Univerzitet u Zenici
Filozofski fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 10.09.2015.

Linearna algebra, pismeni ispit

1. Dat je skup $\mathcal{L} = \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : AX - XA = \mathbf{0}\}$ gdje je $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Dokazati da je $\mathcal{L}$ vektorski potprostor prostora $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, te mu nađite jednu bazu i odredite dimenziju. Nadalje, konstruisati bazu prostora $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ čiji ni jedan vektor ne leži u $\mathcal{L}$. Odgovor obrazložite.

2. Neka je $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, matrica linearnog operatora $T : \mathcal{V}^3(0) \longrightarrow \mathcal{V}^3(0)$ u bazi $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ gdje je $\vec{a} = \vec{i}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

(a) Odredite $T(\vec{a})$, $T(\vec{b})$ i $T(\vec{c})$;

(b) Odredite vektor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \in \mathcal{V}^3(0)$ takav da je $T(\vec{v}) = \vec{i} - \vec{j}$.

3. Na vektorskom prostoru $\mathbb{R}_4[x]$ (prostor svih polinoma s realnim koeficijentima stepena najviše 4) zadan je linearni operator D_a s

$$(D_a(p))(x) = \frac{p(x+a) - p(x)}{a}$$

Odredite jezgru i sliku od D_a.

4. Za matricu A odredite matricu P takvu da je $P^{-1}AP$ dijagonalna matrica

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Važno: Ovaj papir treba predati zajedno s rješenjima zadataka! Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka. Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije predavanja rješenja numerišite svaku stranicu brojem oblika: broj-stranice/broj-strana...