Univerzitet u Zenici
Filozofski fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 29.11.2013.

Pismeni ispit iz Linearne algebre

Pravila: Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

1. Neka je $\mathcal{V}$ vektorski prostor svih matrica oblika 2×2 nad poljem realnih brojeva. Neka je $\mathcal{W}_1$ skup matrica oblika

$$\begin{pmatrix} x & -x \\ y & z \end{pmatrix}$$

a neka je $\mathcal{W}_2$ skup svih matrica oblika

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix}$$

(a) Dokazati da su $\mathcal{W}_1$ i $\mathcal{W}_2$ podprostori od $\mathcal{V}$.
(b) Odrediti bazu i dimenziju od $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_2$, $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ i $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$.

2. Zadan je linearni operator $T : \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ sa

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a-b & -a+b+2c \\ a-c-d & -a+2c+d \end{bmatrix}.$$

(a) Odrediti po jednu bazu za $\ker(T)$ i $\mathrm{im}(T)$.
(b) Odredite matricu koordinata od T u odnosu na standardnu bazu prostora $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

3. Posmatrajmo realni unitarni prostor $\mathcal{P}_2$, gdje za polinome

$$p = p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 \quad \text{i} \quad q = q(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2$$

je definisan unutrašnji proizvod na sljdeći način

$$\langle p, q \rangle = p_0 q_0 + p_1 q_1 + p_2 q_2.$$

Provjeriti da li su polinomi

$$u_1 = 3 + 4x + 5x^2, \quad u_2 = 9 + 12x + 5x^2, \quad u_3 = 1 - 7x + 25x^2,$$

linearno nezavisni u $\mathcal{P}_2$, pa pomoću njih formirati ortonormiranu bazu za $\mathcal{P}_2$.

4. Neka je $\mathcal{M}$ podprostor unitarnog prostora $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ generisan matricama $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Odredite jednu bazu za ortogonalni komplement od $\mathcal{M}$, te prikažite matricu $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ u obliku $X = Y_1 + Y_2$, gdje je $Y_1 \in \mathcal{M}$, a $Y_2 \in \mathcal{M}^{\perp}$. (Standardni skalarni proizvod u $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ je $\langle A, B \rangle = \mathrm{trag}(AB^{\top})$).