Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 12.09.2011.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija 2**

Zadatak br. 1

a) Date su duži a i b. Nacrtati duž x ako je $x\sqrt{2}+1 = \dfrac{\sqrt{3a-a^2}}{\sqrt{b}}$, gdje je $a < 1 < b$.

b) U trouglu $\triangle ABC$ je $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 4 : 5$. Dokazati da prava koja sadrži poluprečnik BS (S je centar opisane kružnice $\triangle ABC$) siječe stranicu AC u tački N koja je dijeli u omjeru $1 : 2$ računajući od vrha A.

c) Ako jednakostraničnom trouglu $\triangle ABC$ (stranice a) svaku stranicu produžimo za a, dobijemo trougao $\triangle A_1B_1C_1$. U kojem omjeru se nalaze površine trouglova $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$.

d) Neka su dati krugovi $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ i $k_3(O_3, r_3)$ takvi da k_1 dodiruje krug k_2 u tački P, k_2 dodiruje krug k_3 u tački Q, a k_1 i k_3 nemaju zajedničkih tački. Na pravoj $p(O_1, O_3)$ date su tačke M i N takve da $M \in k_1$, $N \in k_3$ i važi poredak $M - O_1 - O_3 - N$. Neka je $\{T\} = p(O_1, O_3) \cap p(P, Q)$. Dokazati da su trouglovi $\triangle TNQ$ i $\triangle TPM$ slični.

e) Dokazati da težište trougla dijeli težišnicu u omjeru 2:1.

Zadatak br. 2

Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako je dato $AM = t_a$ i poluprečnici R_1 i R_2 kružnica opisanih oko trouglova $\triangle ABM$ i $\triangle ACM$.

Zadatak br. 3

Jedan ugao trougla dva puta je veći od drugog, dok težišna linija iz tjemena trećeg ugla dijeli taj ugao na dva dijela od kojih je jedan dva puta veći od drugog. Naći uglove trougla.

Zadatak br. 4

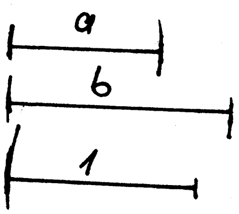
Konstruisati kružnicu koja dodiruje dvije date kružnice i datu pravu.

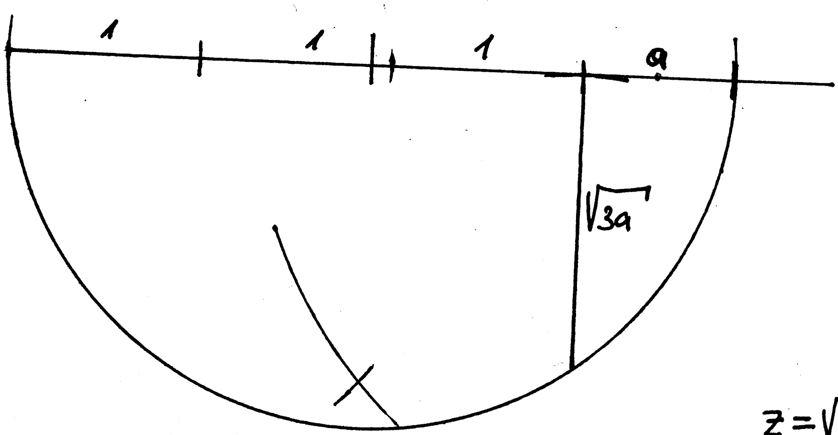
(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(#) Date su duži a i b. Nacrtati duž x ako je

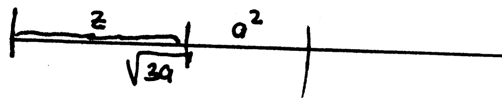
$$x\sqrt{2}+1 = \frac{\sqrt{3a}-a^2}{\sqrt{b}}, \quad a<1<b.$$

Rj.





