Univerzitet u Zenici
Filozofski fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 29.11.2013.

Prvi parcijalni pismeni ispit iz Linearne algebre

Pravila: Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

1. U prostoru $\mathbb{R}^5$ zadan je podprostor $\mathcal{M}$ razapet (generisan) vektorima $(0,0,1,0,0)^\top$ i $(0,1,0,1,0)^\top$ i podprostor

$$\mathcal{L} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^\top \in \mathbb{R}^5 \,|\, x_1 - x_2 + x_3 = 0,\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

(a) Odrediti bazu i dimenziju vektorskih prostora $\mathcal{M}$ i $\mathcal{L}$.
(b) Odrediti bazu i dimenziju vektorskih prostora $\mathcal{M} \cap \mathcal{L}$ i $\mathcal{M} + \mathcal{L}$.

2. Zadan je linearni operator $T : \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ sa

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a-b & -a+b+2c \\ a-c-d & -a+2c+d \end{bmatrix}.$$

(a) Odrediti po jednu bazu za $\ker(T)$ i $\mathrm{im}(T)$.
(b) Odredite matricu koordinata od T u odnosu na standardnu bazu prostora $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

3. Neka je T linearan operator na prostoru $\mathbb{R}^2$ koji vektor najprije reflektuje (zrcali) s obzirom na pravac $y = -x$, zatim ga rotira za ugao $\frac{\pi}{4}$ oko koordinatnog početka (oko izvorišta) u negativnom smjeru, te zatim reflektuje (zrcali) s obzirom na pravac $y = x$. Naći matricu (matricu koordinata) operatora T u bazi $\mathcal{B} = \left\{2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, -\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

4. Neka je $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$ i neka je d funkcija sa $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ u $\mathbb{R}$ definisana sa $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|, ..., |x_n-y_n|\}$. Provjeriti da li je $(\mathcal{M}, d)$ metrički prostor. Za slučaj kada je $n = 3$ grafički prikazati kugle $B(\mathbf{1};1)$ i $B(\mathbf{0};2)$.