Univerzitet u Zenici
Filozofski fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 17.02.2014.

Pismeni ispit iz Linearne algebre

Pravila: Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

1. Neka je $\mathcal{V}$ vektorski prostor $\mathbb{R}^3$ generisan vektorima x_1, x_2, x_3 (x_1, x_2 i x_3 su linearno nezavisni vektori)

$$\mathcal{V} = span\left\{ x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Ovo znači da za $\forall v \in \mathcal{V}$ $\exists$ jedinstveni $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ t.d. $v = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$. Sa $\mathcal{V}^*$ označimo skup svih linearnih preslikavanja sa $\mathcal{V}$ u $\mathbb{R}$ tj.

$$\mathcal{V}^* = \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathbb{R}) = \{T : \mathcal{V} \to \mathbb{R} \mid T \text{ je linearno}\}$$

i za svako $j \in \{1, 2, 3\}$ definišimo $T_j \in \mathcal{V}^*$ sa

$$T_j(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) = a_j$$

(50%)(a) Pokazati da je $\mathcal{B}^* = \{T_1, T_2, T_3\}$ baza za $\mathcal{V}^*$.
(50%)(b) Odrediti T_1, T_2 i T_3.

Napomena: Rješenja za (a) i (b) su nezavisna jedno od drugog. Prostor $\mathcal{V}^*$ se naziva dualni prostor prostora $\mathcal{V}$, a baza $\mathcal{B}^*$ se naziva dualna baza baze $\mathcal{B}$.

2. Posmatrajmo operator $T : \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathcal{P}_3$ na realnom vektorskom prostoru $\mathcal{P}_3$ svih polinoma sa realnim koeficijentima i stepena najviše 3, gdje za svaki polinom $p(x)$ iz $\mathcal{P}_3$ imamo $T(p(x)) = x\,p'(x)$, proizvod x-a sa izvodom $p'(x)$. Pokazati da je T linearni operator . Odrediti matricu (koordinata) A za operator T u odnosu na bazu $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ i izračunati $A[q(x)]_{\mathcal{B}}$ gdje je $q(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + q_3 x^3$.

3. Data je matrica $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. U $\mathbb{R}^n$ definišimo proizvod sa

$$\langle x, y\rangle = (Ax)^\top Ay$$

(a) Diskutovati za kakve matrice A je dati proizvod unutrašnji proizvod.
(b) Diskutovati za kakve matrice A, za dati proizvod vrijedi jednakost $\langle x, y\rangle = x^\top y$.

4. U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^4$, sa standardnim skalarnim proizvodom, zadan je podprostor $\mathcal{M}$ razapet vektorima $(2, 1, 0, 0)^\top$, $(1, 1, 1, 1)^\top$. Nađite jednu bazu za ortogonalni komplement od $\mathcal{M}$ te odredite ortogonalnu projekciju vektora $a = (3, -4, 5, -5)^\top$ na $\mathcal{M}$.