Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 14.02.2013.

Pismeni ispit iz predmeta **Linearna algebra**

Bitna napomena: Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

1. Dat je vektorski prostor $\mathbb{R}^+$ (svih pozitivnih realnih brojeva) nad poljem $\mathbb{R}$, na kome su operacije sabiranja vektora i množenje vektora skalarom definisane na sljedeći način

$$\text{vektorsko sabiranje: } \forall u, v \in \mathbb{R}^+ \quad u + v = uv;$$

$$\text{množenje skalarom: } \forall u \in \mathbb{R}^+, \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha u = u^\alpha.$$

Odrediti bazu i dimenziju ovog vektorskog prostora. Odgovor obrazložiti.

2. Neka je T linearni operator na prostoru $\mathbb{R}^2$ koji vektor najprije rotira za ugao $\pi/3$ oko koordinatnog početka u pozitivnom smjeru, a zatim reflektuje (zrcali) u odnosu na pravac $y = x$. Izračunati matricu operatora T (drugim riječima matricu koordinata od T) u bazi $\mathcal{B} = \{(1,1)^\top, (1,-1)^\top\}$. Odredite koordinate tačke $T(v)$ u odnosu na ovu bazu, gdje je v proizvoljan element iz $\mathbb{R}^2$.

3. U unitarnom prostoru $\mathcal{P}_2 = \{p(x) = ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ polinoma stepena manjeg ili jednakog 2 sa skalarnim (unutrašnjim) proizvodom $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x$ dat je podprostor

$$\mathcal{M} = \operatorname{span}\{x^2 - 1, x + 1\}.$$

Odredite jednu bazu za $\mathcal{M}^\perp$, te nađite prikaz polinoma $p(x) = 2x^2 + x + 5$ u obliku sume $p = p_1 + p_2$, pri čemu je $p_1 \in \mathcal{M}$, $p_2 \in \mathcal{M}^\perp$.

4. Zadana je linearna transformacija $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p(-1) \\ p(1) & p(2) \end{pmatrix}.$$

Prikažite transformaciju T u paru standardnih baza (drugim riječima odredite matricu koordinata od $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}'))$ u odnosu na par $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$, gdje su $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}'$, redom, standardne baze za $\mathcal{P}_2$ i $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, te mu odredite po jednu bazu za jezgru i sliku. Da li postoji polinom $q \in \mathcal{P}_2$ takav da je $T(q) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$? ($\mathcal{P}_2$ je prostor polinoma stepena ≤ 2).