



Univerzitet u Zenici
Filozofski fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 07.07.2014.

Linearna algebra, pismeni ispit

1. (25%)(a) Objasniti koje osobine skup \mathcal{V} mora zadovoljavati da bi bio vektorski prostor nad poljem \mathbb{R} . Da li \mathcal{V} može biti konačan skup? Odgovor obrazložiti.

(75%)(b) Neka je

$$\mathcal{L} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \in \mathbb{R}^4 \mid -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0\}.$$

Dokazati da je \mathcal{L} potprostor vektorskog prostora \mathbb{R}^n , odrediti mu bazu, dimenziju i neki direktni komplement.

2. Zadan je operator $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$ sa

$$T(a + bt + ct^2) = a + b + c + (a + 3b)t + (a - b + 2c)t^2$$

Odrediti sve jednodimenzionalne potprostore koji su invarijantni u odnosu na operator T .

3. U prostoru svih realnih nizova $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ($\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots) \mid a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$) zadan je skup

$$\mathcal{L} = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid a_{n+2} - 2a_n = 0, n \in \mathbb{N}\}.$$

Dokazati da je preslikavanje $T : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ koje nizu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pridružuje niz $(a_{n+2})_{n \in \mathbb{N}}$ (tj. niz sa općim članom a_{n+2}) linearni operator. Odrediti matricu operatora T (matricu koordinata) u bazi $\mathcal{B} = \{(1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, \dots), (0, 1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, \dots)\}$.

4. U unitarnom prostoru \mathbb{R}^4 sa standardnim skalarnim proizvodom ortonormirati skup

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Važno: Ovaj papir treba predati zajedno s rješenjima zadataka! Svaku formulu koju mislite koristiti, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

Zadaci su skinuti sa stranice ff.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na infoarrt@gmail.com