Univerzitet u Zenici
Mašinski fakultet

04.12.2009.

Prvi parcijalni ispit iz predmeta Matematika 1

1. Matematičkom indukcijom dokazati da je $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ djeljivo sa 17 za svaki prirodan broj n.

2. Odrediti koji članovi u razvoju binoma $\left(\frac{\sqrt[4]{7}}{\sqrt[5]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^{23}$ su racionalni pa poslije toga naći njihovu vrijednost.

3. Dokazati da je proizvod svih n-tih korijena iz 1 jednak $(-1)^{n-1}$ (1 je iz skupa kompleksnih brojeva).

4. Riješiti matričnu jednačinu $(A+I)^{-1} \cdot X \cdot (3A+I) = 2A$ gdje je I jedinična matrica drugog reda a matrica $A = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ -6 & -7 \end{bmatrix}$.

5. Riješiti jednačinu $\begin{vmatrix} 3x-5 & -5-2x & x+1 \\ 2x-4 & -2-2x & x-1 \\ 3x-8 & 2-3x & 2x-5 \end{vmatrix} = 0.$

6. Diskutovati rang matrice $M = \begin{bmatrix} 14 & 4 & 2\lambda-4 & -6 \\ 6 & 2 & -1 & -3 \\ 3\lambda+4 & 2 & -2\lambda+1 & -3 \\ 24 & 8 & -4 & -12 \end{bmatrix}$.

7. Dati su vektori $\vec{a} = (\lambda, -\lambda-1, -\lambda-2)$, $\vec{b} = (2,-1,-7)$ i $\vec{c} = (6,-3,-3)$. Odrediti parametar λ tako da $\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \measuredangle(\vec{a},\vec{c})$ (ugao između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ bude jednak uglu između vektora $\vec{a}$ i $\vec{c}$), pa za dobijenu vrijednost λ odrediti veličinu ugla.

(Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(#) Matematičkom indukcijom dokazati da je $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ djeljivo sa 17 za svaki prirodan broj n.

Rj: $3 \cdot 5^{2k+1} + 2^{3k+1}$ djeljivo sa 17, $k \in \mathbb{N}$

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $3 \cdot 5^{2+1} + 2^{3+1} = 3 \cdot 5^3 + 2^4 = 3 \cdot 125 + 16 = 375 + 16 = 391$

$$\begin{array}{l} 391 : 17 = 23 \\ \underline{34} \\ 51 \\ \underline{51} \\ =\,= \end{array}$$

Broj 391 jest djeljiv sa 17

Tvrdnja je tačna za broj 1

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je $3 \cdot 5^{2k+1} + 2^{3k+1}$ djeljivo sa 17 za svaki broj k od 1 do n. Uz pomoć ove pretpostavke dokažimo da je $3 \cdot 5^{2(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1}$ djeljivo sa 17.

$$3 \cdot 5^{2(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} = 3 \cdot 5^{2n+3} + 2^{3n+4} = 3 \cdot 5^{2n+1} \cdot 5^2 + 2^{3n+1} \cdot 2^3 =$$

$$= 25\left(3 \cdot 5^{2n+1}\right) + 8\left(2^{3n+1}\right) = 17\left(3 \cdot 5^{2n+1}\right) + 8\left(3 \cdot 5^{2n+1}\right) +$$

$$+ 8\left(2^{3n+1}\right) = \underbrace{17 \cdot \left(3 \cdot 5^{2n+1}\right)}_{\text{vidimo da je ovo djeljivo sa 17}} + 8\underbrace{\left(3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}\right)}_{\text{na osnovu pretpostavke ovo je djeljivo sa 17}}$$

Prema tome tvrdnja je tačna za $n+1$, tj.

$3 \cdot 5^{2(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1}$ je djeljivo sa 17.

ZAKLJUČAK

Tvrdnja je tačna za svaki prirodan broj n.

Odrediti koji članovi u razvoju binoma $\left(\frac{\sqrt[4]{7}}{\sqrt[5]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^{23}$ su racionalni pa poslije toga naći njihovu vrijednost.

