



Univerzitet u Zenici
Filozofski fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 20.02.2015.

Linearna algebra, pismeni ispit

1. Neka je \mathcal{M} prostor rješenja homogenog sistema

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 &= 0 \\x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 0.\end{aligned}$$

Odredite neku bazu za \mathcal{M}^0 , tj. za anihilator od \mathcal{M} . Provjerite da li je funkcional $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4$ u \mathcal{M}^0 ? (Prisjetimo se: Za podskup $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$ definišemo anihilator od \mathcal{S} sa $\mathcal{S}^0 = \{f \in \mathcal{V}^* : f(v) = 0 \text{ za sve } v \in \mathcal{S}\}$, gdje \mathcal{V}^* označava dualni prostor prostora \mathcal{V}).

2. Neka je T linearan operator na prostoru \mathbb{R}^2 koji vektoru pridružuje centralnu simetriju (s obzirom na koordinatni početak) njegove ortogonalne projekcije na pravac $y = -x$. Odredite djelovanje linearnog operatora T na proizvoljnom vektoru $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ i odredite mu matični prikaz u standardnoj bazi, te u bazi $\{\vec{i} + \vec{j}, 2\vec{i} + \vec{j}\}$.

3. Zadan je linearni operator $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$ sa

$$T(a + bt + ct^2) = \frac{1}{3}(a + 2b - c + 3bt - 2(a - b - c)t^2).$$

a) Odredite matricu operatora T u kanonskoj bazi.

b) Ispitati da li je T projektor.

c) Odrediti $r(T)$ i $d(T)$ (Prisjetimo se: $r(T)$ i $d(T)$ predstavljaju rang i defekt operatora T i definiraju se kao brojevi $r(T) = \dim(\text{im } T)$, odnosno $d(T) = \dim(\text{ker } T)$).

4. Hermitskom matricom $\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{bmatrix}$, kao matricom u kanonskoj bazi, zadan je linearni operator $A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$. Odredite uvjete na koeficijente $a, b \in \mathbb{C}$ ako je poznato da je $0 \in \sigma(A)$ (simbol $\sigma(A)$ predstavlja skup svih svojstvenih vrijednosti matrice A). Postoji li baza u kojoj se A dijagonalizira? Ako postoji, nađite je.

Važno: Ovaj papir treba predati zajedno s rješenjima zadataka! Svaku formulu koju mislite koristiti, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

Zadaci su skinuti sa stranice ff.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na infoarrt@gmail.com