Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 17.09.2010.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija 2**

Zadatak br. 1 (20 boda)

a) Date su duži a i b. Nacrtati duž x ako je $x\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{3\sqrt{b}}}{a}$.

b) Tačka D je podnožje visine koja odgovara hipotenuzi AB pravouglog trougla $\triangle ABC$, a M i N su redom sredine duži CD i BD. Dokazati da $p(A, M) \perp p(C, N)$.

c) Date su tri konkurentne prave i na jednoj od njih tačka A. Konstruisati trougao $\triangle ABC$, tako da njegove visine leže na datim pravama.

d) U pravouglom trouglu $\triangle ABC$, a i b su kraci a c je hipotenuza ($BC = a$, $AC = b$, $AB = c$). Dokazati da je $a^2 + b^2 = c^2$.

e) U trouglu $\triangle ABC$ je $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 4 : 5$. Dokazati da prava koja sadrži poluprečnik BS (S je centar opisane kružnice $\triangle ABC$) siječe stranicu AC u tački N koja je dijeli u omjeru $1 : 2$ računajući od vrha A.

Zadatak br. 2 (20 bodova)

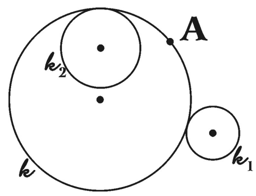
Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su date tri tačke P, Q i R koje su u odnosu na stranice trougla simetrične centru opisane kružnice trougla.

Zadatak br. 3 (20 bodova)

Dokazati da prava koja prolazi kroz sredine dijagonala četverougla i siječe dvije naspremne stranice četverougla, obrazuje na tim stranicama proporcionalne duži.

Zadatak br. 4 (20 bodova)

Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$, $(r_1 < r_2)$ i tačka A. Konstrisati krug k koji će prolaziti kroz tačku A i dodirivati krugove k_1 i k_2 kao na skici.

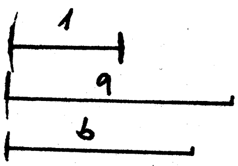


(Zadaci su skinuti sa stranice: \pf.unze.ba\nabokov
Za uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

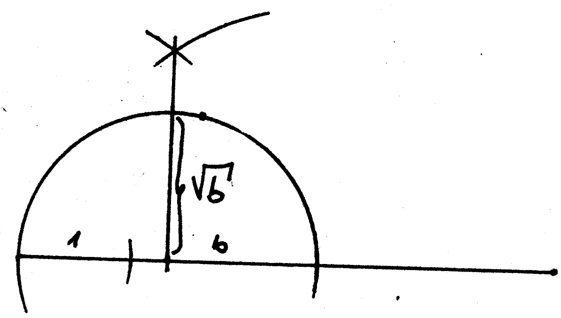
(#) Date su duži a i b. Nacrtati duž x ako je

$$x\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3\sqrt{b}}}{a}.$$

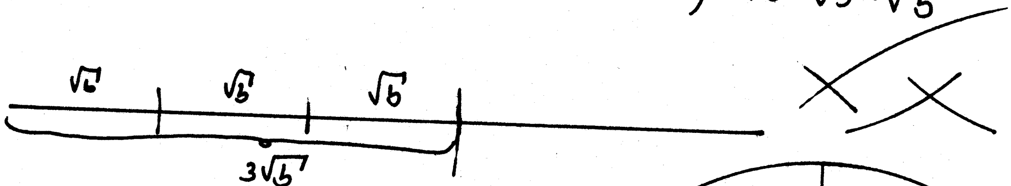
Rj.



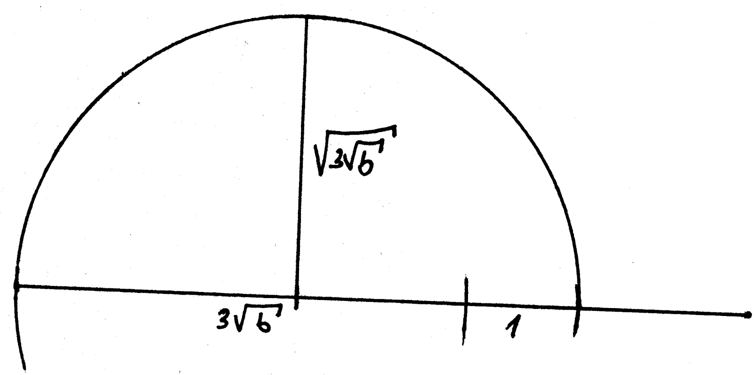
Nacrtajmo duž $\sqrt{b}$.



