Univerzitet u Zenici
Filozofski fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 25.03.2014.

Apsolventski pismeni ispit iz Linearne algebre

Pravila: Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

1. Neka je $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ i neka je $(a_1, a_2, ..., a_n)^\top$ fiksirani vektor iz $\mathcal{V}$. Dokazati da je familija svih elemenata $(x_1, x_2, ..., x_n)^\top$ iz $\mathcal{V}$ sa osobinom $a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0$ vektorski podprostor prostora $\mathcal{V}$. Drugim riječima da je

$$\mathcal{M} = \{(x_1, x_2, ..., x_n)^\top \in \mathcal{V} \,|\, a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0\}$$

vektorski podprostor od $\mathcal{V}$. Odrediti bazu i dimenziju ovog podprostora.

2. Zadana je linearna transformacija $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$T(a + bt + ct^2) = \begin{pmatrix} a - 2b & b + c \\ -2a - 4c & -2a + 4b \end{pmatrix}$$

Prikažite transformaciju T u paru standardnih baza (drugim riječima odrediti matricu koordinata $[T]_{\mathcal{S}\mathcal{S}'}$ gdje su $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}$' redom standardne baze za $\mathcal{P}_2$ i $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$) te odredite po jednu bazu za jezgru i sliku od T ($\mathcal{P}_2$ je prostor realnih polinoma stepena ≤ 2).

3. Dat je vektorski prostor $\mathcal{L}$ vektorskog prostora $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definisan sa

$$\mathcal{L} = \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,|\, AX - XA = \mathbf{0}, X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\}.$$

Razmatrajući standardni unutrašnji proizvod za matrice $\langle A, B \rangle = \mathrm{trag}(A^\top B)$ odrediti ortonormiranu bazu za $\mathcal{L}$.

4. Neka je $\mathcal{M} = \mathrm{span}\{a, b\}$ podprostor unitarnog prostora $\mathbb{R}^n$ (sa standardnim skalarnim proizvodom) razapet (generisan) vektorima $a = (0, 1, 2, ..., n-1)^\top$ i $b = (1, 1, 1, ..., 1)^\top$. Odrediti njegov ortogonalni komplement $\mathcal{M}^\perp$ te odredite ortogonalnu projekciju od z na $\mathcal{M}$ gdje je

$$z = (\frac{1}{2}n(3-n), \frac{1}{2}n(n-1), 0, 0, ..., 0)^\top \in \mathbb{R}^n.$$