



PISMENI ISPIT IZ MATEMATIKE 1

24.01.2008.

GRUPA A

1. Riješiti matricnu jednačinu:  $(A+B)^{-1}AX^{-1} = A^{-1}$ , gdje matrice  $A$  i  $B$  zadovoljavaju:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Naći tačku simetričnu tački  $M(1,-1,0)$  u odnosu na pravu  $p \dots \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-2}$ .

3. Izračunati integrale a)  $\int x \ln \frac{x-1}{x+1} dx$  b)  $\int \frac{3x^3 - 8x + 5}{\sqrt{x^2 - 4x - 7}} dx$ .

4. Ispitati i nacrtati graf funkcije:  $y = (x+1) \ln^2(x+1)$ .

Grupa B

1. Naći tačku simetričnu tački  $M(-1,5,0)$  u odnosu na ravan  $\pi \dots 2x - y + 2z + 2 = 0$ .

2. Gaussovom metodom riješiti sistem jednačina u zavisnosti o parametru  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= -2 \\ -4x_1 + 9x_2 - 7x_3 - 2x_4 &= \lambda \end{aligned}$$

3. Izračunati integrale: a)  $\int (\arcsin x)^2 dx$ , b)  $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x - 9}} dx$

4. Ispitati i nacrtati graf funkcije  $y = x^2(1 - \ln x)$

Grupa C

1. Odrediti parametar  $\lambda$  tako da funkcija  $f(x) = \begin{cases} x + 2\lambda, & x \leq 2 \\ 2x^2 - 4, & x > 2 \end{cases}$  bude neprekidna i nacrtati njen graf.

2. Date su tačke  $A(1,2,3)$ ,  $B(0,2,-1)$  i  $C(5,0,1)$ . Izračunati sve tri visine trougla  $ABC$  i jednačinu ravni u kojoj leže te visine.

3. Izračunati integrale: a)  $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$ , b)  $\int \frac{12x^3 + 16x^2 + 9x + 2}{\sqrt{4x^2 + 4x + 2}} dx$

4. Ispitati i nacrtati graf funkcije  $y = \frac{x}{1 - \ln x}$ .

## Grupa D

1. Naći  $\text{Im } z, \text{Re } z, \arg z$  ako je  $z = \frac{(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^5}{(-i - \sqrt{3})^{16}}$ .
2. Poznati su vrhovi paralelograma:  $A(1,1,4), C(2,3,-1), D(-2,2,0)$ . Odrediti nepoznati vrh  $B$  i površinu paralelograma, te jednačinu ravni paralelograma.
3. Izračunati integrale: a)  $\int \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ , b)  $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}} dx$ .
4. Ispitati i nacrtati graf funkcije  $y = \ln\left(x - \frac{1}{x}\right)$ .

07. 02. 2008.

## Grupa A

1. Izračunati sve vrijednosti korjena  $\sqrt[6]{-8i}$ .
2. Izračunati limese:  $L_1 = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x+1}{4}\right)^{\frac{1}{3-x}}$  i  $L_2 = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + x + 10}{5x^3 + 10x^2 + 2x + 4}$ .
3. Izračunati integral:  $A = \int \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1} dx$ .
4. Ispitati i nacrtati graf funkcije  $y = 1 + \frac{1}{\ln(x-1)}$ .

## Grupa B

1. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja u zavisnosti od parametara  $a$  i  $b$ :

$$\begin{aligned}x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 + 2x_5 &= 1 \\x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= -2 \\3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + ax_5 &= -3 \\x_1 + 7x_2 + bx_3 + 3x_4 &= -5\end{aligned}$$

2. Neka je  $\overline{AB} = 3\vec{p} - 4\vec{q}, \overline{BC} = \vec{p} + 5\vec{q}$ , gdje je  $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1, \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$ . Izračunati dužinu visine trougla  $ABC$  koja je povučena iz vrha  $C$ .
3. Izračunati integral:  $I = \int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$ .
4. Ispitati i nacrtati graf funkcije  $y = xe^{-\frac{1}{x^2}}$ .

## Grupa C

1. Izračunati integral:  $\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x - 2\sin^2 x + \sin x}$ .

2. Riješiti matricnu jednačinu  $AX - XA^*A = A^2$  ako je  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ , pri čemu je  $A^*$  adjugovana matrica matrice  $A$ .

3. Dokazati matematičkom indukcijom da za svaki prirodan broj  $n$  vrijedi  $\sum_{k=1}^n \frac{k}{3^k} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}$ .

