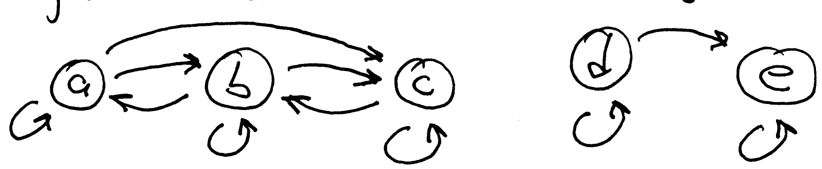
1. Na skupu $S=\{a,b,c,d,e\}$ definisana je relacija R sa $R=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c),(d,d),(d,e),(e,e)\}$. Da li je R relacija ekvivalencije? (Odgovor obrazložiti).

Rj: Da bi R bila relacija ekvivalencije treba da zadovoljava uslove:
- REFLEKSIVNOSTI $(\forall x\in S)\ (x,x)\in R$
- SIMETRIČNOSTI $(\forall x,y\in S)\ (x,y)\in R \Leftrightarrow (y,x)\in R$
- TRANZITIVNOSTI $(\forall x,y,z\in S)\ (x,y)\in R \wedge (y,z)\in R \Rightarrow (x,z)\in R$

Relacija R je refleksivna $((a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e)\in R)$
Relacija R nije simetrična $(a,c)\in R$ ali $(c,a)\notin R$.
Prema tome relacija R nije relacija ekvivalencije.
Mogli smo nacrtati i graf.



Vidimo da relacija nije ni tranzitivna. $((c,b)\in R \wedge (b,a)\in R$ ali $(c,a)\notin R)$.

2. Matematičkom indukcijom dokazati da svaki broj oblika 15^n, n je prirodan broj, pri djeljenju sa 7 ima ostatak 1.

Rj: 15^k, $k\in\mathbb{N}$

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $15 = 2\cdot 7+1$ vidimo da 15 pri djeljenju sa 7 ima ostatak 1
tvrdnja je tačna za $k=1$

INDUKCISKI KORAK

pretpostavimo da je tvrdnja tačna za $k=1,2,\dots,n$
tj. 15^k $(k\in\{1,2,\dots,n\})$ pri djeljenju sa 7 ima ostatak 1.
dokažimo da je tvrdnja tačna za $n+1$

$$15^{n+1} = 15^n\cdot \overbrace{15}^{(14+1)} = 14\cdot 15^n + 15 = 7\cdot 2\cdot 15^n + 14+1 = 7(2\cdot 15^n+2)+1$$

vidimo da 15^{n+1} pri djeljenju sa 7 ima ostatak 1
prema tome tvrdnja je tačna za $n+1$

ZAKLJUČAK

Broj oblika 15^n $(n\in\mathbb{N})$ pri djeljenju sa 7 ima ostatak 1.

3. Odrediti koji član razvoja binoma $(\sqrt[3]{a}+\sqrt{b})^{13}$ sadrži a^3b^2.

Rj. $$(\sqrt[3]{a}+\sqrt{b})^{13} = \sum_{k=0}^{13}\binom{13}{k}\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{13-k}\cdot\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^{k} = \sum_{k=0}^{13}\binom{13}{k} a^{\frac{13-k}{3}}\, b^{\frac{k}{2}}$$

$b^2 \Rightarrow \frac{k}{2}=2 \Rightarrow k=4 \qquad \frac{13-4}{3}=3 \Rightarrow a^3$ Zaklj. Za $k=4$ član razvoja binoma je a^3b^2

Peti član u razvoju binoma sadrži a^3b^2.

4. Kompleksan broj $z=-1-i\sqrt{3}$ predstaviti u trigonometrijskom obliku a zatim izračunati $\sqrt{z}$.

Rj.

$z=-1-i\sqrt{3}$

$a=-1$

$b=-\sqrt{3}$

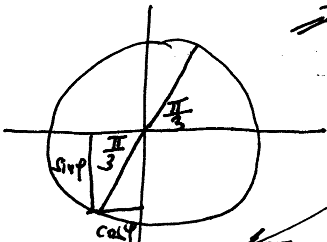
$|z|=\sqrt{1+3}=2$

$\cos\varphi=\frac{a}{|z|}=-\frac{1}{2}$

$\sin\varphi=\frac{b}{|z|}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

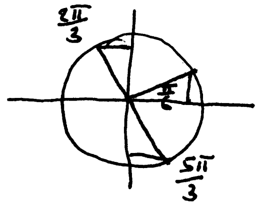
$\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}=\sqrt{3}$

$\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3}$



$\Rightarrow \varphi=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$

$z=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$



$$z_k=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{2}\right) \text{ za } k=\frac{4\pi}{3}$$

$$z_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{6}+i\sin\frac{4\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\sqrt{2}\left(-\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z_0=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i\sqrt{3}) \quad \text{prvo rješenje!}$$

$$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{4\pi+6\pi}{3}}{2}+i\sin\frac{\frac{4\pi+6\pi}{3}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{10\pi}{6}+i\sin\frac{10\pi}{6}\right)$$

$$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\boxed{z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i\sqrt{3})} \quad \text{drugo rješenje}$$

5. Izračunati: $\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 2\sqrt{2} & \sqrt{5} \\ 5\sqrt{3} & \sqrt{8} & 7\sqrt{5} \\ \sqrt{5}+2\sqrt{3} & 4\sqrt{2} & \sqrt{3}+2\sqrt{5} \end{vmatrix}$.

-18

$12-30$

$4\cdot 3-6\cdot 5$

Rj.:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 2\sqrt{2} & \sqrt{5} \\ 5\sqrt{3} & 2\sqrt{2} & 7\sqrt{5} \\ \sqrt{5}+2\sqrt{3} & 4\sqrt{2} & \sqrt{3}+2\sqrt{5} \end{vmatrix} \xrightarrow[III_v-I_v\cdot 2]{II_v-I_v} \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 2\sqrt{2} & \sqrt{5} \\ 4\sqrt{3} & 0 & 6\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 0 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = (-2\sqrt{2})\cdot\begin{vmatrix} 4\sqrt{3} & 6\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & \sqrt{3} \end{vmatrix} =$$

$$=36\sqrt{2}.$$