



Univerzitet u Zenici  
Pedagoški fakultet  
Odsjek: Matematika i informatika  
Zenica, 01.07.2013.

## Pismeni ispit iz predmeta Linearna algebra

**Bitna napomena:** Svaku formulu koju mislite koristiti, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

**1.** Neka je  $\mathcal{L} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0, x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ . Dokazati da je  $\mathcal{L}$  podprostor od  $\mathbb{R}^4$ , odrediti mu bazu, dimenziju i neki direktni komplement (koji nije ortogonalni komplement).

**2.** (20%)(a) Neka je

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

linearni operator definisan sa

$$T(x, y, z) = (x - y, z, y - x).$$

Odrediti jezgru i sliku od  $T$  i izračunati njihove dimenzije.

(80%)(b) Na vektorskom prostoru  $\mathbb{R}_2[x]$  (polinoma sa realnim koeficijentima stepena najviše 2) zadan je linearni operator sa

$$D_\alpha(p(x)) = \frac{1}{\alpha}(p(x + \alpha) - p(x)), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0.$$

Odrediti jezgru i sliku od  $D_\alpha$ .

**3.** Neka je  $T$  linearni operator na prostoru  $\mathbb{R}^2$  koji djeluje tako da vektor prvo zarotira za ugao  $\frac{\pi}{2}$  u pozitivnom sjeru, pa dobijeni vektor zatim reflektuje u odnosu na  $x$ -osu.

(a) Odrediti matricu operatora  $T$  (tj., matricu koordinata od  $T$ ) u bazi  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

(b) Odrediti  $v \in \mathbb{R}^2$  takav da  $T(v) = v$  i  $\|v\| = 2\sqrt{2}$ .

**4.** Dat je unitarni prostor  $\mathcal{P}_3$ , polinoma stepena  $\leq 3$ , sa skalarnim (unutrašnjim) proizvodom

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx.$$

Neka je  $\mathcal{L}$  podprostor unitarnog prostora  $\mathcal{P}_3$ , generisan vektorima  $p_1(x) = 1 - x$  i  $p_2(x) = x^2 - x$ . Odrediti neku bazu za ortogonalni komplement od  $\mathcal{L}$ . Nadalje, prikažite  $p(x) = 1 - 2x + 5x^3$  u obliku  $q(x) + r(x)$ , gdje je  $q \in \mathcal{L}$ , a  $r \in \mathcal{L}^\perp$ .

Zadaci su skinuti sa stranice [pf.unze.ba/nabokov](http://pf.unze.ba/nabokov).  
Za uočene greške pisati na [infoarrt@gmail.com](mailto:infoarrt@gmail.com)