\infty}{-\infty}\right)\ \dfrac{/:x}{/:x}=$



$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{2}{x}}{\frac{3}{x} - 1} = \frac{2}{-1} = -2 \qquad Y = -x-2 \text{ je kosa asimptota}$$

rast i opadanje

$$Y' = \left(\frac{x^2 - x - 2}{3-x} \right)' = \frac{(2x-1)(3-x) - (x^2-x-2)(-1)}{(3-x)^2} = \frac{-2x^2 + 7x - 3 + x^2 - x - 2}{(3-x)^2} =$$

$$= \frac{-x^2 + 6x - 5}{(3-x)^2} = -\frac{x^2 - 6x + 5}{(3-x)^2} = -\frac{(x-1)(x-5)}{(3-x)^2}$$

sad možemo napraviti tabelu rasta i opadanja

$$x^2 - 6x + 5 = x^2 + 2 \cdot x \cdot (-3) + (-3)^2 - 9 + 5 =$$
$$= (x-3)^2 - 4$$

ovaj izraz napiši u drugačijem obliku

$$(3-x)^2 = [(-1)(x-3)]^2 = (x-3)^2$$

1 3 5 ← nule Y' + prekidi Y

$$Y' = -\frac{(x-3)^2 - 4}{(x-3)^2} = -1 + \frac{4}{(x-3)^2}$$

x	$(-\infty, 1)$	$(1,3)$	$(3,5)$	$(5,+\infty)$
Y'	$-$	$+$	$+$	$-$
Y	↘	↗	↗	↘

min max

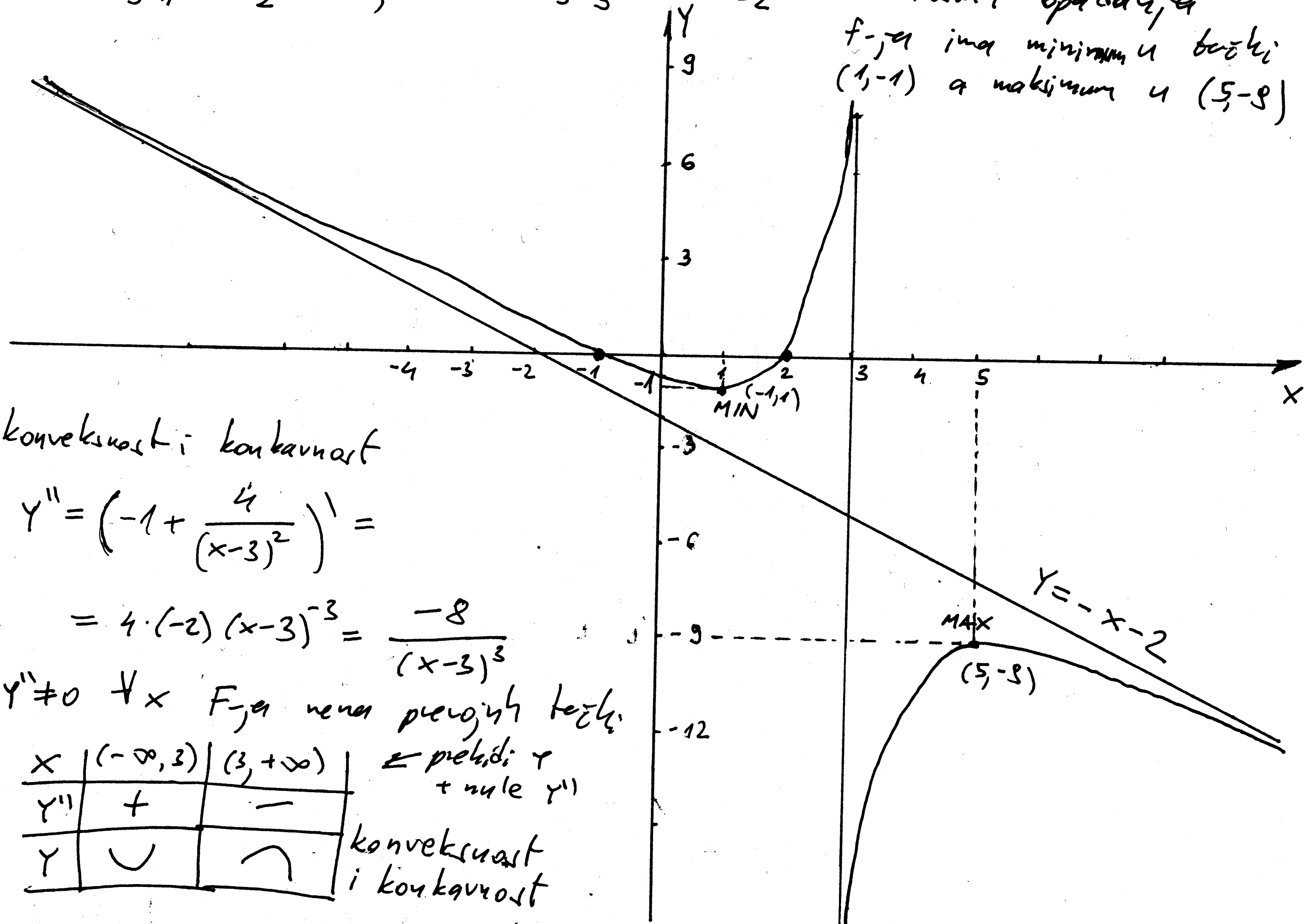
rast i opadanje

ekstremi f-je

$Y' = 0 \Rightarrow$ Stacionarne tačke su $x = 1$ i $x = 5$

$$f(1) = \frac{1-3}{3-1} = \frac{-2}{2} = -1, \quad f(5) = \frac{25-7}{3-5} = \frac{-18}{-2} = -9$$

Na osnovu tabele rasta i opadanja f-ja ima minimum u tački $(1,-1)$ a maksimum u $(5,-9)$



konveksnost i konkavnost

$$Y'' = \left(-1 + \frac{4}{(x-3)^2} \right)' =$$

$$= 4 \cdot (-2)(x-3)^{-3} = \frac{-8}{(x-3)^3}$$

$Y'' \neq 0 \ \forall x$ F-ja nema prevojnih tački

x	$(-\infty, 3)$	$(3, +\infty)$
Y''	$+$	$-$
Y	∪	∩

← prekidi Y + nule Y''

konveksnost i konkavnost