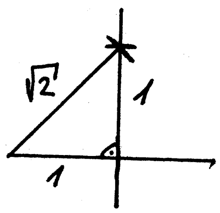
Nacrtajmo duž $3\sqrt{b}$ tj. $\sqrt{b}+\sqrt{b}+\sqrt{b}$



Nacrtajmo duž $\sqrt{3\sqrt{b}}$



Nacrtajmo $\sqrt{2}$



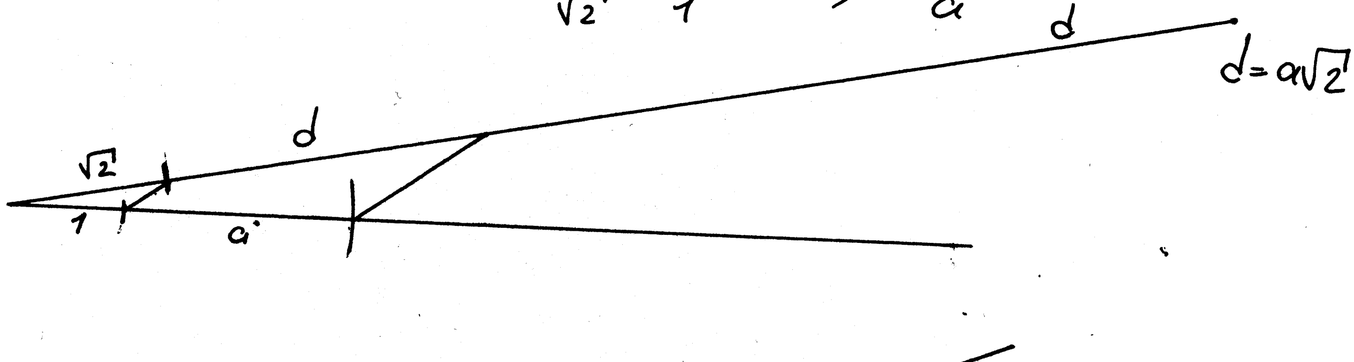
$$x\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3\sqrt{b}}}{a} \quad / \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

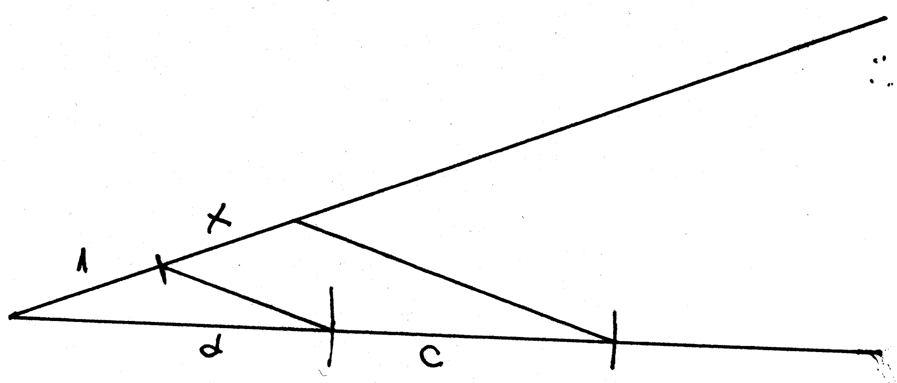
$$x = \frac{\sqrt{3\sqrt{b}}}{\sqrt{2}\,a} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{c} = \frac{1}{x}$$

