Univerzitet u Zenici
Mašinski fakultet
Odsjek: Opšte mašinstvo
Zenica, 17.06.2010.

Pismeni ispit iz predmeta Matematika 1

1. Matematičkom indukcijom dokazati da za sve prirodne brojeve važe sljedeće jednakosti:
a) $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$;
b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2$;
c) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

2. Kroz tačku $M_1(1, -2, 1)$ provući pravu paralelnu pravoj $\begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ 2x + y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$.

3. Ako je $h(x) = \frac{1}{sinx} - \frac{1}{x}$ izračunati $\lim\limits_{x \to 0} h'(x)$.

4. Ispitati i grafički predstaviti funkciju $y = \frac{x}{x^2 - 4}$.

(Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(#) Matematičkom indukcijom dokazati da za sve prirodne brojeve važe sljedeće jednakosti: a) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

b) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

c) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

rj. a) $1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$

BAZA INDUKCIJE

Pokažimo da je tvrdnja tačna za $k=1$. $1=1^2$ Tvrdnja je tačna za k=1.

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za $k=1,2,\ldots,n$ tj. $1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$ za sve k od 1 do n. Pokažimo da je tvrdnja tačna za $n+1$.

tj. pokažimo da $1+3+\ldots+(2n+1)=(n+1)^2$

$$\underline{\underline{1+3+5+\ldots+(2n-1)}}+(2n+1)\overset{\text{premo pretpostavci}}{=}\underline{\underline{n^2}}+(2n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2$$

Dobili smo $1+3+5+\ldots+(2n+1)=(n+1)^2$ što je i treblo.

ZAKLJUČAK

Jednakost $1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$ je tačna za sve prirodne brojeve.

b) $1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$

BAZA INDUKCIJE

Pokažimo da je tvrdnja tačna za $k=1$. $1^3=\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2=1^2$ Tvrdnja je tačna za $k=1$

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je $1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$ za $\forall k=1,2,\ldots,n$

Na osnovu ove pretpostavke pokažimo da $1^3+2^3+\ldots+(n+1)^3=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$.

Imamo $1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3\overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{=}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{4(n+1)^3}{4}=$

$$=\frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4}=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$ što je i trebalo dobiti

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve.

c) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$

BAZA INDUKCIJE

... sami ...

KORAK INDUKCIJE

$$\ldots\ \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=$$

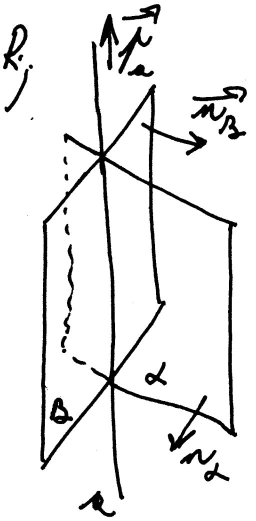
$$\overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{=}\frac{n}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$$ što je i trebalo dobiti

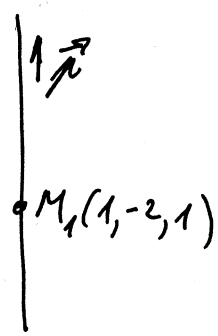
ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve

Kroz tačku $M_1(1,-2,1)$ povući pravu paralelnu pravoj $\begin{cases} x-y+z-4=0 \\ 2x+y-2z+5=0 \end{cases}$.

R:





$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$ jednačina prave kroz tačku $M(x_1,y_1,z_1)$

$\alpha: x-y+z-4=0$

$\vec{n}_\alpha=(1,-1,1)$ vektor normale na ravan α

$\beta: 2x+y-2z+5=0$

$\vec{n}_\beta=(2,1,-2)$ vektor normale na ravan β

$\vec{p}_a \parallel \vec{p}$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{p}_a \perp \vec{n}_\alpha \\ \vec{p}_a \perp \vec{n}_\beta\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\vec{p}_a \parallel \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta \\ \vec{p} \parallel \vec{p}_a\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{p} \parallel \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$$

$$\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}=(2-1)\vec{i}-(-2-2)\vec{j}+(1+2)\vec{k}=(1,4,3)$$

Za vektor pravca tražene prave mogu uzeti

$$\vec{p}=(1,4,3)$$

$$M_1(\overset{x_1}{1},\overset{y_1}{-2},\overset{z_1}{1})$$

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{3}$$

jednačina tražene prave

Ako je $h(x)=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}$ izračunati $\lim\limits_{x\to 0} h'(x)$.