$z=\sqrt{3a}-a^2$

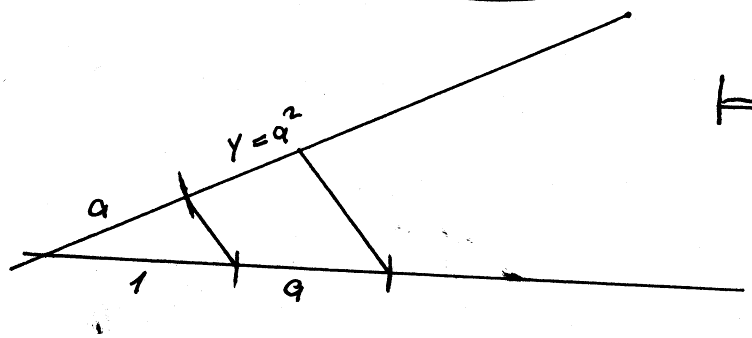


$Y=a^2$

$Y=a\cdot a$

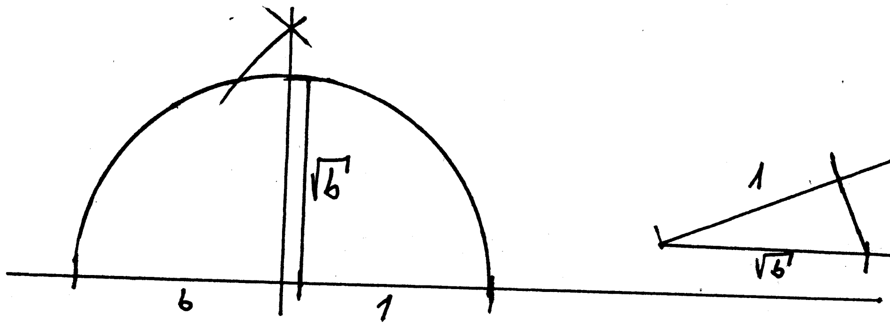
$\frac{Y}{a}=\frac{a}{1}$

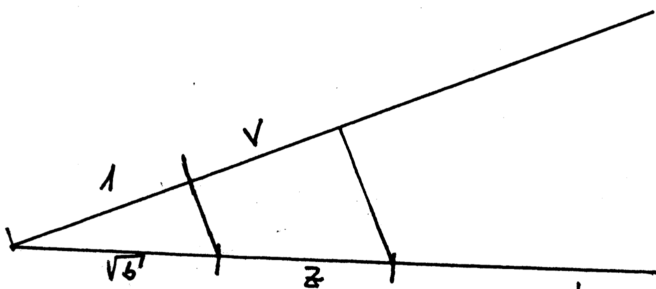
$\frac{1}{a}=\frac{a}{Y}$



$V=\frac{z}{\sqrt{b}}$

$\frac{\sqrt{b}}{z}=\frac{1}{V}$



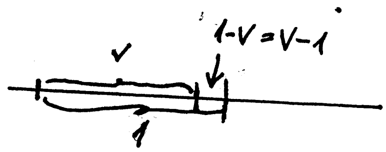


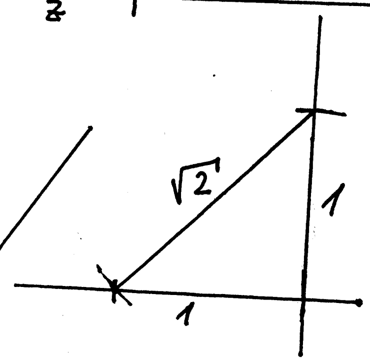
Sad imamo $x\sqrt{2}+1=V$

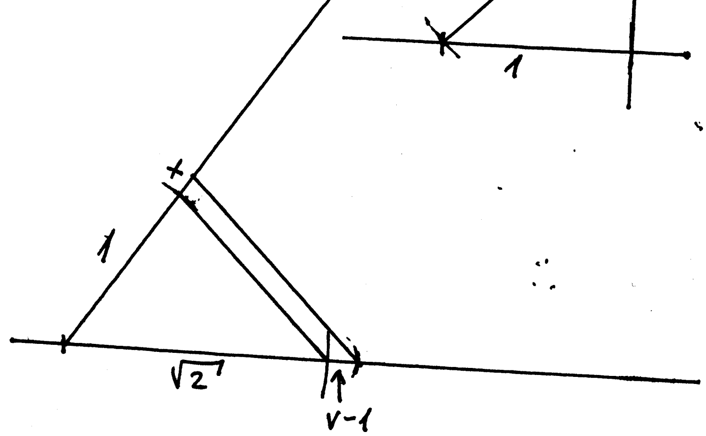
$x\sqrt{2}=V-1$

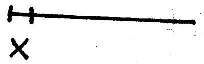
$x=\frac{V-1}{\sqrt{2}}$

$\frac{\sqrt{2}}{V-1}=\frac{1}{x}$



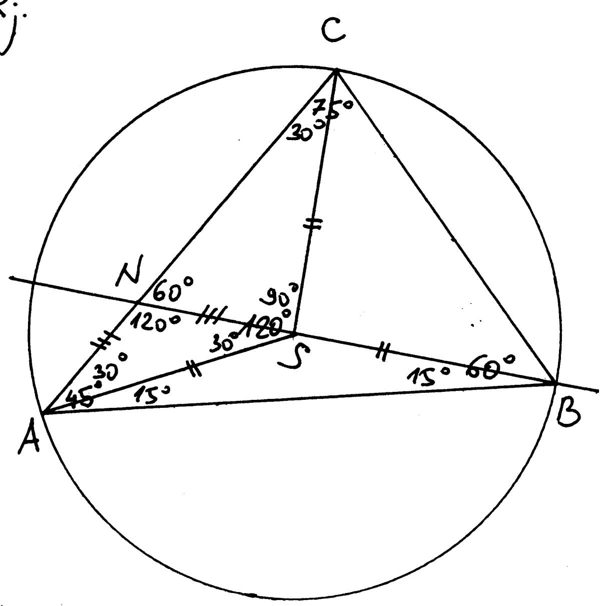






U trouglu ΔABC je $\alpha : \beta : \gamma = 3:4:5$. Dokazati da prava koja sadrži poluprečnik BS (S je centar opisane kružnice ΔABC) siječe stranicu AC u tački N koja je dijeli u omjeru $1:2$ računajući od vrha A.

Rj.



$\alpha : \beta : \gamma = 3:4:5$

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{4}$ $\quad$ $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{4}{5}$

$\alpha = \frac{3}{4}\beta$ $\quad$ $\gamma = \frac{5}{4}\beta$

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

$\frac{3}{4}\beta + \beta + \frac{5}{4}\beta = 180°$

$3\beta = 180°$

$\beta = 60°$

$\Rightarrow \alpha = 45°$; $\gamma = 75°$

$\sphericalangle ASC$ centralni ugao nad tetivom AC

$\sphericalangle ASC = 120° \Rightarrow \sphericalangle SAC = \sphericalangle SCA =$

ΔABS jkk sa osnovicom AB $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle SAB = \sphericalangle SBA = 15°$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle CNB = 60°$ (vanjski ugao ΔABN)

$\Rightarrow \sphericalangle ANB = 120°$ $\Rightarrow \sphericalangle ASN = 30°$ $\Rightarrow AN \cong SN$