gde je $c = \sqrt{3\sqrt{b}}$

Nacrtajmo duž $d = a\sqrt{2}$

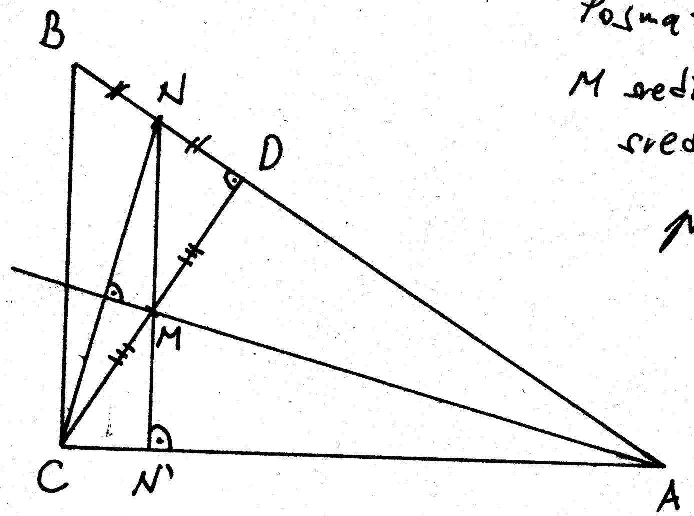
$$\frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{a}{1} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{2}}{d}$$





(#) Tačka D je podnožje visine koja odgovara hipotenuzi AB pravouglog trougla ΔABC, a M i N su redom sredine duži CD i BD. Dokazati da $p(A,M) \perp p(C,N)$.

Rj.



Posmatrajmo ΔCDB.

M sredina CD, N sredina BD $\Rightarrow$ MN je srednja linija ΔCDB $\Rightarrow$ $MN \parallel CB$ tj. $p(M,N) \parallel p(C,B) \Rightarrow p(M,N) \perp AC$

Posmatrajmo ΔACN (Neka je $\{N'\} = p(M,N) \cap AC$)

CD visina na AN, NN' visina na AC

$\Rightarrow$ M ortocentar trougla ΔACN.

Kako se visine sijeku u istoj tački

$\Rightarrow$ $p(A,M) \perp p(C,N)$

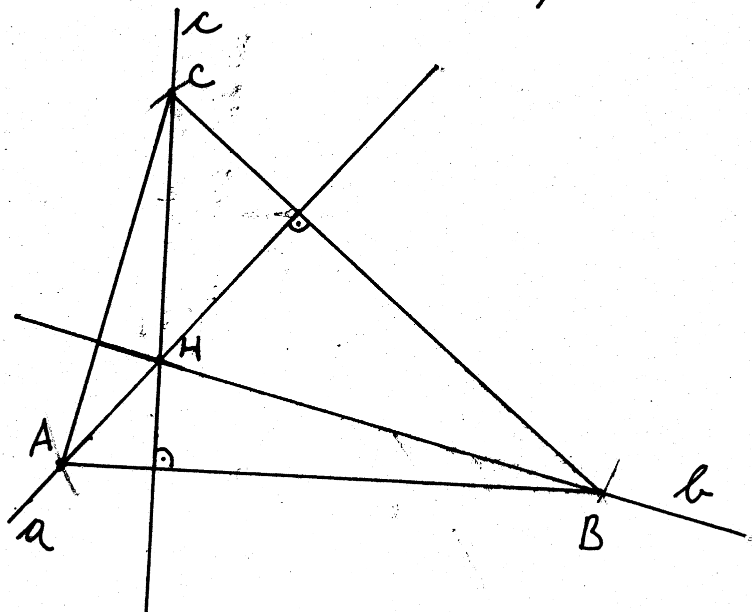
q.e.d.

(#) Date su tri konkurentne prave i na jednoj od njih tačka A. Konstruisati trougao ΔABC, tako da njegove visine leže na datim pravama.

Rj

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak rješen.



Neka su date tri prave a, b i c koje se sijeku u tački H, neka je $A \in a$, $B \in b$ i $C \in c$, i neka a, b i c sadrže visine trougla ΔABC.

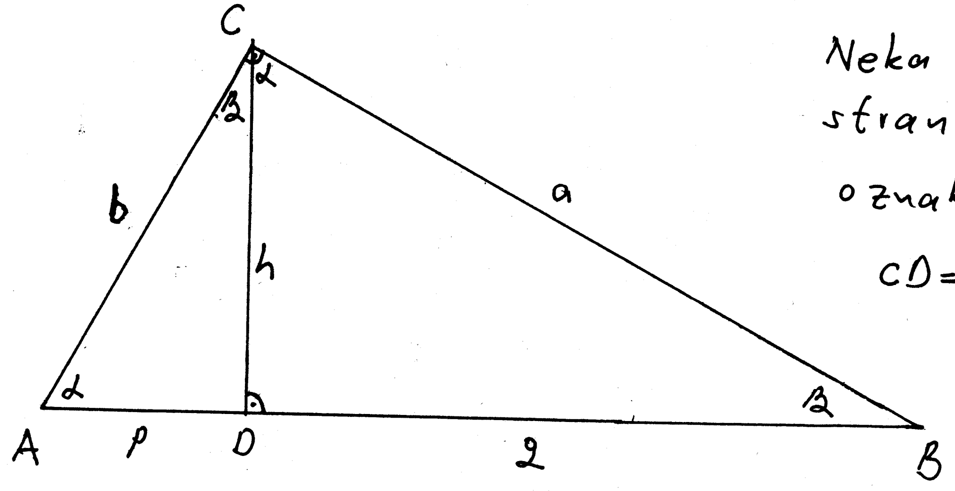
Primetimo da postoji tačno jedna prava koja prolazi kroz tačku A i okomita je na pravu c.

