Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 20.06.2011.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija 2**

Zadatak br. 1

a) Centar upisanog kruga u jednakokrakom trouglu dijeli visinu u odnosu $12:5$. Ako je dužina kraka trougla $60\,cm$, naći dužinu osnovice tog trougla.

b) Neka je I centar upisanog kruga $\triangle ABC$, $(AB < BC)$, tačka S centar opisanog kruga k oko trougla $\triangle ABC$ i tačka M sredina stranice AC. Ako su P i N tačke dobijene presjekom prave $p(M,S)$ i kruga k (gdje su tačke B i N sa jedne strane, a tačka P sa druge strane prave $p(A,C)$), dokazati da je $\triangle BNI$ pravougli trougao.

c) Dati su krugovi $k_1(O_1,r_1)$ i $k_2(O_2,r_2)$ koji se dodiruju u tački E i dat je krug $k_3(O_3,r_3)$ takav da siječe krug k_1 u tačkama P i Q, a krug k_2 u tačkama M i N. Ako sa S označimo presjek pravih $p(P,Q)$ i $p(M,N)$ dokazati da je $p(S,E)$ tangenta na krug k_1 i na krug k_2.

d) Neka su dati krugovi $k_1(O_1,r_1)$, $k_2(O_2,r_2)$ i $k_3(O_3,r_3)$ takvi da k_1 dodiruje krug k_2 u tački P, k_2 dodiruje krug k_3 u tački Q, a k_1 i k_2 nemaju zajedničkih tački. Na pravoj $p(O_1,O_2)$ date su tačke M i N takve da $M\in k_1$, $N\in k_3$ i važi poredak $M-O_1-O_3-N$. Neka je $\{T\}=p(O_1,O_2)\cap p(P,Q)$. Dokazati da su trouglovi $\triangle TNQ$ i $\triangle TPM$ slični.

e) Nacrtati duž $x=\dfrac{\sqrt{3}+ab}{\sqrt{ab}}-1$, gdje su a i b date duži $(a<1<b)$.

Zadatak br. 2

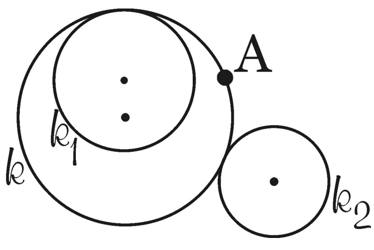
Date su tri konkurentne prave i na jednoj od njih tačka A (konkurentne prave su tri različite prave koje prolaze kroz istu tačku). Konstruisati $\triangle ABC$, tako da njegove simetrale uglova leže na datim pravama.

Zadatak br. 3

Simetrala spoljašnjeg ugla kod tjemena A trougla $\triangle ABC$ siječe pravu BC u tački A_2. Dokazati da je $A_2B : A_2C = AB : AC$.

Zadatak br. 4

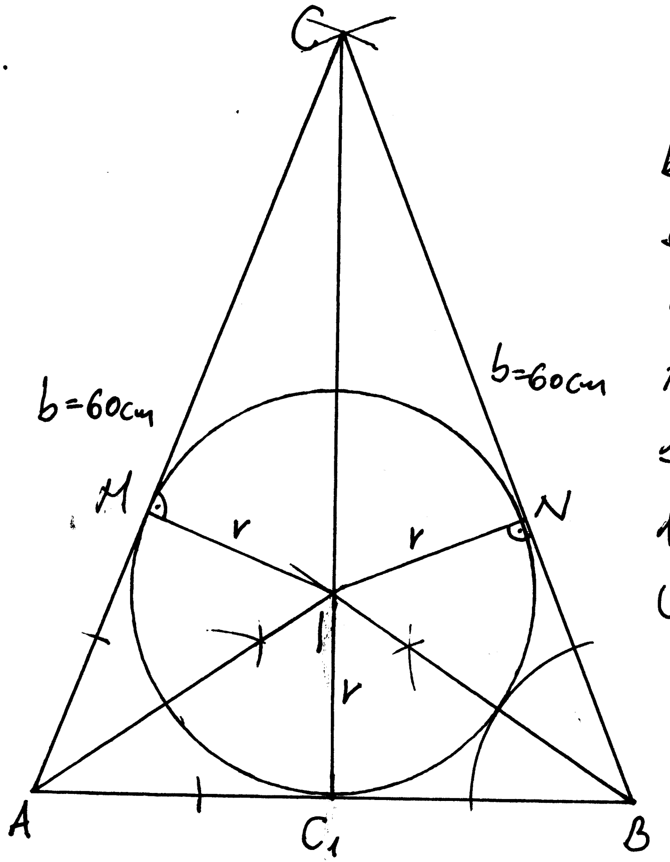
Dati su krugovi $k_1(O_1,r_1)$, $k_2(O_2,r_2)$ i tačka A. Konstruisati krug $k(O,r)$ koji prolazi kroz tačku A i dodiruje krugove k_1 i k_2 kao na skici.



(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

Centar upisane kružnice u jednakokrakom trouglu dijeli visinu u odnosu 12 : 5. Ako je dužina kraka trougla 60 cm, naći dužinu osnovice tog trougla.

Rj.



Označimo sa I centar upisanog kruga. Visina CC_1 spuštena na stranicu AB je ujedno i simetrala ugla $\measuredangle ACB$ pa je $I \in CC_1$. Posmatrajmo trouglove ΔAIC i ΔBIC. U ΔAIC visina na stranicu AC je $MI = r$.