Rj. $h(x)=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sin x}{x\sin x}$

$$h'(x)=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'-\left(\frac{1}{x}\right)'=(\sin^{-1}x)'-(x^{-1})'=(-1)\sin^{-2}x\cdot\cos x-(-1)x^{-2}$$

$$h'(x)=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{\cos x}{\sin^2 x}=\frac{\sin^2 x-x^2\cos x}{x^2\sin^2 x}$$

$$\lim_{x\to 0}h'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2x-x^2\cos x}{x^2\sin^2x}\left(=\frac{0}{0}\right)\overset{L.P.}{=}$$

$$\overset{L.P.}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{2\sin x\cos x}^{\sin 2x}-(2x\cos x+x^2(-\sin x))}{2x\sin^2x+x^2\underbrace{2\sin x\cos x}_{\sin 2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2x\cos x+x^2\sin x}{2x\sin^2x+x^2\sin 2x}$$

$$\left(=\frac{0}{0}\right)\overset{L.P.}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x\cdot 2-2(\cos x+x(-\sin x))+(2x\sin x+x^2\cos x)}{2(\sin^2x+x\underbrace{2\sin x\cos x}_{\sin 2x})+2x\sin 2x+x^2\cos 2x\cdot 2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x-2\cos x+2x\sin x+2x\sin x+x^2\cos x}{2\sin^2x+\underline{\underline{2x\sin 2x}}+\underline{\underline{2x\sin 2x}}+2x^2\cos 2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x-2\cos x+x^2\cos x+4x\sin x}{2\sin^2x+2x^2\cos 2x+4x\sin 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(-\sin 2x)\cdot 2-2(-\sin x)+(2x\cos x+x^2(-\sin x))+4\sin x+4x\cos x}{2\cdot\underbrace{2\sin x\cos x}_{\sin 2x}+2(2x\cos 2x+x^2(-\sin 2x)\cdot 2)+4\sin 2x+4x\cos 2x\cdot 2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-4\sin 2x+6\sin x+6x\cos x-x^2\sin x}{6\sin 2x+12x\cos 2x-4x^2\sin 2x}\left(=\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-4\cos 2x\cdot 2+6\cos x+6(\cos x+x(-\sin x))\cdot(2x\sin x+x^2\cos x)}{6\cos 2x\cdot 2+12(\cos 2x+x(-\sin 2x)\cdot 2)-4(2x\sin 2x+x^2\cos 2x\cdot 2)}=$$

$$=\frac{-8+6+6}{12+12}=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$$

Prema tome $\lim\limits_{x\to 0}h'(x)=\frac{1}{6}$

Ispitati i nacrtati grafik f-je $y=\frac{x}{x^2-4}$.

Rj. definiciono područje

$x^2-4\neq 0$

$x^2=4$

$x\neq\pm 2$

$\mathcal{D}: x\in(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$

parnost (neparnost), periodičnost

$$f(-x)=\frac{-x}{(-x)^2-4}=-\frac{x}{x^2-4}=-f(x)$$

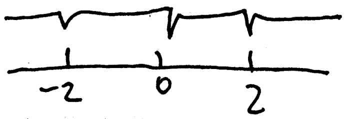
f-ja je neparna
(simetrična u odnosu na koordinatni početak, dovoljno ju je ispitati za $x>0$).
f-ja nije periodična

nule, presjek sa y-osom, znak f-je

$y=0$ akko $x=0$

$(0,0)$ je nula f-je i presjek sa y-osom

x	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
x	−	−	+	+
$x-2$	−	−	−	+
$x+2$	−	+	+	+
y	−	+	−	+



← nule y i prekidi y

znak f-je

ponašanje na krajevima intervala definisanosti i asimptote

za $x=\pm 2$ f-ja ima prekid

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}\frac{x}{x^2-4}=\frac{2-0}{(2-0)^2-4}=\frac{2-0}{4-0-4}=\frac{2-0}{-0}=-\infty \Rightarrow x=2 \text{ je V.A.}$$

