Univerzitet u Zenici
Mašinski fakultet
Odsjek: Opšte mašinstvo
Zenica, 04.01.2010.

Pismeni ispit iz predmeta Matematika 1

1. Naći sve racionalne članove u razvoju binoma $(\sqrt[6]{x} - \sqrt[9]{x})^{42}$.

2. Riješiti matričnu jednačinu $AX - 2B = 3X + A$ gdje je $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ i
$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

3. Kroz središte S duži određene tačkama $A(1,3,0)$ i $B(-3,7,2)$ postaviti pravu s paralelnu pravoj koja je zadana kao presjek ravni $\alpha: \ 6x - 4y + z = 16$ i $\beta: \ y + 2z + 1 = 0$.

4. Ispitati i grafički predstaviti funkciju $y = \dfrac{x^2 - 9x + 18}{x - 2}$.

(Za uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

Naći sve racionalne članove u razvoju binoma $\left(\sqrt[6]{x}-\sqrt[9]{x}\right)^{42}$.

R.j. $$\left(\sqrt[6]{x}-\sqrt[9]{x}\right)^{42}=\sum_{k=0}^{42}\binom{42}{k}\left(\sqrt[6]{x}\right)^{42-k}\left(\sqrt[9]{x}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{42}\binom{42}{k}x^{7-\frac{k}{6}}\cdot x^{\frac{k}{9}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{42}\binom{42}{k}x^{7-\frac{k}{6}+\frac{k}{9}}$$

Da bi član u razvoju našeg binoma bio racionalan potrebno je i dovoljno da je $7-\frac{k}{6}+\frac{k}{9}$ cio broj. tj. da su $\frac{k}{6}$ i $\frac{k}{9}$ cijeli brojevi

$\frac{k}{6}$ je cio broj ako je $k\in\{0,6,12,18,24,30,36,42\}$

$\frac{k}{9}$ je cio broj ako je $k\in\{0,9,18,27,36\}$

Racionalni članovi u razvoju binoma su za vrijednost $k=0$, $k=18$ i $k=36$.

Prvi, devetnaesti i tridesetsedmi član u razvoju binoma je racionalan.

(#) Riješiti matričnu jednačinu: $AX - 2B = 3X + A$ gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rj.

$$AX - 2B = 3X + A$$

$$AX - 3X = 2B + A$$

$$\underbrace{(A - 3I)}_{M} X = \underbrace{2B + A}_{N}$$

$$MX = N \quad / \cdot M^{-1} \text{ sa lijeve str.}$$

$$M^{-1} M X = M^{-1} \cdot N$$

$$X = M^{-1} \cdot N$$

$$M = A - 3I = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N = 2B + A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \\ 8 & 0 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 4 & 11 & 4 \\ 8 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} M_{kof}^{T}$$

$$\det M = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$M_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad M_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$M_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad M_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$M_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad M_{23} = (1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$M_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$M_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

$$M_{kof} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & 6 \end{bmatrix}, \quad M_{kof}^{T} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

$$X = M^{-1} \cdot N = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 4 & 11 & 4 \\ 8 & 0 & 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 20 & -1 & 16 \\ -36 & 33 & 48 \\ 48 & 0 & 60 \end{bmatrix}$$

$8 - 4 + 16$

$10 - 11 + 0$

$0 - 4 + 20$

$0 + 12 - 48$

$0 + 33 + 0$

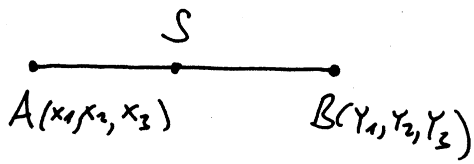
$12 - 60$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{8}{3} \\ -6 & \frac{11}{2} & 8 \\ 8 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

traženo rješenje

(#) Kroz središte S duži određene tačkama $A(1,3,0)$ i $B(-3,7,2)$ postaviti pravu s paralelnu pravoj koja je zadana kao presjek ravni $\alpha: 6x-4y+z=16$ i $\beta: y+2z+1=0$.