Isto tako, postoji tačno jedna prava koja prolazi kroz tačku B i okomita je na pravu a.

Kako su nam date prave a, b i c i tačka A to nije teško konstruisati tačku B i C.

U pravouglom trouglu ΔABC, a i b su kraci a c je hipotenuza ($BC=a$, $AC=b$, $AB=c$). Dokazati da je $a^2+b^2=c^2$.

Rj.



Neka je CD visina na stranicu c. Uvedimo oznake $AD=p$, $DB=q$, $CD=h$, $\measuredangle CAB=\alpha$ i $\measuredangle ABC=\beta$.

$c=p+q$.

U ΔADC, $\measuredangle ADC=90^\circ$, $\measuredangle CAD=\alpha \Rightarrow \measuredangle ACD=\beta$

U ΔBCD, $\measuredangle BDC=90^\circ$, $\measuredangle DBC=\beta \Rightarrow \measuredangle BCD=\alpha$

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle ACB=\measuredangle ADC=90^\circ\\ \measuredangle CAB=\measuredangle CAD=\alpha\\ \measuredangle ABC=\measuredangle ACD=\beta\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta ABC \sim \Delta ACD$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{c}{b}=\frac{b}{p} \Rightarrow b^2=cp \quad \ldots(1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle ACB=\measuredangle CDB=90^\circ\\ \measuredangle CAB=\measuredangle BCD=\alpha\\ \measuredangle ABC=\measuredangle DBC=\beta\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta ABC \sim \Delta BCD$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{c}{a}=\frac{a}{q} \Rightarrow a^2=cq \quad \ldots(2)$$

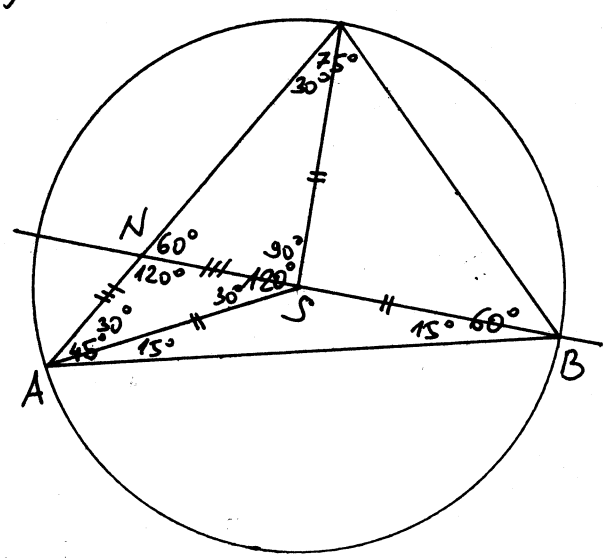
$$(1)\ ;\ (2) \Rightarrow a^2+b^2=cq+cp=c(p+q)=c\cdot c=c^2$$

$$a^2+b^2=c^2$$

q.e.d.

(#) U trouglu ΔABC je $\alpha:\beta:\gamma = 3:4:5$. Dokazati da prava koja sadrži poluprečnik BS (S je centar opisane kružnice ΔABC) siječe stranicu AC u tački N koja je dijeli u omjeru $1:2$ računajući od vrha A.