Rj.

$$\left(\frac{\sqrt[4]{7}}{\sqrt[5]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^{23}=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\frac{\sqrt[4]{7}}{\sqrt[5]{2}}\right)^{23}=\left(\frac{1}{5^{\frac{1}{3}}}+\frac{7^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{5}}}\right)^{23}=$$

$$=\left(5^{-\frac{1}{3}}+7^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{-\frac{1}{5}}\right)^{23}=\sum_{k=0}^{23}\binom{23}{k}\left(5^{-\frac{1}{3}}\right)^{23-k}\cdot\left(7^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{-\frac{1}{5}}\right)^{k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{23}\binom{23}{k}5^{\frac{-23+k}{3}}\cdot 7^{\frac{k}{4}}\cdot 2^{-\frac{k}{5}}$$

$7^{\frac{k}{4}}$ će biti racionalan za $k\in\{0,4,8,12,16,20\}$

$2^{-\frac{k}{5}}$ će biti racionalan za $k\in\{0,5,10,15,20\}$

Prema tome $7^{\frac{k}{4}}\cdot 2^{-\frac{k}{5}}$ će biti racionalan za $k\in\{0,20\}$

za $k=0$ imamo $5^{\frac{-23+0}{3}}$ da je iracionalan broj.

$k=20$ imamo $5^{\frac{-23+20}{3}}=5^{-\frac{3}{3}}=5^{-1}\in\mathbb{Q}$

Jedini racionalan član u razvoju binoma je dvadeset prvi član (za $k=20$).

Vrijednost ovog člana je $\binom{23}{20}5^{-1}\cdot 7^{5}\cdot 2^{-4}=\frac{23\cdot 11\cdot 7\cdot 7^{5}}{5\cdot 2^{4}}$

$$\binom{23}{20}=\binom{23}{3}=\frac{23\cdot\cancel{22}^{11}\cdot\cancel{21}^{7}}{1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}}$$

$$=\frac{23\cdot 11\cdot 7^{6}}{5\cdot 16}$$ vrijednost dvadesetprvog člana

Da nisam obrno članove na početku $\left(\frac{\sqrt[4]{7}}{\sqrt[5]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^{23}=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\frac{\sqrt[4]{7}}{\sqrt[5]{2}}\right)^{23}$ dobili bi da je $k=3$ četvrti član

(#) Dokazati da je proizvod svih n-tih korijena iz 1 jednak $(-1)^{n-1}$ $(1 \in \mathbb{C})$.

$z = a + ib$
$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Rj. $1 = \cos 0^\circ + i\sin 0^\circ$, $\cos 0^\circ = 1$, $\sin 0^\circ = 0$

$z = 1$, $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = 1$, $\varphi = 0$

$\sqrt[n]{1}$ ima n rješenja

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0,1,2,\dots,n-1$$

u našem slučaju $|z| = 1$, $\varphi = 0$ pa imamo

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0,1,2,\dots,n-1$$

Kako množimo dva kompleksna broja

$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$

$z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$

U našem slučaju

$$z_0 \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_{n-1} = (\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}\right)\cdot$$

$$\ldots \cdot \left(\cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) =$$

$$= \cos\frac{1}{n}\left(2\pi + 4\pi + \ldots + 2(n-1)\pi\right) + i\sin\frac{1}{n}\left(2\pi + 4\pi + \ldots + 2(n-1)\pi\right) \overset{(*)}{=}$$

Kako sabrati $2 + 4 + 6 + \ldots + 2(n-1)$?

$$S = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2(n-1)$$
$$S = 2(n-1) + 2(n-2) + 2(n-3) + \ldots + 2$$

$$2S = \underbrace{2(n-1)+2}_{2n} + \underbrace{2(n-2)+4}_{2n} + \underbrace{2(n-3)+6}_{2n} + \ldots + \underbrace{2(n-1)+2}_{2n}$$

$$2S = (n-1)\cdot 2n \Rightarrow S = (n-1)\cdot n$$

$$\overset{(*)}{=} \cos\frac{1}{n}\cdot(n-1)\cdot n\cdot\pi + i\sin\frac{1}{n}(n-1)\cdot n\cdot\pi = \cos(n-1)\pi + \overbrace{i\sin(n-1)\pi}^{=0 \ \forall n}$$

$$= (-1)^{n-1}$$ što je i trebalo dobiti

(#) Riješiti matričnu jednačinu $(A+I)^{-1}\cdot X\cdot(3A+I)=2A$ gdje je I jedinična matrica drugog reda a

$$A=\begin{bmatrix}7 & 8\\ -6 & -7\end{bmatrix}.$$

Rj.