Rj.



S sredina duži AB

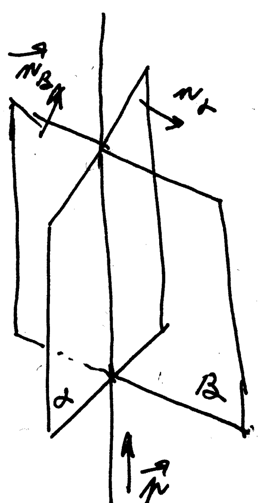
$$S\left(\frac{x_1+y_1}{2}, \frac{x_2+y_2}{2}, \frac{x_3+y_3}{2}\right).$$

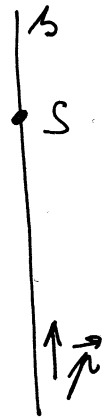
$A(1,3,0)$

$B(-3,7,2)$

$S(-1,5,1)$ sredina duži AB

$$s: \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$$ jednačina prave kroz jednu tačku





$\vec{p} = (l, m, n)$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{p} \perp \vec{n}_\alpha \\ \vec{p} \perp \vec{n}_\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{p} \parallel \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$$

$\Downarrow$

$\exists k: \vec{p} = k(\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta)$

$$\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9\vec{i} - 12\vec{j} + 6\vec{k}$$
$$= (-9, -12, 6)$$

$\vec{n}_\alpha = (6, -4, 1)$

$\vec{n}_\beta = (0, 1, 2)$

Pa za $\vec{p}$ možemo uzeti $\vec{p} = (3, 4, -2)$

$$s: \frac{x+1}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z-1}{-2}$$ tražena jednačina prave

(#) Ispitati i grafički predstaviti f-ju $y = \frac{x^2-9x+18}{x-2}$.

Rj.

definiciono područje

$x-2 \neq 0$

$x \neq 2$

$D: x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

parnost (neparnost), periodičnost

D nije simetrično $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f-ja nije ni parna ni neparna

(f-ja nije periodična)

nule, presjek grafa sa y-osom, znak f-je

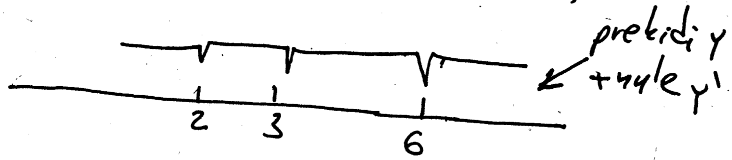
$y=0$: akko $x^2-9x+18=0$

$(x-3)(x-6)=0$

$(3,0)$ i $(6,0)$ su nule f-je

$x=0$: $f(0) = \frac{18}{-2} = -9$

$(0,-9)$ je presjek grafa sa y-osom



x	$(-\infty, 2)$	$(2,3)$	$(3,6)$	$(6,+\infty)$
$x-3$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-6$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x-2$	$-$	$+$	$+$	$+$
y	$-$	$+$	$-$	$+$

znak f-je

ponašanje na krajevima intervala definisanosti i asimptote

za $x=2$ f-ja ima prekid

$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} \frac{x^2-9x+18}{x-2} = \frac{(2-0)^2-9(2-0)+18}{2-0-2} = \frac{\text{pozitivan broj}}{-0} = -\infty$

$\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} \frac{x^2-9x+18}{x-2} = \frac{(2+0)^2-9(2+0)+18}{2+0-2} = \frac{\text{pozitivan broj}}{+0} = +\infty$

$\Rightarrow x=2$ je V. A.

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-9x+18}{x-2} \begin{matrix} /:x^2 \\ /:x^2 \end{matrix} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{9}{x}+\frac{18}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = \frac{1}{0} = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\Rightarrow$ f-ja nema H. A.