Rj:



$\alpha+\beta+\gamma = 180°$

$\alpha:\beta:\gamma = 3:4:5$

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{4}$ $\quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{4}{5}$

$\alpha = \frac{3}{4}\beta$ $\quad \gamma = \frac{5}{4}\beta$

$\frac{3}{4}\beta + \beta + \frac{5}{4}\beta = 180°$

$3\beta = 180°$

$\beta = 60°$

$\Rightarrow \alpha = 45°$; $\gamma = 75°$

$\sphericalangle ASC$ centralni ugao nad tetivom AC

$\sphericalangle ASC = 120° \Rightarrow \sphericalangle SAC = \sphericalangle SCA =$

ΔABS j kk sa osnovicom AB $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle SAB = \sphericalangle SBA = 15°$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\sphericalangle CNB = 60°$ (vanjski ugao ΔABN)

$\Rightarrow \sphericalangle ANB = 120°$ $\Rightarrow \sphericalangle ASN = 30°$ $\Rightarrow$ $AN \stackrel{\sim}{=} SN$

ΔNSC je pravougli pa $\cos 60° = \frac{SN}{CN}$ $\Rightarrow$ $CN \cdot \frac{1}{2} = SN = AN$

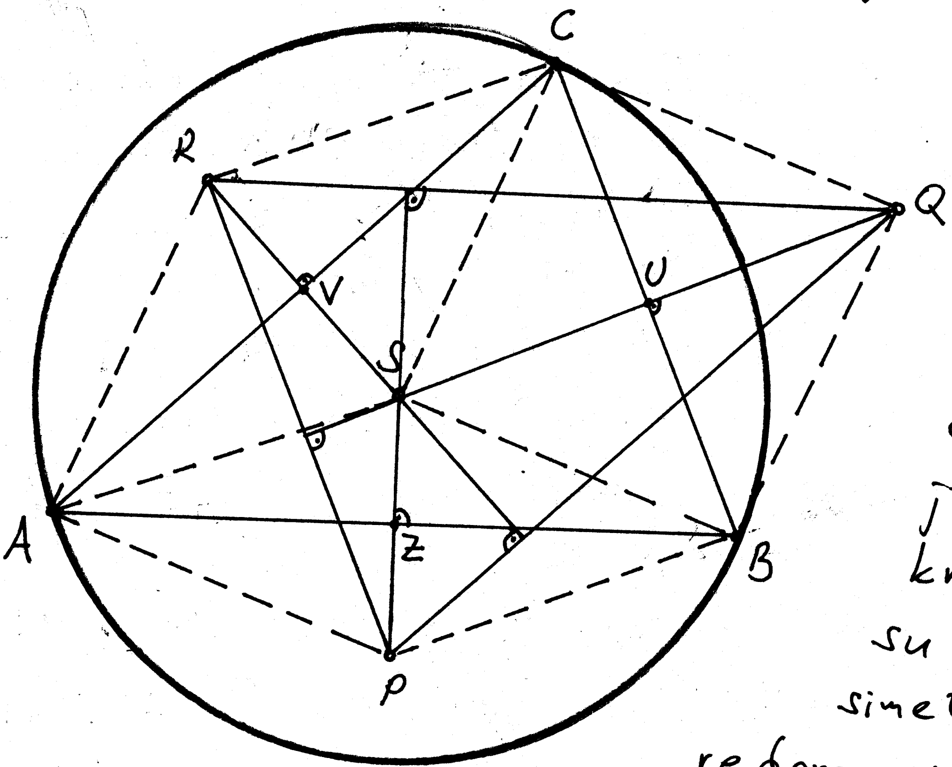
$CN = 2AN$

tj: $\frac{AN}{NC} = \frac{1}{2}$ q.e.d.

(#) Konstruisati trougao ΔABC ako su date tri tačke P, Q i R koje su u odnosu na stranice trougla simetrične centru opisane kružnice trougla.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je ΔABC dati trougao čiji je centar opisane kružnice S i neka su P, Q i R tačke simetrične tački S redom u odnosu na stranice trougla AB, BC i AC.

Tačka S pripada simetrali stranica AB, BC i AC.
Označimo sa U, V i Z ortogonalne projekcije tačke S na stranice BC, AC i AB. Imamo:

$$\left.\begin{array}{l} SU \cong QU \\ \measuredangle SUB \cong \measuredangle QUB \\ BU \cong BU \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \Delta SUB \cong \Delta QUB \Rightarrow SB \cong QB.$$

Slično bi pokazali sljedeće (isprekidane duži na slici):

$BQ \cong CQ \cong SC \cong RC \cong AR \cong AS \cong AP \cong BP \cong BS$ (za vježbu).