$$(A+I)^{-1}\cdot X\cdot(3A+I)=2A \quad /(A+I) \text{ sa lijeve strane}$$

$$X\cdot(3A+I)=(A+I)\cdot 2A \quad /\cdot(3A+I)^{-1} \text{ sa desne strane}$$

$$X=(A+I)\cdot 2A\cdot(3A+I)^{-1}$$

$$A=\begin{bmatrix}7 & 8\\ -6 & -7\end{bmatrix} \qquad I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad A+I=\begin{bmatrix}8 & 8\\ -6 & -6\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r}20\cdot 22\\ \hline 40\\ 40\\ \hline 440\end{array}$$

$$3A+I=\begin{bmatrix}22 & 24\\ -18 & -20\end{bmatrix} \qquad 3A=\begin{bmatrix}21 & 24\\ -18 & -21\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r}18\cdot 24\\ \hline 72\\ 36\\ \hline 432\end{array}$$

Označimo sa $B=3A-I$ pa pronađimo B^{-1}

$$B^{-1}=\frac{1}{\det B}\cdot B_{kof}^{T} \qquad \det B=\begin{vmatrix}22 & 24\\ -18 & -20\end{vmatrix}=-440+432=-8$$

$$B_{11}=(-1)^2\cdot(-20)=-20 \qquad B_{21}=(-1)^3\cdot 24=-24 \qquad B_{kof}=\begin{bmatrix}-20 & 18\\ -24 & 22\end{bmatrix}$$

$$B_{12}=(-1)^3\cdot(-18)=18 \qquad B_{22}=(-1)^4\cdot 22=22$$

$$B^{-1}=\frac{-1}{8}\begin{bmatrix}-20 & -24\\ 18 & 22\end{bmatrix}=(3A+I)^{-1}$$

$$X=(A+I)\cdot 2A\cdot(3A+I)^{-1}=\begin{bmatrix}8 & 8\\ -6 & -6\end{bmatrix}\cdot 2\cdot\begin{bmatrix}7 & 8\\ -6 & -7\end{bmatrix}\cdot\frac{-1}{8}\begin{bmatrix}-20 & -24\\ 18 & 22\end{bmatrix}$$

$$=2\begin{bmatrix}4 & 4\\ -3 & -3\end{bmatrix}\cdot 2\begin{bmatrix}7 & 8\\ -6 & -7\end{bmatrix}\cdot\frac{-1}{8}\cdot 2\begin{bmatrix}-10 & -12\\ 9 & 11\end{bmatrix}=8\cdot\frac{-1}{8}\begin{bmatrix}4 & 4\\ -3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 8\\ -6 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-10 & -12\\ 9 & 11\end{bmatrix}$$

$$=(-1)\begin{bmatrix}4 & 4\\ -3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-10 & -12\\ 9 & 11\end{bmatrix}=(-1)\begin{bmatrix}-4 & -4\\ 3 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 4\\ -3 & -3\end{bmatrix}$$ rješenje matrične jednačine

Riješiti jednačinu
$$\begin{vmatrix} 3x-5 & -5-2x & x+1 \\ 2x-4 & -2-2x & x-1 \\ 3x-8 & 2-3x & 2x-5 \end{vmatrix} = 0.$$

Rj.
$$\begin{vmatrix} 3x-5 & -5-2x & x+1 \\ 2x-4 & -2-2x & x-1 \\ 3x-8 & 2-3x & 2x-5 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 3x-5 & 2x+5 & x+1 \\ 2x-4 & 2x+2 & x-1 \\ 3x-8 & 3x-2 & 2x-5 \end{vmatrix} \underset{\overline{\overline{}}}{III_v - II_v}$$

$$\begin{vmatrix} 3x-5 & 2x+5 & x+1 \\ 2x-4 & 2x+2 & x-1 \\ x-4 & x-4 & x-4 \end{vmatrix} = (-1)(x-4)\begin{vmatrix} 3x-5 & 2x+5 & x+1 \\ 2x-4 & 2x+2 & x-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \;\frac{I_k - III_k}{II_k - III_k}$$

$$= (-1)(x-4)\begin{vmatrix} 2x-6 & x+4 & x+1 \\ x-3 & x+3 & x-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(x-4)\begin{vmatrix} 2x-6 & x+4 \\ x-3 & x+3 \end{vmatrix} \underset{\overline{\overline{}}}{I_v - II_v}$$

$$= (-1)(x-4)\begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ x-3 & x+3 \end{vmatrix} = (-1)(x-4)(x-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x+3 \end{vmatrix} = (-1)(x-4)(x-3)(x+2)$$

$(-1)(x-4)(x-3)(x+2) = 0$ Rješenja jednačine su

$x = 4$ ili $x = 3$ ili $x = -2$.