Tražimo kosu asimptotu u obliku $y = kx+n$

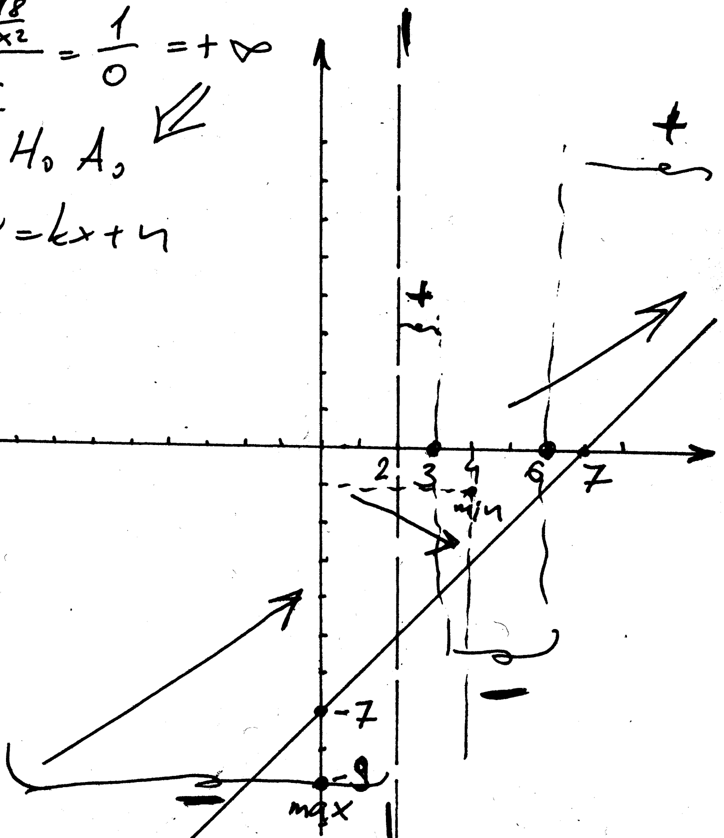
$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-9x+18}{x^2-2x} \begin{matrix} /:x^2 \\ /:x^2 \end{matrix} = 1$

$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - k\cdot x] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2-9x+18}{x-2} - x\right] =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}-9x+18-\cancel{x^2}+2x}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-7x+18}{x-2} \begin{matrix} /:x \\ /:x \end{matrix}$

$= -7$ $y = x-7$ je K. A.

Nakon ovog koraka počinjemo sa skiciranjem grafa f-je.



rast i opadanje

$$y' = \left(\frac{x^2-9x+18}{x-2}\right)' = \frac{(2x-9)(x-2)-(x^2-9x+18)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-13x+18-x^2+9x-18}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{x^2-4x}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+4-4}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2-4}{(x-2)^2} = 1-\frac{4}{(x-2)^2}$$

↑ mogli smo ostaviti i u ovom obliku

$y'=0$ akko $x^2-4x=0$

$x(x-4)=0$

$x_1=0,\ x_2=4$

0 2 4 ← prekidi y + nule y'

x	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,4)$	$(4,+\infty)$
y'	+	−	−	+
y	↗	↘	↘	↗
		max		min

ekstremi f-je

$y'=0$ akko $x_1=0$ i $x_2=4$

$x_1=0$ i $x_2=4$ su stacionarne tačke i u njima f-ja može imati ekstrem

Na osnovu tabele rasta i opadanja za $x_1=0$ imamo maksimum a za $x_2=4$ minimum. $f(0)=-9$, $f(4)=\frac{16-36+18}{2}=-1$

$(0,-9)$ je tačka min a $(4,-1)$ je tačka maksimuma).

prevojne tačke

$$y'' = \left(1-4(x-2)^{-2}\right)' = (-4)(-2)(x-2)^{-3}$$

$$y'' = \frac{8}{(x-2)^3}$$

2 ← prekidi y + nule y''

Kako je $y''\neq 0$ za $\forall x\in D$ to f-ja nema prevojnih tački

x	$(-\infty,2)$	$(2,+\infty)$
y''	−	+
y	∩	∪

konveksnost i konkavnost