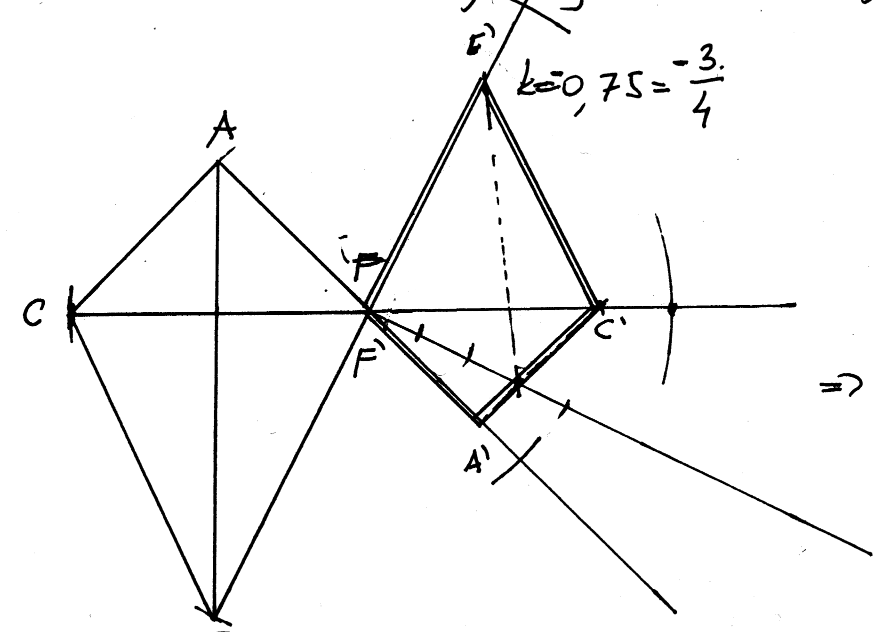
ΔNSC je pravougli pa $\cos 60° = \frac{SN}{CN}$ $\Rightarrow$ $CN \cdot \frac{1}{2} = SN = AN$

$CN = 2AN$

tj. $\frac{AN}{NC} = \frac{1}{2}$ q.e.d.

Deltoid $\square FACE$ preslikati homotetično s koeficijentom $-0,75$ u odnosu na tačku F. Ako je $O_{\square FACE} = 90$ cm izračunati obim novodobijenog četverougla.

Rj.



$O_{\square FACE} = 90$

$\frac{A'F'}{AF} = |k| = \frac{3}{4}$ $\Rightarrow$

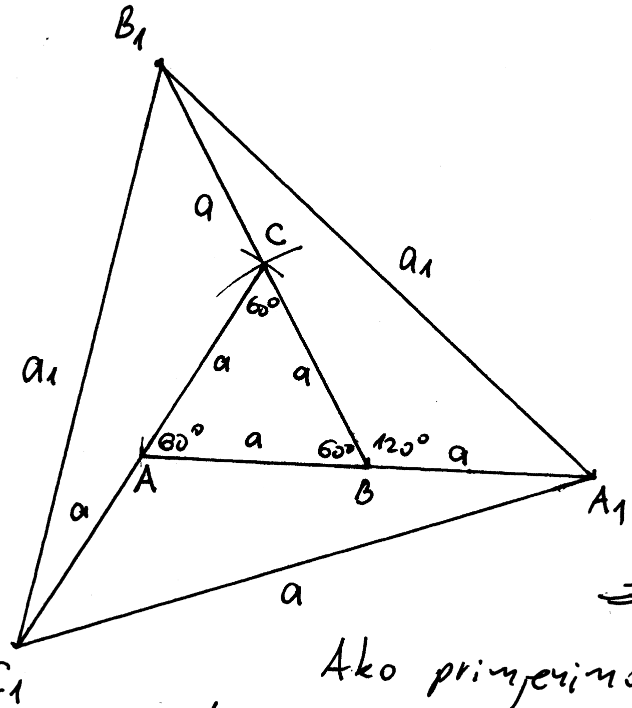
$\Rightarrow \frac{O_{\square F'A'C'E'}}{O_{\square FACE}} = \frac{3}{4} = k$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow O_{\square F'A'C'E'} = \frac{3}{4} \cdot O_{\square FACE}$

$O_{\square F'A'C'E'} = \frac{3}{\cancel{4}_{2}} \cdot \cancel{90}^{45} = \frac{135}{2}$ cm

(#) Ako jednakostraničnom trouglu ΔABC (stranice a) svaku stranicu produžimo za a, dobijamo trougao $\Delta A_1B_1C_1$. U kojem omjeru se nalaze površine trouglova ΔABC i $\Delta A_1B_1C_1$?

Rj.



Uvedimo oznake kao sa slike. Dužinu stranice a_1 ćemo odrediti na dva načina.

I način

Primjetimo da kako je ΔABC jks to $\measuredangle BAC = \measuredangle B = \measuredangle C = 60°$

$\Rightarrow \measuredangle B_1BA_1 = 120°$.

Ako primjenimo kosinusnu teoremu na stranicu a_1 u ΔB_1BA_1 imamo

$$a_1^2 = (2a)^2 + a^2 - 2(2a)\cdot a \cdot \cos 120° = 4a^2 + a^2 - 4a^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 7a^2$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = a\sqrt{7}$$

II način

Posmatrajmo ΔACB_1 i neka je CE visina tog trougla

$$\left.\begin{array}{l} AC \overset{=}{=} CB_1 \\ CE \overset{=}{=} CE \\ \measuredangle CEA \overset{=}{=} \measuredangle CEB_1 = 90° \end{array}\right\} \underset{\substack{\text{(ugao} \\ \text{naspram} \\ \text{veće str.)}}}{\overset{SSU}{\Longrightarrow}} \Delta AEC \cong \Delta B_1EC$$