$BQ \parallel CS \parallel AR$ i $AR \cong BQ \Rightarrow \square ABQR$ paralelogram, pa kako je $p(P,S) \perp p(A,B)$ to je i $p(P,S) \perp p(R,Q)$.

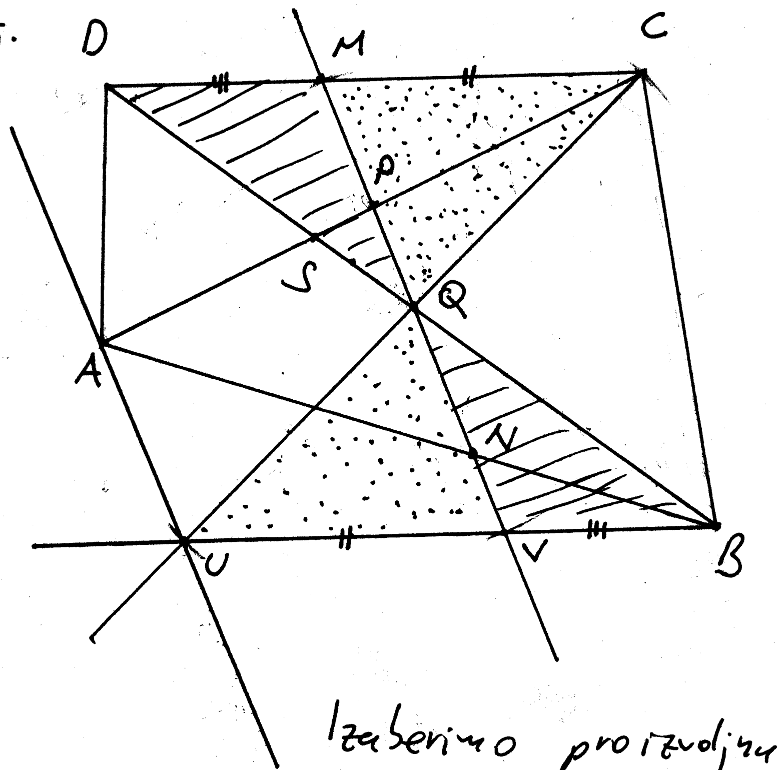
Slično bi pokazali da je $p(R,S) \perp p(P,Q)$ i $p(Q,S) \perp p(P,R)$ (za vježbu).

Tačka S je presjek visina ΔPQR pa je možemo konstruisati.

Sad možemo konstruisati i ΔABC presjek (simetrala duži PS, QS i RS).

Dokazati da prava koja prolazi kroz sredine dijagonala četverougla i siječe dvije naspremne stranice četverougla, obrazuje na tim stranicama proporcionalne duži.

Rj.



Neka je dat četverougao $\square ABCD$, neka se dijagonale četverougla AC i BD sijeku u S i neka su P i Q redom sredine dijagonala AC i BQ. Sa M i N označimo $\{M\} = CD \cap p(P,Q)$ i $\{N\} = AB \cap p(P,Q)\}$

Dokažimo da $\dfrac{MC}{MD} = \dfrac{AN}{BN}$.

Izaberimo proizvoljnu tačku $V \in pp[M,Q)$ takvu da je $M-Q-V$ i $MQ \cong QV$. Sad imamo.

$$\left.\begin{aligned} &DQ \cong BQ \\ &\measuredangle DQM \cong \measuredangle BQV \text{ (unakrsni)} \\ &MQ \cong QV \end{aligned}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle DQM \cong \triangle BQV$$

$$\Downarrow$$

$$MD \cong BV$$

Izaberimo proizvoljnu tačku $U \in pp[C,Q)$ takva da $C-Q-U$ i $CQ \cong QU$.

Sad imamo

$$\left.\begin{aligned} &CQ \cong QU \\ &\measuredangle CQM \cong \measuredangle UQV \text{ (unakrsni)} \\ &MQ \cong VQ \end{aligned}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle MCQ \cong \triangle UVQ$$

$$\Downarrow$$

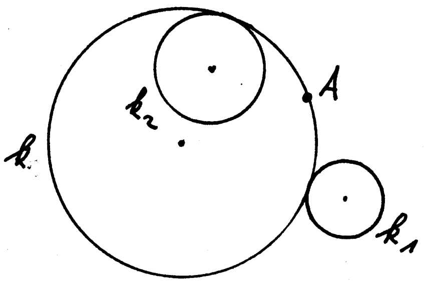
$$UV \cong MC$$

Posmatrajmo $\triangle ACU$. U tom trouglu P je sredina duži AC, a Q je sredina stranice UC $\Rightarrow$ PQ je srednja linija $\triangle AUC$ $\Rightarrow PQ \parallel AU \Rightarrow p(P,Q) \parallel p(A,U) \xRightarrow{T.T.} \dfrac{UV}{VB} = \dfrac{AN}{NB}$

$$\Rightarrow \frac{MC}{MD} = \frac{AN}{BN}$$

q.e.d.

