Univerzitet u Zenici
Filozofski fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 01.11.2013.

Pismeni ispit iz predmeta Linearna algebra

Uputa: Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

1. U $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ zadani su podprostori

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a - 2b = 0,\ a + c + d = 0 \right\} \quad \text{i}$$

$$\mathcal{N} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a + c = 0,\ a - 2b + d = 0 \right\}.$$

Odrediti po jednu bazu za $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ i $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$.

2. Zadan je linearni operator $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ svojom matricom $T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ u kanonskoj bazi $\{\vec{i}, \vec{j}\}$. Neka su $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}$.

(a) Odrediti $T(\vec{a})$, $T(\vec{b})$.

(b) Za koje $\alpha \in \mathbb{R}$ su vektori $T(\vec{a})$, $T(\vec{a} + \alpha\vec{b})$ kolinearni?

3. Neka je T linearan operator na prostoru $\mathbb{R}^2$ koji vektor najprije reflektuje (zrcali) s obzirom na pravac $y = -x$, zatim ga rotira za ugao $\frac{\pi}{4}$ oko koordinatnog početka (oko izvorišta) u negativnom smjeru, te zatim reflektuje (zrcali) s obzirom na pravac $y = x$. Naći matricu (matricu koordinata) operatora T u bazi $\mathcal{B} = \left\{ 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

4. U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^4$, sa skalarnim proizvodom

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3 + 2x_4 y_4$$

zadan je podprostor $\mathcal{V}$ razapet (generisan) vektorima $v_1 = (1, 0, 1, 0)^\top$ i $v_2 = (1, 0, 1, 1)^\top$. Prikažite vektor $x = (4, 2, 2, 4)^\top$ u obliku $x = v + w$, gdje je $v \in \mathcal{V}$, $w \in \mathcal{V}^\perp$.