$\Downarrow$

$\measuredangle ECA \overset{=}{=} \measuredangle B_1CE = 60°$

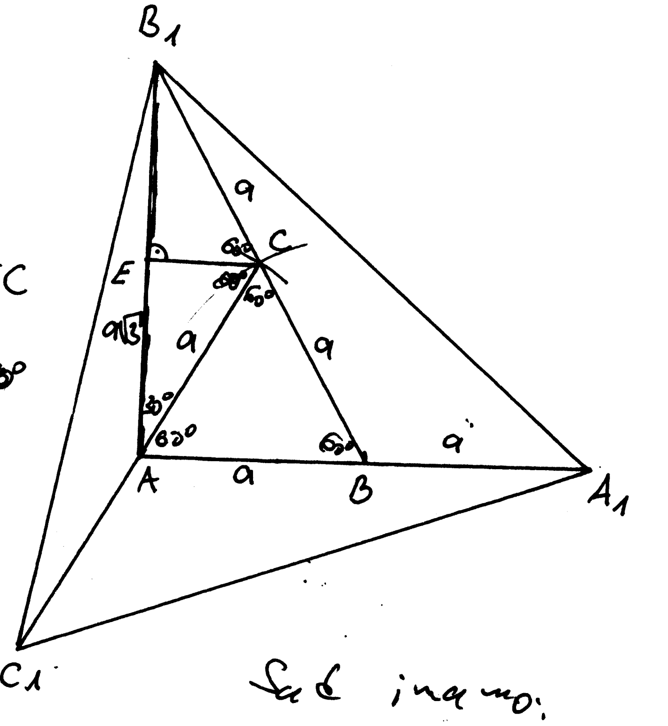
$(\measuredangle ACB = 120°)$

$\Rightarrow \measuredangle CAE = 30° \Rightarrow \measuredangle A_1AB_1 = 90°$

ΔABB_1 pravougli $\overset{\text{Pit. teor.}}{\Longrightarrow} AB_1^2 = 3a^2$

ΔA_1AB_1 pravougli $\overset{\text{Pit. teor.}}{\Longrightarrow} A_1B_1^2 = 7a^2$

$\Rightarrow \quad a_1 = a\sqrt{7}$



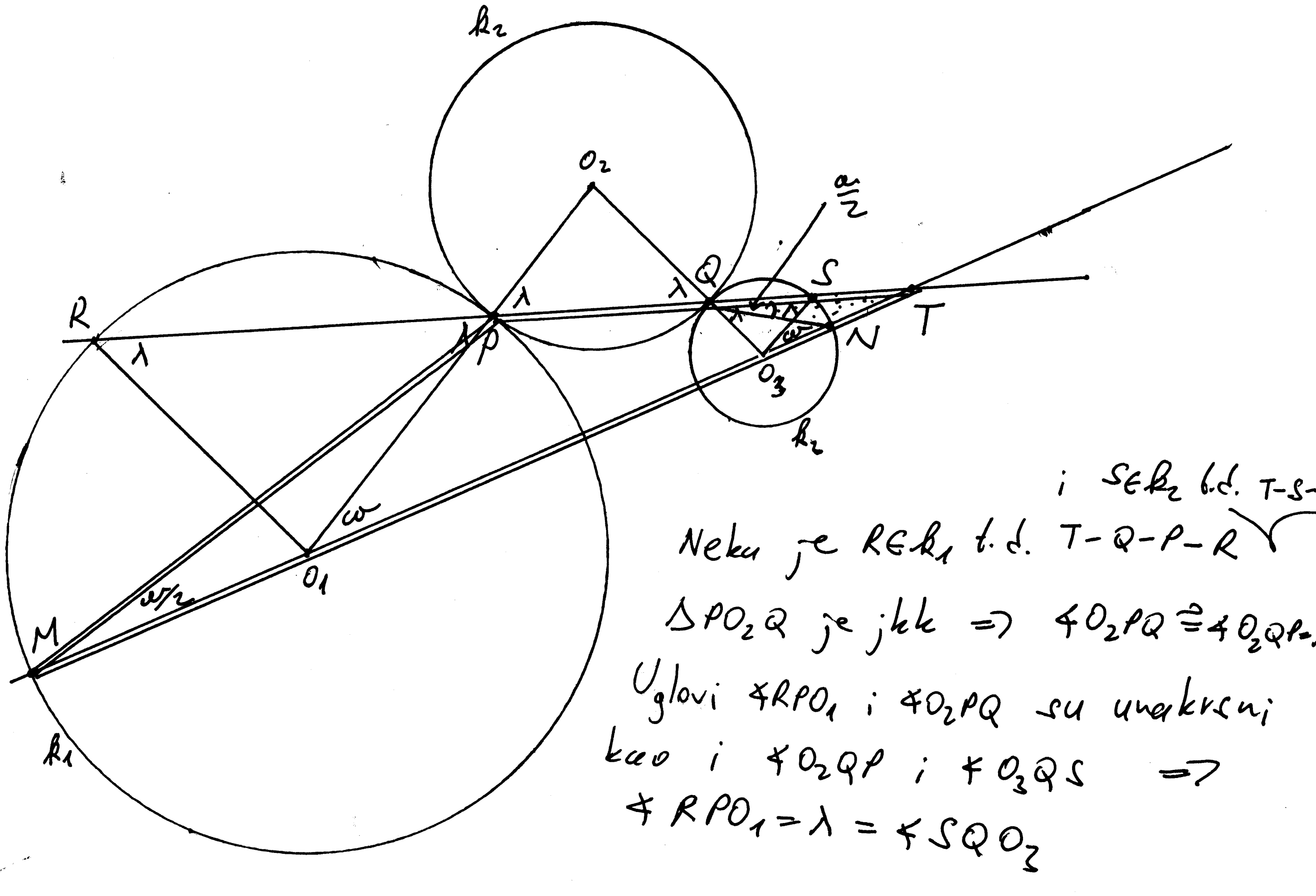
Sad imamo:

$$P_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{a_1 \cdot h}{2} = \frac{a_1\sqrt{a_1^2 - \frac{a_1^2}{4}}}{2} = \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} = 7\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 7\,P_{\Delta ABC}$$

$$P_{\Delta ABC} : P_{\Delta A_1B_1C_1} = 1 : 7$$

(#) Neka su dati krugovi $k_1(O_1,r_1)$, $k_2(O_2,r_2)$ i $k_3(O_3,r_3)$ takvi da k_1 dodiruje krug k_2 u tački P, k_2 dodiruje krug k_3 u tački Q i k_1 i k_3 nemaju zajedničkih tački. Na pravoj $p(O_1,O_2)$ date su tačke M i N takve da $M\in k_1$, $N\in k_3$ i važi poredak $M-O_1-O_2-N$. Neka je $\{T\} = p(O_1,O_2)\cap p(P,Q)$. Dokazati da su trouglovi $\triangle TNQ$ i $\triangle TPM$ slični.

