Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 31.01.2013.

Pismeni ispit iz predmeta **Linearna algebra**

Bitna napomena: Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

1. Neka je $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ i neka je $(a_1, a_2, ..., a_n)^\top$ fiksirani vektor iz $\mathcal{V}$. Dokazati da je familija svih elemenata $(x_1, x_2, ..., x_n)^\top$ iz $\mathcal{V}$ sa osobinom $a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0$ vektorski podprostor prostora $\mathcal{V}$. Drugim riječima da je

$$\mathcal{M} = \{(x_1, x_2, ..., x_n)^\top \in \mathcal{V} \mid a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0\}$$

vektorski podprostor od $\mathcal{V}$. Odrediti bazu i dimenziju ovog podprostora.

2. (a) Neka je φ linearna transformacija $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ takva da $\varphi\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = 1$, $\varphi\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix} = 1$, $\varphi\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} = 0$, $\varphi\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} = 0$. Odrediti $\varphi\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$.

(b) Baza vektorskog prostora $\mathcal{L} = \left\{(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0, -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\right\}$ je $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\right\}$. Odrediti mu jedan ortogonalni komplement (u odnosu na standardni unutrašnji (skalarni) proizvod $\langle x, y\rangle = x^\top y$).

3. Neka je T linearni operator na prostoru $\mathbb{R}^2$ koji proizvoljan vektor $v \in \mathbb{R}^2$ preslikava osnom simetrijom s osom u pravoj $y = x$ u vektor v' (vidi sliku). (Drugim riječima T je osna simetrija s osom u pravoj $y = x$).

(a) Odrediti matricu koordinata T u odnosu na standardnu bazu.

(b) Odrediti (koordinate) osnu simetriju tačke $v = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ s osom u pravoj $y = x$.

(c) Odrediti koordinate osne simetrije T (odrediti matricu operatora T) u odnosu na bazu $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$.

4. Zadan je unitarni prostor $\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R})$ sa skalarnim (unutrašnjim) proizvodom $\langle A, B\rangle = \mathrm{trag}(A^\top B)$ i neka je $\mathcal{L}$ vektorski podprostor $\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R})$ definiran kao

$$\mathcal{L} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}0 & 3\\3 & -3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2 & -2\\6 & -2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\right\}.$$

Nađite ortonormiranu bazu za $\mathcal{L}$.

Zadaci su skinuti sa stranice pf.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*