Univerzitet u Zenici
Filozofski fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 27.05.2014.

Linearna algebra, majski apsolventski pismeni

1. Dokazati da je $\mathcal{V} = \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,|\, \mathrm{trag}(A) = 0\}$ vektorski podprostor prostora $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (gdje je $\mathrm{trag}(A) =$ suma dijagonalnih elemenata matrice A). Odrediti mu bazu i dimenziju. Nadopunite nađenu bazu do baze za $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

2. Odrediti za koje vrijednosti nepoznate x će vektor $(0,1,1,4)^\top \in \mathbb{R}^4$ pripadati $\mathrm{im}(A)$ ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Zadano je preslikavanje $T : V^3(0) \longrightarrow V^3(0)$ izrazom

$$T(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) = (a - 2b + c)\vec{i} + 3a\vec{j} - (2a - 4c)\vec{k}.$$

Dokazati da je T linearni operator i odredite mu matrični prikaz u bazi $\mathcal{B} = \{\vec{i} - \vec{j}, 2\vec{i} + \vec{j}, \vec{i} + \vec{k}\}$ (drugim riječima odredite $[T]_{\mathcal{B}}$).

4. U unitarnom prostoru $\mathcal{P}_3 = \{at^3 + bt^2 + ct + d \,|\, a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$ polinoma stepena ≤ 3 sa skalarnim proizvodom

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,\mathrm{d}t$$

dat je potprostor $\mathcal{M} = \mathrm{span}\{1+t, 1\}$. Odredite jednu bazu za $\mathcal{M}^\perp$.

Važno: Ovaj papir treba predati zajedno s rješenjima zadataka! Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.