Diskutovati rang matrice $M = \begin{bmatrix} 14 & 4 & 2\lambda-4 & -6 \\ 6 & 2 & -1 & -3 \\ 3\lambda+4 & 2 & -2\lambda+1 & -3 \\ 24 & 8 & -4 & -12 \end{bmatrix}$

za razne vrijednosti parametra λ.

Rj.

$$M = \begin{bmatrix} 14 & 4 & 2\lambda-4 & -6 \\ 6 & 2 & -1 & -3 \\ 3\lambda+4 & 2 & -2\lambda+1 & -3 \\ 24 & 8 & -4 & -12 \end{bmatrix} \underset{III_v + I_v}{\sim} \begin{bmatrix} 14 & 4 & 2\lambda-4 & -6 \\ 6 & 2 & -1 & -3 \\ 3\lambda+8 & 6 & -3 & -9 \\ 24 & 8 & -4 & -12 \end{bmatrix} \underset{\substack{IV_v : 4 \\ I_v : 2 \\ III_v : 3}}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & \lambda-2 & -3 \\ 6 & 2 & -1 & -3 \\ \lambda+6 & 2 & -1 & -3 \\ 6 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \underset{IV_v - II_v}{\sim} \begin{bmatrix} 7 & 2 & \lambda-2 & -3 \\ 6 & 2 & -1 & -3 \\ \lambda+6 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{I_v \leftrightarrow II_v}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 & -3 \\ 7 & 2 & \lambda-2 & -3 \\ \lambda+6 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{I_k \leftrightarrow IV_k}{\sim} \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 & 6 \\ -3 & 2 & \lambda-2 & 7 \\ -3 & 2 & -1 & \lambda+6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{II_v - I_v \\ III_v - I_v}}{\sim}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Za $\lambda = 0$

$\operatorname{rang}(M) = 2$

Za $\lambda \neq 0$ $\operatorname{rang}(M) = 3$

(#) Dati su vektori $\vec{a}=(\lambda,-\lambda-1,-\lambda-2)$, $\vec{b}=(2,-1,-7)$ i $\vec{c}=(6,-3,-3)$. Odrediti parametar λ tako da $\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=\measuredangle(\vec{a},\vec{c})$ (ugao između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ bude jednak uglu između vektora $\vec{a}$ i $\vec{c}$), pa za dobijenu vrijednost λ odrediti veličinu ugla.

Rj.
$\vec{a}=(\lambda,-\lambda-1,-\lambda-2)$

$\vec{b}=(2,-1,-7)$

$\vec{c}=(6,-3,-3)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$

$$\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

isto tako

$$\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{c})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}||\vec{c}|}$$

Imamo
$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}||\vec{c}|} \Rightarrow \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}\cdot\vec{b}=2\lambda+\lambda+1+7\lambda+14=10\lambda+15\\ \vec{a}\cdot\vec{c}=6\lambda+3\lambda+3+3\lambda+6=12\lambda+9\\ |\vec{b}|=\sqrt{4+1+49}=\sqrt{54}=\sqrt{6\cdot 9}=3\sqrt{6}\\ |\vec{c}|=\sqrt{36+9+9}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{10\lambda+15}{3\sqrt{6}}=\frac{12\lambda+9}{3\sqrt{6}}$$

$10\lambda-12\lambda=9-15$

$2\lambda=6$

$\lambda=3$

tražena vrijednost za λ

$\vec{a}=(3,-4,-5)$

$|\vec{a}|=\sqrt{9+16+25}=\sqrt{50}=\sqrt{2\cdot 25}=5\sqrt{2}$

$|\vec{b}|=3\sqrt{6}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=30+15=45$

$$\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=\frac{45}{5\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\cdot 3}}$$

$$\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=\frac{3}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \measuredangle(\vec{a},\vec{b})=30^\circ$$

veličina ugla između vektora