4. Ispitati i nacrtati graf funkcije  $y = \frac{x^2(x+2)}{x^2-1}$ .

### Grupa D

1. Zadani su vektori  $\vec{p}$  i  $\vec{q}$  takvi da je  $|\vec{p}| = 2$ ,  $|\vec{q}| = 3$ ,  $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$ .

a) Izraziti vektor  $\vec{n}$  preko vektora  $\vec{p}$  i  $\vec{q}$  ako vrijedi  $\vec{n} \cdot \vec{p} = 7$  i  $\vec{n} \cdot \vec{q} = 3$ .

b) Izraziti jedinični vektor vektora  $\vec{n}$  preko  $\vec{p}$  i  $\vec{q}$ .

2. Ispitati i nacrtati graf funkcije  $y = \frac{x^2 + x + 4}{x^2 - x - 2}$ .

3. Izračunati integral  $\int \sin^2 x \sin^2 2x dx$ .

4. Odrediti  $f(2008) + f(2010)$  ako je  $f(n) = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$ .

Ispit 07. 04. 2008.

### Grupa A

1. Dokazati matematičkom indukcijom da za svaki prirodan broj  $n$  vrijedi

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra:

$$x + y - z = -1$$

$$(\lambda - 1)x + y - z = 1 - \lambda$$

$$x - y - (\lambda + 2)z = \lambda$$

3. Ispitati i nacrtati graf funkcije  $y = x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

4. Izračunati integral  $I = \int \frac{2x^4 - 2x^3 - x^2 + 2}{2x^3 - 4x^2 + 3x - 1} dx$

### Grupa B

1. Dati su kompleksni brojevi  $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ ,  $z_2 = 1 + \frac{i}{\sqrt{3}}$ . Izračunati

a)  $z_1^{11} z_2^8$     b)  $\frac{z_1^{13}}{z_2^{14}}$ .

2. Izračunati limes niza  $b_n = \sqrt[3]{n^3 + n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^3 - n^2 + 1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

- Ispitati i nacrtati graf funkcije  $y = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 3x + 2}$ .
- Izračunati integral  $I = \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1+x^5}}$ .

### Grupa C

- Riješiti matricnu jednačinu:  $(BX^{-1}A)^{-1} = AB$ , pri čemu su matrice  $A$  i  $B$  zadane  
 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ .
- Data je prava  $p: \begin{cases} x+2y-z+3=0 \\ 4x-y-3z+1=0 \end{cases}$  i tačke  $M(3,-1,0)$  i  $N(1,1,2)$ . Ravan  $\alpha$  sadrži pravu  $p$  i tačku  $M$ . Naći ugao između pravne  $MN$  i ravni  $\alpha$ .
- Ispitati i nacrtati graf funkcije  $y = (x+1)e^{\frac{-1}{x}}$ .
- Izračunati integral  $A = \int x^2 \arccos x dx$ .

### Grupa D

- Ako je  $z = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$ , izračunati determinantu  $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & z^2 \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix}$ .
- Prava  $a: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-5}{1}$  siječe ravan  $\alpha: 3x + y - z + 4 = 0$  u tački  $S$ . Ravan  $\beta$  sadrži pravu  $a$  i tačku  $T(-2, 4, 3)$ . Naći tačku  $S$ , te ugao između ravni  $\alpha$  i  $\beta$ .
- Ispitati i nacrtati graf funkcije  $y = 1 + \frac{1}{\ln(x+1)}$ .
- Izračunati integral  $A = \int \frac{x^5 dx}{x^6 + 9x^3 + 8}$ .

Ispit iz Matematike 1, 13. 06. 2008.

### Grupa A

- Izračunati  $|z|$ ,  $\operatorname{Re}(z)$ ,  $\operatorname{Im}(z)$ ,  $\arg(z)$ , ako je  $z = [(\sqrt{3} + i)(1 - i)^7]^8$ .
- Prava  $a: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{0}$  siječe ravan  $\alpha: 3x + y - z + 4 = 0$  u tački  $S$ . Ravan  $\beta$  sadrži pravu  $a$  i tačku  $T(-2, 4, 3)$ . Naći tačku  $S$ , te ugao između ravni  $\alpha$  i  $\beta$ .
- Ispitati i nacrtati graf funkcije  $y = \frac{x^3}{x^2 - 2x - 8}$ .
- Izračunati integral  $I = \int \frac{3x+4+2\sqrt{x+1}}{(x+1)(x+2)} dx$ .

## Grupa B

1. Odrediti tačke prekida funkcije  $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 3x-x^2, & x > 2 \end{cases}$  i nacrtati njen grafik.
2. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra:  
$$\begin{aligned} (\lambda - 2)x - 3y + 2z &= 1 \\ 3x - 3y + (\lambda - 3)z &= 1 \\ x - y + 2z &= -1 \end{aligned}$$
3. Ispitati i nacrtati graf funkcije  $y = \frac{x \ln x}{\ln x - 1}$ .
4. Izračunati integral  $I = \int \frac{\cos^7 x}{\sqrt[5]{\sin^{11} x}} dx$ .