Rj.



i $S\in k_2$ t.d. $T-S-Q$

Neka je $R\in k_1$ t.d. $T-Q-P-R$

$\triangle PO_2Q$ je jkk $\Rightarrow \angle O_2PQ \cong \angle O_2QP = \lambda$,

Uglovi $\angle RPO_1$ i $\angle O_2PQ$ su unakrsni kao i $\angle O_2QP$ i $\angle O_3QS$ $\Rightarrow$

$\angle RPO_1 = \lambda = \angle SQO_3$

Kako su $\triangle PO_1R$ i $\triangle SO_3Q$ jkk $\Rightarrow \angle PRO_1 = \lambda$ i $\angle QSO_3 = \lambda$

Ako posmatramo $p(S,R)$ i primjetimo da je $\angle RSO_3 \cong \angle RPO_1 = \lambda$

$\Rightarrow PO_1 \parallel SO_3$

$PO_1 \parallel SO_3$ i $p(M,N)$ transferzala $\Rightarrow \angle SO_3T \cong \angle PO_1T = \omega$.

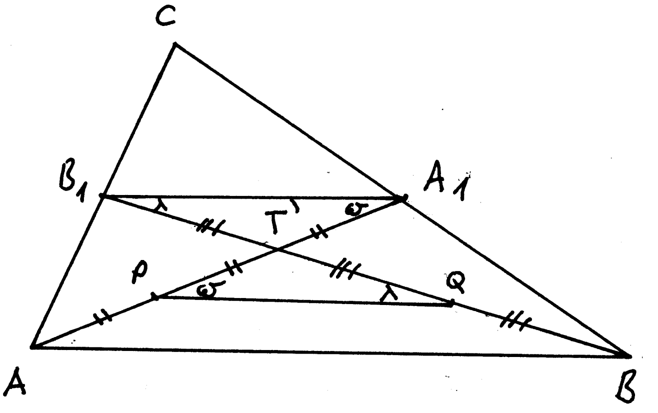
Ovo su dva centralna ugla nad lukom kojima odgovaraju periferijski $\angle O_1MP$ i $\angle NQS$. Sad imamo

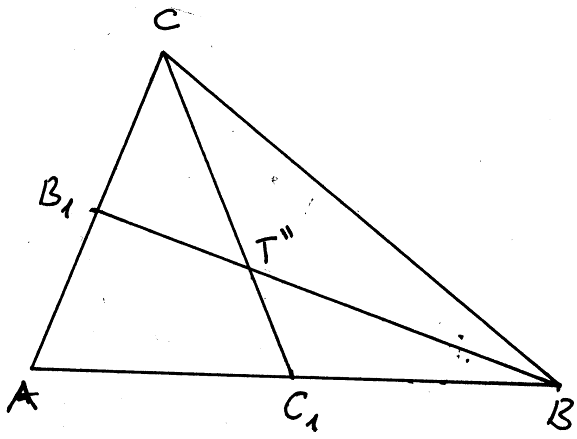
$$\left.\begin{array}{l} \angle QTN \cong \angle MTQ \text{ (zajednički ugao)} \\ \angle TQN \cong \angle TMP = \frac{\alpha}{2} \\ \angle TNQ \cong \angle TPM \text{ (treći ugao)} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(slič UUU)}} \triangle TNQ \sim \triangle TPM$$

q.e.d.

Dokazati da težište trougla dijeli težišnice u omjeru 2:1.

Rj.





Neka su AA_1 i BB_1 težišnice u trouglu ΔABC i $\{T'\} = AA_1 \cap BB_1$.

A_1B_1 je srednja linija ΔABC pa $A_1B_1 \parallel AB$ i $A_1B_1 = \frac{1}{2} AB$.

Neka su P i Q redom središta duži AT' i BT'.

PQ je srednja linija $\Delta ABT'$ pa $PQ \parallel AB$ i $PQ = \frac{1}{2} AB$

$\Rightarrow PQ \cong B_1A_1$. Dalje, posmatrajmo $\Delta PQT'$ i $\Delta B_1T'A_1$.

Ovi trouglovi su slični (imaju sva tri podudarna ugla

$$\Rightarrow \frac{PT'}{T'A_1} = \frac{QT'}{T'B_1} = \frac{PQ}{A_1B_1} = 1 \quad \Rightarrow PT' \cong A_1T' \text{ i } QT' \cong T'B_1$$

Pa imamo $\quad \frac{AT'}{T'A_1} = \frac{BT'}{T'B_1} = \frac{2}{1}$.