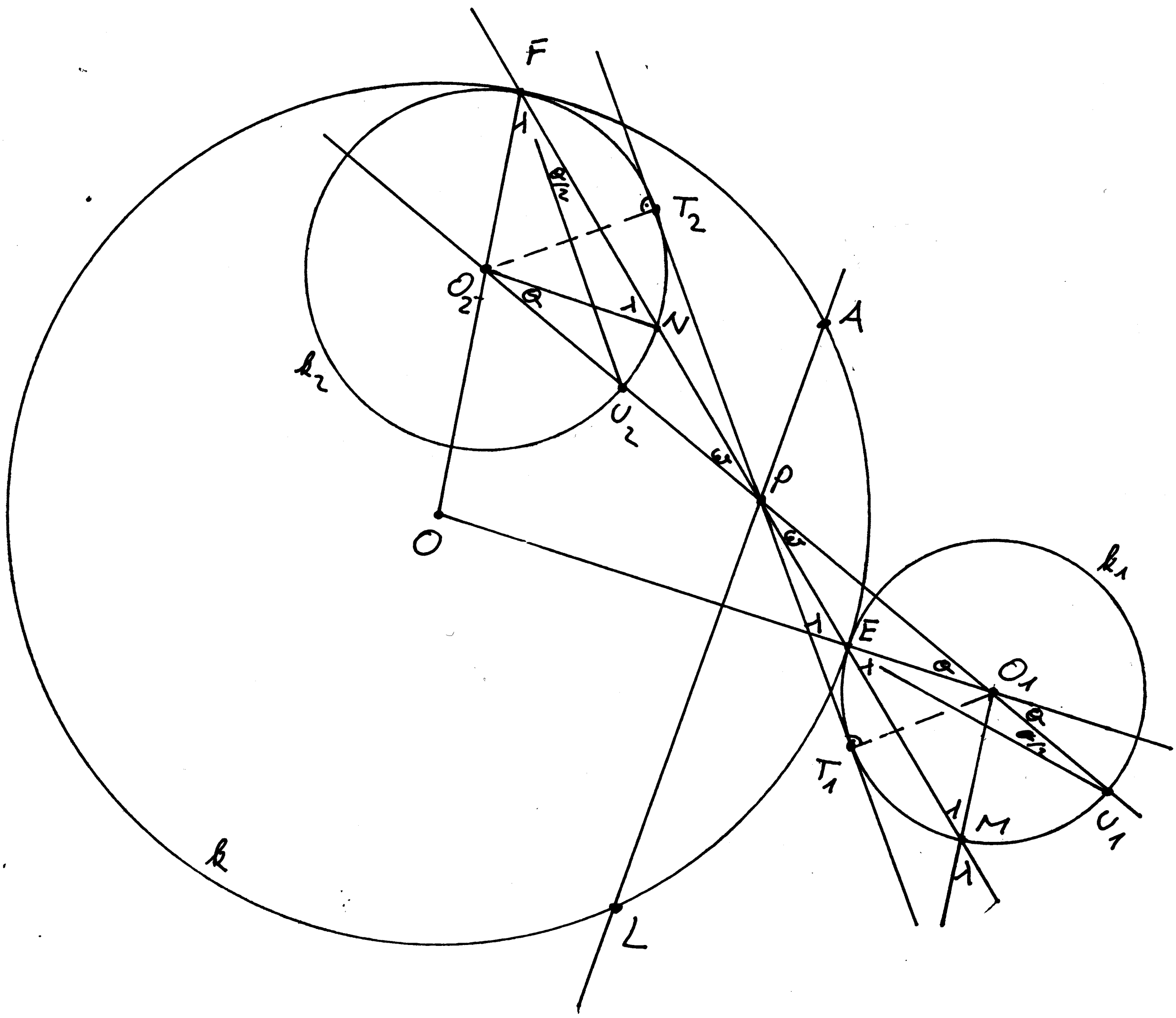
(#) Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ $(r_1 < r_2)$ i tačka A. Konstruisati krug k koji će prolaziti kroz tačku A i dodirivati krugove k_1 i k_2 kao na sljedećoj skici:



Rj:

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak rješen.