## Grupa C

1. Ispitati i nacrtati graf funkcije  $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ .
2. Izračunati integral  $\int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$ .
3. Pretvori  $z = \frac{i - \sqrt{3}}{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}$  i  $w = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}}$  u trigonometrijski oblik te izračunaj  $z^3$  i  $\sqrt[4]{w}$ .
4. Dati su vektori  $\vec{m}, \vec{n}$  takvi da je  $|\vec{m}| = 1$ ,  $|\vec{n}| = 2$  i  $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{4}$ . Naći površinu i unutrašnje uglove paralelograma ako su vektori dijagonala  $\vec{d}_1 = 5\vec{m} - 2\vec{n}$  i  $\vec{d}_2 = 3\vec{m} + 4\vec{n}$ .

## Grupa D

1. Ispitati i nacrtati graf funkcije  $y = (1+x^2)e^x$ .
2. Izračunati integral  $\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x}$ .
3. Dokazati matematičkom indukcijom da vrijedi:  $57 \mid 7^{n+2} + 8^{2n+1}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$
4. Riješiti matričnu jednačinu :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 21 \\ 0 & 7 & 0 \\ 21 & 21 & 21 \end{bmatrix}$$

**Grupa A**

1. Naći racionalne članove u razvoju  $(\sqrt[5]{3} + \sqrt[3]{2})^{24}$ .
2. Data je četverostrana piramida ABCDE, čija je baza paralelogram ABCD. Ako je  $A(1, -2, -1), B(3, 0, 1), C(2, -2, 0), E(-1, -1, 4)$ , izračunati površinu trougla ACD i zapreminu date piramide.
3. Ispitati i nacrtati graf funkcije  $y = 4e^{-x} - 3e^{-2x}$ .
4. Izračunati integral  $I = \int x \sin^2 x \cos x dx$ .

**Grupa B**

1. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametara  $a$  i  $b$ :
 
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 6x_1 - ax_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= b. \end{aligned}$$
2. Izračunati bez upotrebe L'Hopitalovog pravila  $L_1 = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{3-x}}$  i  $L_2 = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + \sqrt{x+2}}{x^3 + 1}$ .
3. Ispitati i nacrtati graf funkcije  $y = \frac{x-1}{x^3 - 2x^2}$ .
4. Izračunati integral  $I = \int \frac{e^{2x} + e^x}{e^{4x} + 5e^{2x} + 4} dx$ .

**Grupa C**

1. Izračunati sve kompleksne vrijednosti korijena  $\sqrt[3]{(-1+i)^{10}}$ .
2. Naći jednačinu ravni koja sadrži tačke  $A(3, 0, 1), B(2, -2, 0), C(0, -4, -2)$  i udaljenost tačke  $D(-1, -1, 4)$  od te ravni.
3. Ispitati i nacrtati graf funkcije  $y = \frac{3x^2 - 1}{(x^2 + 1)^3}$ .
4. Izračunati integral  $I = \int \frac{x^5}{\sqrt{(2x^2 + 1)^3}} dx$ .

**Grupa D**

1. Diskutovati rang matrice  $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & \lambda - 1 & 1 \\ 3 & \lambda & 4 & -1 \end{bmatrix}$  za razne vrijednosti parametra  $\lambda$ .
2. Naći jednačinu tangente i normale na krivu  $y = \cos^2 3x$  u tački sa apscisom  $x = \frac{\pi}{4}$ .
3. Ispitati i nacrtati graf funkcije  $y = \ln(2x^2 - x^4)$ .

4. Izračunati integral  $I = \int \frac{\sin x dx}{1 + \sin x}$ .

Ispit iz Matematike 1, 01. 09. 2008.

### Grupa A

1. Dokazati metodom matematičke indukcije tvrdnju

$$1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + \dots + n(n-2) = \frac{n(n+1)(2n-5)}{6} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

2. Izračunati  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + 4x \right)}{x}$ .

3. Ispitati i nacrtati graf funkcije  $y = x^2 e^{-\frac{x}{2}}$ .

4. Izračunati integral  $I = \int e^{2x} \sqrt{e^x + e^{2x}} dx$ .

### Grupa B

1. Naći sve vrijednosti izraza  $\sqrt{z}$  (ima ih 4) ako je  $z = (1-i)\sqrt{\sqrt{3}-i}$ .

2. Izračunati udaljenost tačke  $M(2, 3, -1)$  od prave  $a: \begin{cases} 2x - 2y + z + 3 = 0 \\ 3x - 2y + 2z + 17 = 0 \end{cases}$ .

