Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 23.09.2013.

Pismeni ispit iz predmeta Linearna algebra

Bitna napomena: Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

1. Neka je $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ i neka je $(a_1, a_2, ..., a_n)^\top$ fiksirani vektor iz $\mathcal{V}$. Dokazati da je familija svih elemenata $(x_1, x_2, ..., x_n)^\top$ iz $\mathcal{V}$ sa osobinom $a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0$ vektorski podprostor prostora $\mathcal{V}$. Drugim riječima da je

$$\mathcal{M} = \{(x_1, x_2, ..., x_n)^\top \in \mathcal{V} \,|\, a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0\}$$

vektorski podprostor od $\mathcal{V}$. Odrediti bazu i dimenziju ovog podprostora.

2. Posmatrajmo vektorski prostor $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ svih $m \times n$ matrica. Pokazati da je funkcija definisana sa

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{trag}(A^\top B)$$

unutrašnji (skalarni) proizvod na prostoru $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

3. Posmatrajmo sljedeći skup od tri vektora

$$\left\{ x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(20%)(a) Koristeći standardni unutrašnji proizvod u $\mathbb{R}^4$ provjeriti da li su ovi vektori međusobno ortogonalni.

(50%)(b) Pronaći nenula vektor x_4 tako da je $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ skup međusobno ortogonalnih vektora.

(30%)(c) Pretvoriti dobijeni skup u ortonormiranu bazu za $\mathbb{R}^4$.

4. Zadana je linearna transformacija $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p(-1) \\ p(1) & p(2) \end{pmatrix}.$$

Prikažite transformaciju T u paru standardnih baza (drugim riječima odredite matricu koordinata od $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}'))$ u odnosu na par $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$, gdje su $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}'$, redom, standardne baze za $\mathcal{P}_2$ i $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, te mu odredite po jednu bazu za jezgru i sliku. Da li postoji polinom $q \in \mathcal{P}_2$ takav da je $T(q) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$? ($\mathcal{P}_2$ je prostor polinoma stepena ≤ 2).