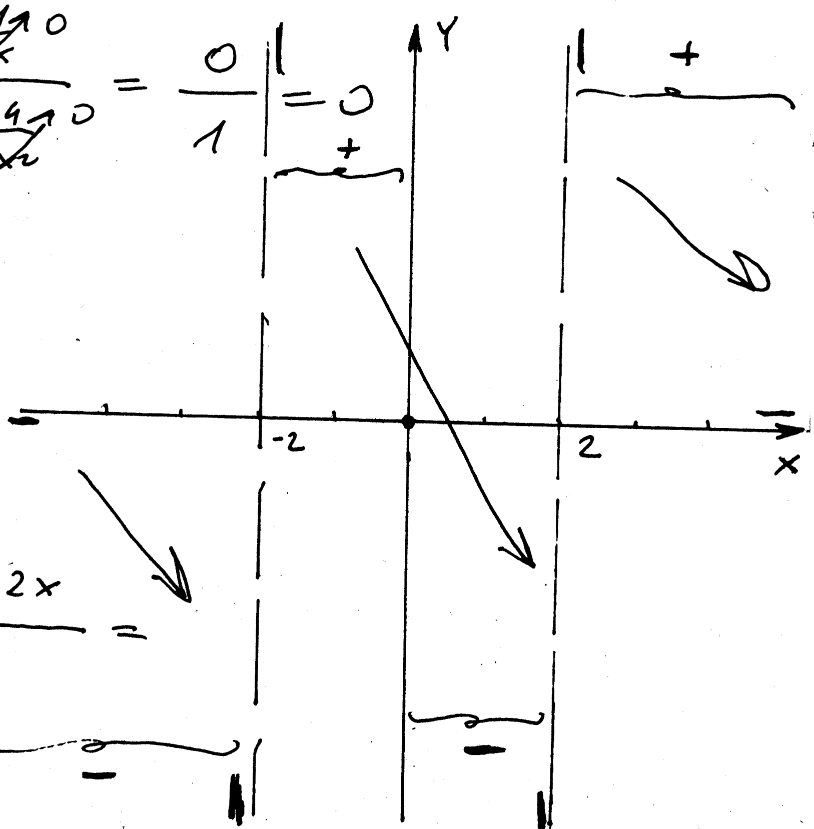
$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}\frac{x}{x^2-4}=\frac{2+0}{4+0-4}=\frac{2+0}{+0}=+\infty \Rightarrow x=2 \text{ je V.A.}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-4}\,\Big/ :x^2=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}\to 0}{1-\frac{4}{x^2}\to 0}=\frac{0}{1}=0$$

$\Rightarrow$ $y=0$ je H.A.

f-ja nema kosu asimptotu

Nakon ovog koraka počinjemo skicirati grafik.



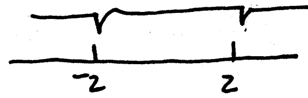
rast i opadanje

$$f'(x)=\left(\frac{x}{x^2-4}\right)'=\frac{1\cdot(x^2-4)-x\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=$$

$$=\frac{x^2-4-2x^2}{(x^2-4)^2}=\frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}$$

$y'=0 \iff -x^2-4=0$

$x^2=-4$



← prekidi y + nule y'

$y' = \dfrac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}$

$y' \neq 0$ za $\forall x \in \mathbb{R}$

$y' < 0$ za $\forall x \in \mathbb{R}$

x	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,+\infty)$
y'	$-$	$-$	$-$
y	↘	↘	↘

ekstremi f-je

f-ja nema stacionarnih tački ⇒ f-ja nema ekstrema

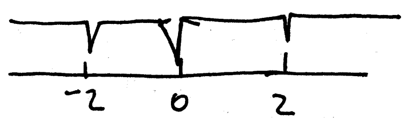
prevojne tačke i intervali konveksnosti i konkavnosti

$$y''=\left(\frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}\right)' = \frac{-2x(x^2-4)^2+(x^2+4)2(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4} = \frac{-2x(x^2-4)+4x(x^2+4)}{(x^2-4)^3}$$

$$y''=\frac{-2x^3+8x+4x^3+16x}{(x^2-4)^3} = \frac{2x^3+24x}{(x^2-4)^3} = \frac{2x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

$$y''=\frac{2x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

$y''=0$ akko $x=0$



x	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
y''	$-$	$+$
y	∩	∪

P.T.

konveksnost i konkavnost

$(0,0)$ je P.T.

$y=\dfrac{x}{x^2-4}$