3. Ispitati i nacrtati graf funkcije  $y = \frac{\ln^2 x - 1}{x}$ .

4. Izračunati integral  $I = \int \frac{1}{x\sqrt{3x^2 - 2x}} dx$

### GRUPA C

1. Dokazati matematičkom indukcijom da za svaki prirodan broj  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi  $3 \mid n^3 + 20n$ .

2. Dati su vektori  $\vec{a} = (2t, 1, 1-t)$ ,  $\vec{b} = (5, -1, 8+t)$  i  $\vec{c} = (1, 3, 0)$ . Odrediti  $t$  tako da vektor  $\vec{a}$  zaklapa jednake uglove sa vektorima  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$ , pa za tako određeno  $t$  odrediti nagib vektora  $\vec{c}$  prema ravni određenoj vektorima  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .

3. Izračunati integral:  $\int e^{-x} \cos^2 x dx$ .

4. Ispitati i nacrtati graf funkcije:  $y = \frac{x^3 + 2x^2}{2(x-1)^2}$

### GRUPA D

1. Riješiti matricnu jednačinu:  $Y(A - 2I) = A + I$ , gdje je  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

2. Izračunati determinantu:  $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$ , a zatim riješi nejednačinu

$$D < 3(x^2 - 4)$$

3. Izračunati integral:  $\int \frac{\arctg 2x}{x^3} dx$ .

4. Ispitati i nacrtati graf funkcije:  $y = \frac{x^3 + x}{x^2 - 1}$ .

Ispit iz Matematike 1, 15. 09. 2008.

### Grupa A

1. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra  $a$ :

$$x + y - z = 0$$

$$x - y + az = 1$$

$$-x - 3y + (a + 2)z = a^2$$

2. Dokazati da su tačke  $A(3, -4, -2)$ ,  $B(0, 2, -4)$ ,  $C(2, 5, 2)$ ,  $D(5, -1, 4)$  vrhovi jednog kvadrata i naći jednačinu ravni tog kvadrata.

3. Izračunati integral:  $\int \frac{x^5}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1} dx$

4. Ispitati i nacrtati graf funkcije:  $y = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 1}$ .

### Grupa B

1. Dat je kompleksni broj  $z = 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$ . Napisati taj broj u trigonometrijskom obliku i izračunati  $\sqrt{z}$ , ako je

a)  $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ , b)  $\alpha = \frac{4\pi}{3}$ .

2. Izračunati  $L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - x \right)$ .

3. Izračunati integral:  $I = \int \cos^7 x \sin^4 x dx$ .

4. Ispitati i nacrtati graf funkcije:  $y = x^3 e^{-x}$ .

### Grupa C

1. Riješiti matricnu jednačinu  $(A + 3I)(X - I) = B$ , ako je

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -2 \\ 2 & 8 & 0 \\ -1 & -5 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, I - \text{jedinična matrica.}$$

2. Naći jednačine tangenti i normala na krivu  $y = 4x^4 - 11x^2 - 3$  u nul – tačkama krive.



- Izračunati integral:  $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^7}}$ .
- Ispitati i nacrtati graf funkcije:  $y = e^{\frac{x-2}{x+3}}$ .

### Grupa D

- Naći racionalne članove u razvoju  $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{6})^{25}$ .
- Dokazati da su prave  $a: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+4}{1}$  i  $b: \begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ 4x-5y-2z-3=0 \end{cases}$  paralelne, pa zatim naći jednačinu ravni koja ih sadrži.
- Izračunati integral:  $I = \int \frac{dx}{2+3\sin 2x+4\cos^2 x}$ .
- Ispitati i nacrtati graf funkcije:  $y = \frac{x^2}{\ln x - 2}$ .

Ispit iz Matematike 1, 14. 10. 2008.

### Grupa A

- Dat je kompleksni broj  $z$  čiji je argument  $\arg(z) = \frac{2\pi}{3}$ , a modul  $|z| = 2\sqrt{3}$ . Izračunati  $(z-4i)^{21}$ .
- Izračunati limese pomoću L' Hospitalovog pravila  $L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ ;  $L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\lg x}$ .
- Ispitati i nacrtati graf funkcije:  $y = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$ .
- Izračunati integral  $A = \int \frac{x dx}{x^3 + 3x + 4}$ .

### Grupa B

- Dokazati matematičkom indukcijom tvrdnju  $6 \mid 5^{2n-1} + 42n + 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- Riješiti matricnu jednačinu:  $AX = BC + 2X$ , ako je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

- Ispitati i nacrtati graf funkcije:  $y = \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 1}$ .
- Izračunati integral  $I = \int \frac{x^3 + 3x}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)^2} dx$ .