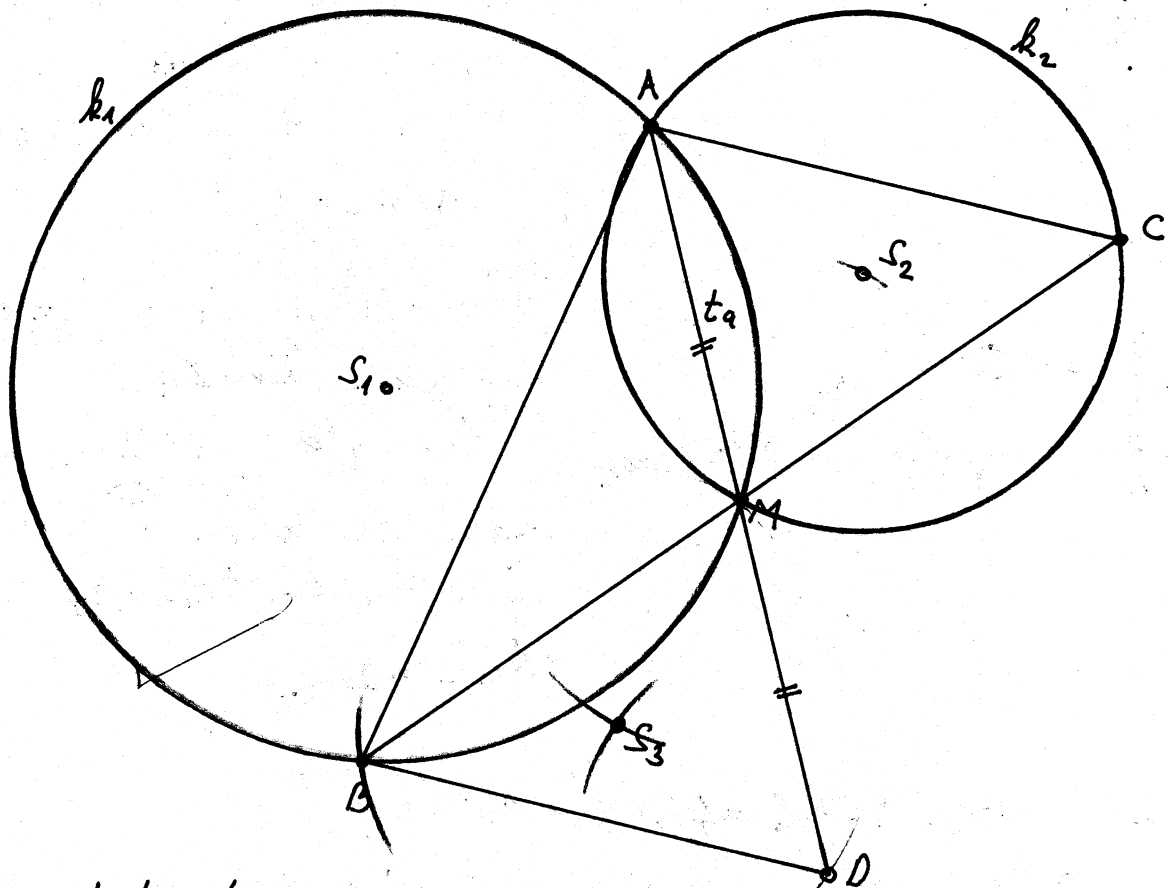
Na isti način ako pretpostavimo da se težišnice BB_1 i CC_1 sijeku u tački T'' bi dobili $\frac{CT''}{T''C_1} = \frac{BT''}{T''B_1} = \frac{2}{1}$.

Iz jedinstvenosti podjele duži BB_1 u datom omjeru slijedi da je $T' \equiv T''$ pa težište dijeli težišnicu u omjeru 2:1.

Konstruisati trougao ΔABC ako je dato $AM = t_a$ i poluprečnici R_1 i R_2 kružnica opisanih oko trouglova ΔABM i ΔACM.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat trougao ΔABC, tačka M sredina stranice BC i tačke S_1 i S_2 centri opisanih kružnica oko trouglova ΔABM i ΔACM.
Kako je data duž $AM = t_a$ i poluprečnici R_1 i R_2, a znamo da je $S_1A = S_1M = R_1$ i $S_2A = S_2M = R_2$ to kružnice $k_1(S_1, R_1)$ i $k_2(S_2, R_2)$ možemo konstruisati.
Ako na pravoj $p(A, M)$ uzmemo tačku D takvu da je A-M-D i $AM \cong MD$ imamo:

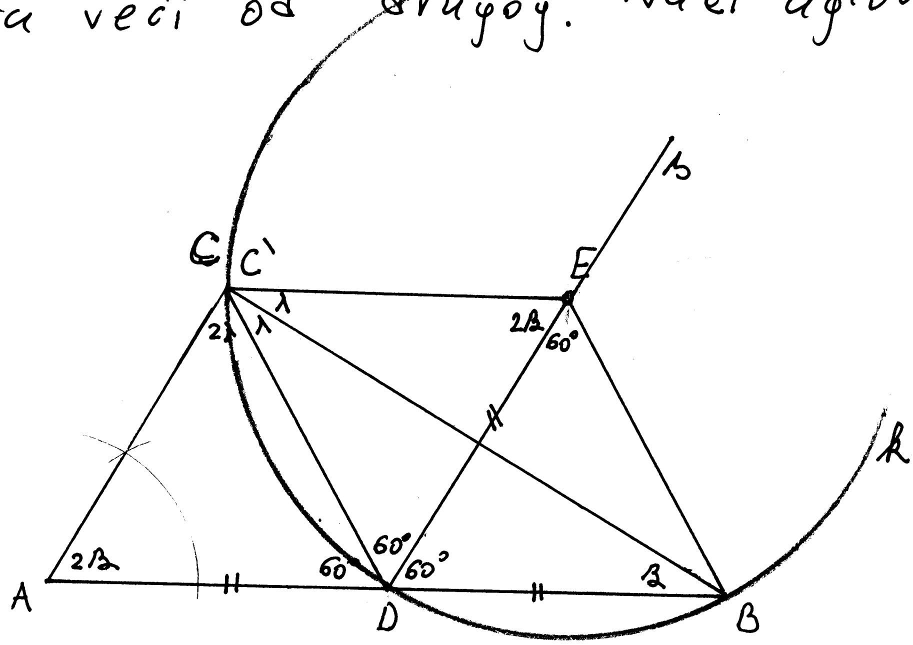
$$\left.\begin{array}{l} BM \cong MC \\ \measuredangle BMD \cong \measuredangle CMA \text{ (unakrsni)} \\ MD \cong AM \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \Delta BMD \cong \Delta CMD$$

$\Downarrow$ ova dva trougla imaju podudarne poluprečnike opisane kružnice

Prema tome centar S_3 opisane kružnice trougla ΔBMD mogu konstruisati, time i tačku B pa i ΔABC.

(#) Jedan ugao trougla dva puta je veći od drugog, dok težišna linija iz tjemena trećeg ugla dijeli taj ugao na dva dijela od kojih je jedan dva puta veći od drugog. Naći uglove trougla.

Rj.



Neka je D sredina stranice AB, ΔABC. Prema postavi zadatka imamo $\measuredangle CAB = 2\beta$, $\measuredangle ABC = \beta$, $\measuredangle ACD = 2\lambda$, $\measuredangle BCD = \lambda$.