Neka je $k(O, r)$ traženi krug koji prolazi kroz tačku A i dodiruje date krugove $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ $(r_1 < r_2)$ redom u tačkama E i F. Kako su E i F dodirne tačke krugova primjetimo da imamo sljedeća dva poretka $O-E-O_1$ i $O-O_2-F$.

Neka je $p(E,F) \cap k_2 = \{F, N\}$ i $p(E,F) \cap k_1 = \{E, M\}$: $F-N-E-M$,

$p(O_1,O_2)\cap k_1=\{U_1\}$ i $p(O_1,O_2)\cap k_2=\{U_2\}$: $O_2-U_2-O_1-U_1$,

$\{P\}=p(O_1,O_2)\cap p(E,F)$

(kako O_1, O_2, E i F pripadaju nekim od krugova k_1 i k_2 primijetimo da je poredak U_2-P-O_1 i $N-P-E$.

Trouglovi ΔO_1EM, ΔOEF i ΔO_2FN su jkk. pa imamo

$$\measuredangle O_1EM\cong\measuredangle O_1ME\cong\measuredangle OEF\cong\measuredangle OFN\cong\measuredangle O_2FN\cong\measuredangle O_2NF=\lambda$$

$\Rightarrow p(O,O_1)\parallel p(O_2,N)$ i $p(O_1,M)\parallel p(F,O)$

(imamo podudarne uglove na transferzali $p(E,F)$)).

Označimo sa θ ugao $\measuredangle NO_2U_2$. To je centralni periferizki ugao nad tetivom NU_2. Njemu odgovara periferizki ugao $\measuredangle U_2FN=\frac{\theta}{2}$.

Kako je $p(O_2,N)\parallel p(E,O_1)$ i $p(O_1,O_2)$ njihova transferzala imamo $\measuredangle NO_2U_2\cong\measuredangle PO_1E=\theta \Rightarrow \measuredangle O_1U_1E=\frac{\theta}{2}$.

Sad možemo pokazati da su ΔFU_2P i ΔU_1EP slični

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle U_1PE\cong\measuredangle FPU_2=\omega\\ \measuredangle PU_1E\cong\measuredangle PFU_2=\frac{\theta}{2}\\ \measuredangle U_1EP\cong\measuredangle FU_2P\end{array}\right\}\overset{\text{st. UUU}}{\Longrightarrow}\Delta PU_1E\sim\Delta PFU_2$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{PE}{PU_2}=\frac{PU_1}{PF}\Rightarrow PE\cdot PF=PU_1\cdot PU_2 \quad\ldots(1)$$

Neka je $p(P,A)\cap k=\{A,L\}$.

Možemo primijetiti $PA\cdot PL=PE\cdot PF \quad\ldots(2)$

(1) i $(2)\Rightarrow PU_1\cdot PU_2=PA\cdot PL \Rightarrow PL=\dfrac{PU_1\cdot PU_2}{PA}$

Da bi smo konstruisali tačku L potrebno je konstruisati tačku P. Primijetimo $\Delta PO_1E\sim\Delta PO_2N$ i $\Delta PO_1M\sim\Delta PFO_2$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{PO_1}{PO_2}=\dfrac{PE}{PN}=\dfrac{O_1E}{O_2N}=\dfrac{r_1}{r_2}\\[2ex] \dfrac{PO_1}{PO_2}=\dfrac{PM}{PL}=\dfrac{O_1M}{O_2F}=\dfrac{r_1}{r_2}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

P je centar homotetije koja kružnicu k_1 preslikava u k_2 sa koeficijentom $\frac{r_1}{r_2}$

Neka je $p(P,T_1)$ tangenta na kružnicu k_1. Kako je P centar homotetije $p(P,T_2)$ je tangenta i na kružnicu k_2. Sad tačku P možemo konstruisati, pa time i tačku L. Imamo tačke A, L i kružnicu k_1 pa smo ovaj problem sveli na 3. Apolonijev problem.