$3\beta + 3\lambda = 180° \Rightarrow \beta + \lambda = 60°$

$\measuredangle ADC$ je vanjski ugao $\Delta CDB \Rightarrow \measuredangle ADC = 60° \Rightarrow \measuredangle CDB = 120°$.

Na simetrali s ugla $\measuredangle CDB$ uzmimo tačku E takvu da je $DE \cong AD$. Imamo:

$$\left.\begin{array}{l} AD \cong DE \\ \measuredangle ADC \cong \measuredangle EDC = 60° \\ CD \cong CD \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \Delta ADC \cong \Delta EDC$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle CAD \cong \measuredangle DEC = 2\beta,$$

$$\text{i } \measuredangle ACD \cong \measuredangle ECD$$

Primjetimo da je ΔDBE jkk sa uglom privrhu od $60° \Rightarrow$

$\Rightarrow \measuredangle DEB \cong \measuredangle DBE = 60°$. $\Rightarrow \Delta DEB$ jks.

Opišimo kružnicu k sa centrom u E poluprečnika ED.

Neka je $k \cap p(B, C) = C'$. Kako je $\measuredangle DBC'$ oštri periferijski ugao njemu odgovara dvostruki centralni ugao $\measuredangle DEC' = 2\beta$.

Ovo je moguće jedino u slučaju $C \equiv C'$ pa $D, B, C \in k$. $\Rightarrow$

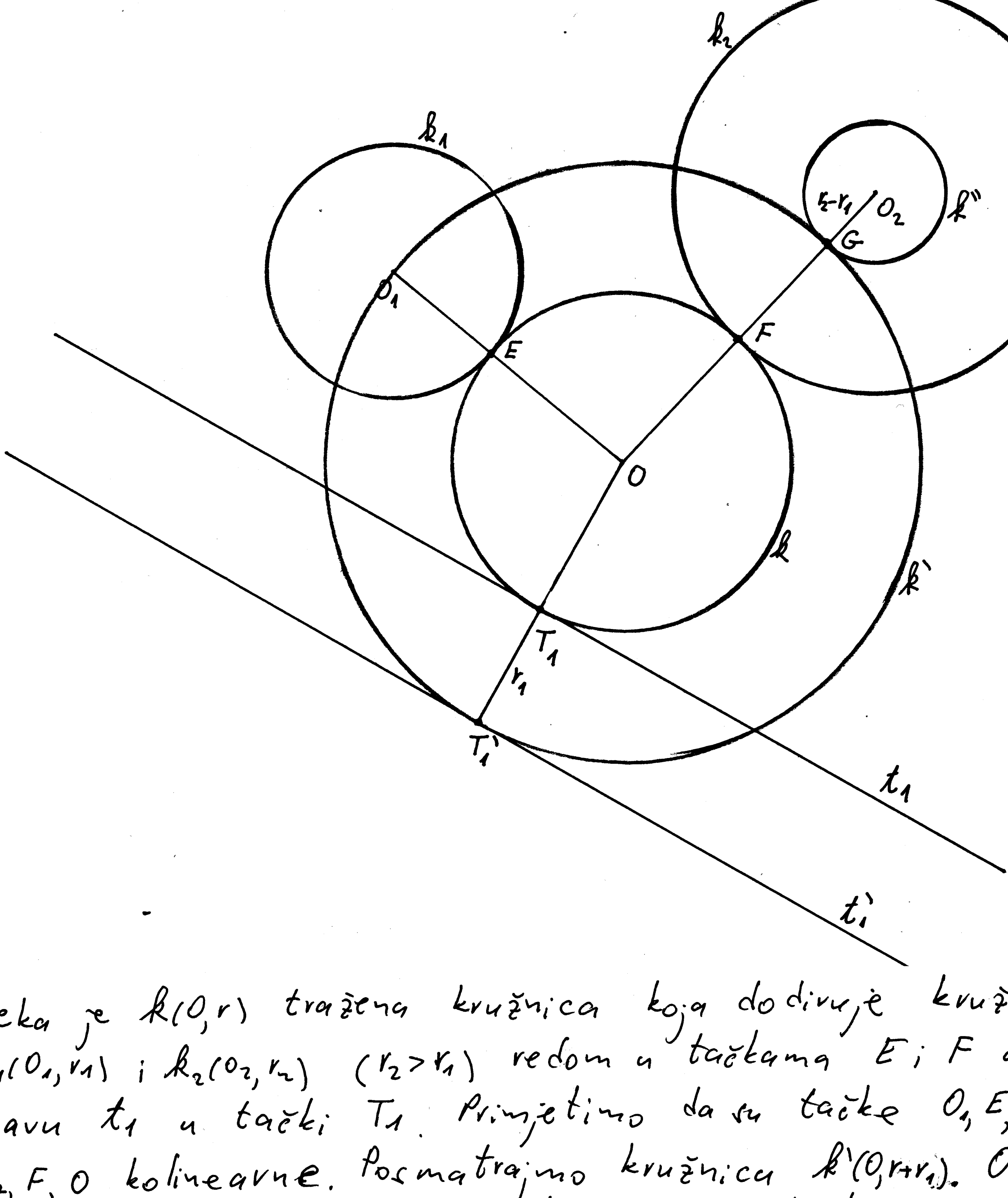
$DE \cong CE \Rightarrow \Delta CDE$ jkk sa osnovicom $CD \Rightarrow 2\lambda = 60° \Rightarrow \lambda = 30°$

$\Rightarrow \beta = 30°$ pa $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, $\gamma = 90°$.

9. Konstruisati kružnicu koja dodiruje datu pravu i dvije date kružnice.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je $k(O,r)$ tražena kružnica koja dodiruje kružnice $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ $(r_2 > r_1)$ redom u tačkama E i F a datu pravu t_1 u tački T_1. Primjetimo da su tačke O_1, E, O i O_2, F, O kolinearne. Posmatrajmo kružnicu $k'(O, r+r_1)$. Ova kružnica prolazi kroz tačku O_1, siječe duž O_2F u tački G i siječe ~~pp~~ $[O, T_1)$ u tački T_1' tako da je $O-T_1-T_1'$.

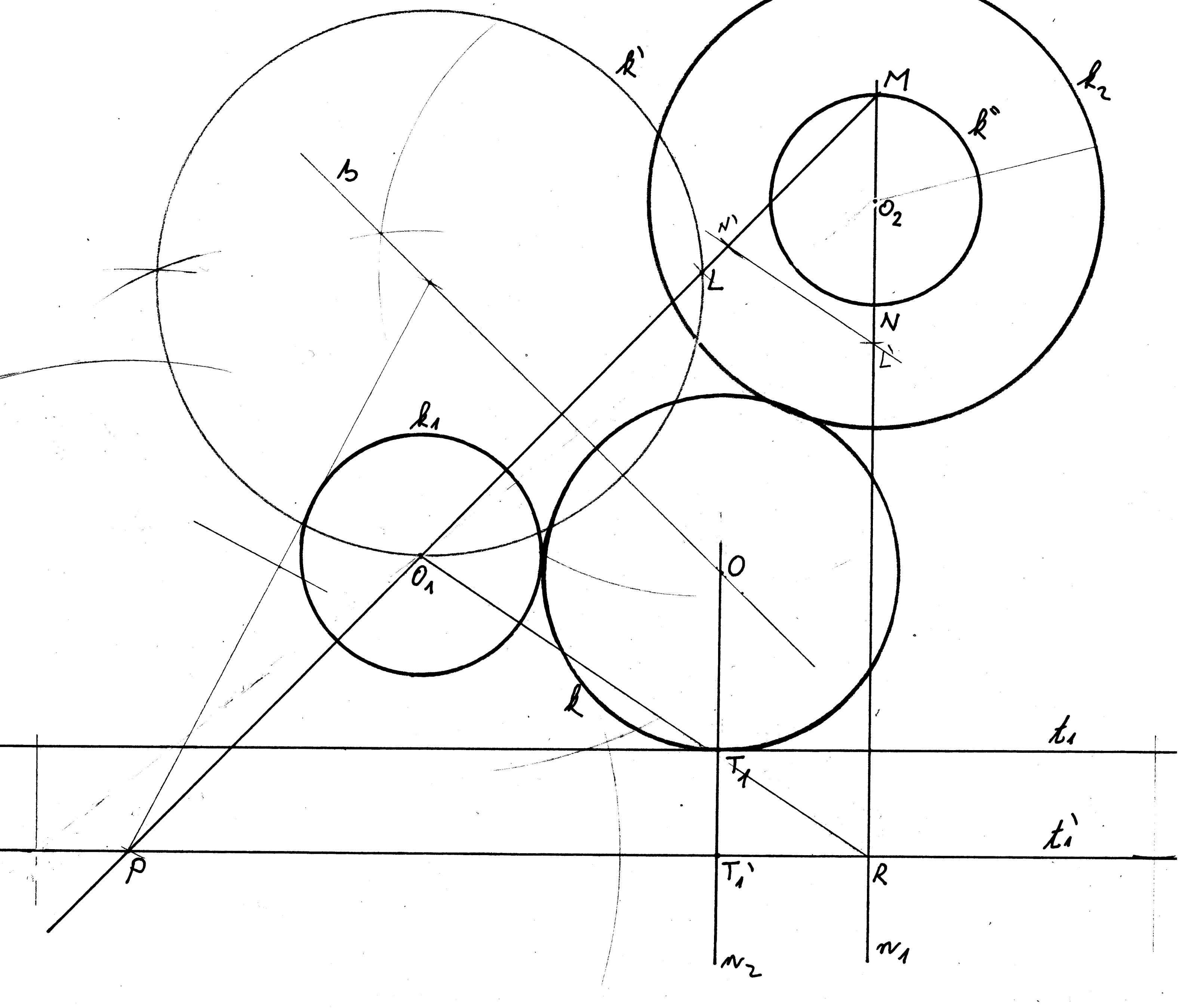
Označimo sa t_1' pravu takvu da je $t_1' \parallel t_1$, $t_1' \ni T_1'$ i prava t_1' je udaljena od prave t_1 za dužinu r_1, i sa $k''(O_2, r_2-r_1)$.

Kružnicu k'' i pravu t_1' možemo konstruisati.

Kružnica k' prolazi kroz tačku O_1, dodiruje kružnicu k'' i pravu t_1' pa imamo 5. Apolonijev problem. Poslije konstrukcije kružnice k' nije teško konstruisati traženu kružnicu k.

Konstrukcija

1. t_1, $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$
2. $k''(O_2, r_2 - r_1)$
3. t_1': $t_1' \parallel t_1$ i udaljenost između pravih t_1 i t_1' je r_1
4. n_1: $n_1 \perp t_1'$
5. $n_1 \cap t_1' = \{R\}$, $n_1 \cap k'' = \{M, N\}$: $R-N-M$
6. $p(M, O_1) \cap t_1' = \{P\}$
7. $ML = \dfrac{MN \cdot MR}{MO_1}$ $\left(\dfrac{MR}{ML} = \dfrac{MO_1}{MN} \right)$
8. $k(M, ML) \cap p(M, O_1) = \{L\}$
9. s simetrala duži O_1L
10. $k'(O', O'O_1)$ gdje je $O' \in s$



11. t' tangenta na kružnicu k'

12. $t' \cap k' = \{T'\}$

13. $k(P, PT') \cap t_1' = \{T_1'\}$

14. $n_2 : n_2 \ni T_1'$ i $n_2 \perp t_1'$

15. $n_2 \cap t_1 = \{T_1\}$, $n_2 \cap s = \{O\}$

16. $k(O, OT_1)$

Dokaz

Da konstruisana kružnica k dodiruje date kružnice k_1, k_2 i datu pravu t_1, slijedi iz analize i konstrukcije.

Diskusija

Nacrtaćemo neke od mogućih slučajeva.