U ΔBIC visina na stranicu BC je $NI = r$.

U ΔABI visina na stranicu AB je $C_1I = r$.

$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta AIC} + P_{\Delta BIC} + P_{\Delta ABI}$$

(ako označimo sa $h = CC_1$, sa $a = AB$, i sa $b = BC = AC$)

$$\frac{h \cdot a}{2} = \frac{r \cdot b}{2} + \frac{r \cdot b}{2} + \frac{r \cdot a}{2}$$

$(b = 60\text{ cm})$

$$\frac{h \cdot a}{2} = r \cdot 60 + \frac{r \cdot a}{2}$$

(Znamo $\frac{CI}{IC_1} = \frac{12}{5}$ (iz postavke)

$$\frac{CI}{IC_1} + 1 = \frac{12}{5} + 1$$

$$\frac{\overbrace{CI + IC_1}^{=h}}{\underbrace{IC_1}_{=r}} = \frac{17}{5} \Rightarrow \frac{h}{r} = \frac{17}{5}$$

$$h = \frac{17}{5} r$$

... (1))

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \frac{17}{5} r \cdot \frac{a}{2} = 60r + \frac{a}{2} r \quad /:r$$

$$60 + \frac{a}{2} = \frac{17a}{10} \quad /\cdot 10$$

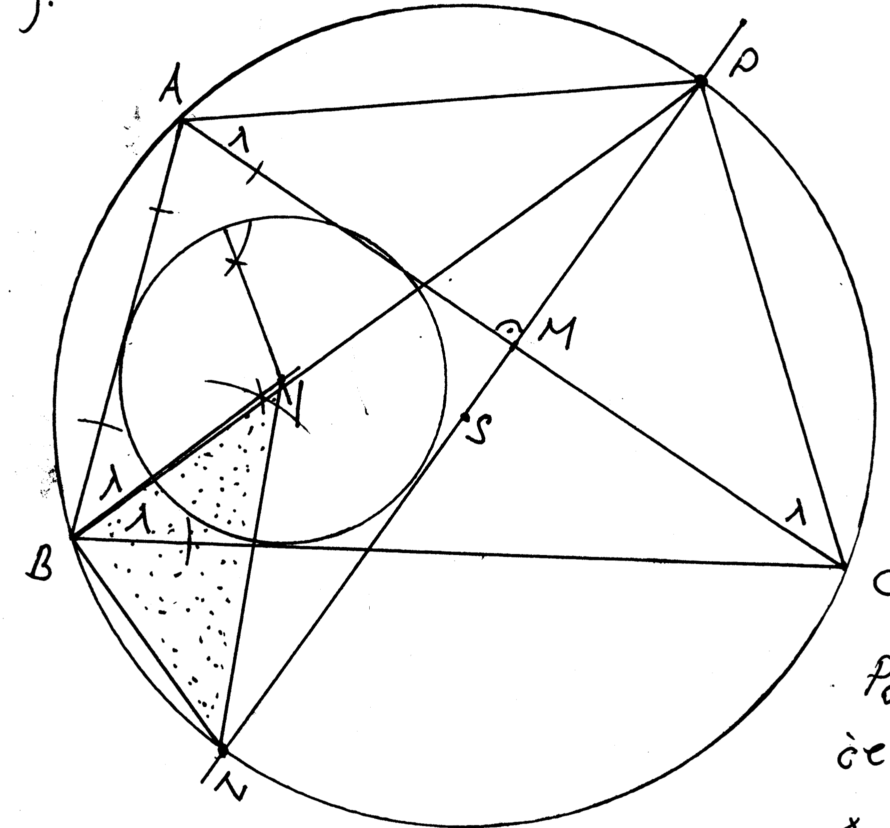
$$17a - 5a = 600$$

$$12a = 600$$

$$a = 50\text{ cm}$$ ← traženo rješenje

(#) Neka je I centar upisanog kruga ΔABC $(AB < BC)$, tačka S centar opisanog kruga k oko trougla ΔABC i tačka M sredina stranice AC. Ako su P i N tačke dobijene presjekom prave $p(M,S)$ i kruga k (gdje su tačke B i N sa jedne strane, a tačka P sa druge strane prave $p(A,C)$), dokazati da je ΔBNI pravougli.

Rj.



Posmatrajmo trouglove ΔAMP i ΔPMC. Imamo

$AM \cong MC$ (M središte AC)
$\sphericalangle AMP \cong \sphericalangle CMP = 90^\circ$ (S-M-P i tačka S leži na simetrali stranice AC)
$PM \cong PM$ $\overset{SUS}{\Longrightarrow}$

$\overset{SUS}{\Longrightarrow} \Delta AMP \cong \Delta CMP$

$\Downarrow$

$\sphericalangle PAM \cong \sphericalangle PCM = \lambda$

Posmatrajmo sad tetivni četverougao $\square BCPA$. Imamo

$\sphericalangle ABP \cong \sphericalangle PCA = \lambda$ i

$\sphericalangle PBC \cong \sphericalangle PAC = \lambda$

$\Rightarrow$ $p[B,P)$ je simetrala ugla $\sphericalangle ABC$ tj. tačka $I \in BP$.

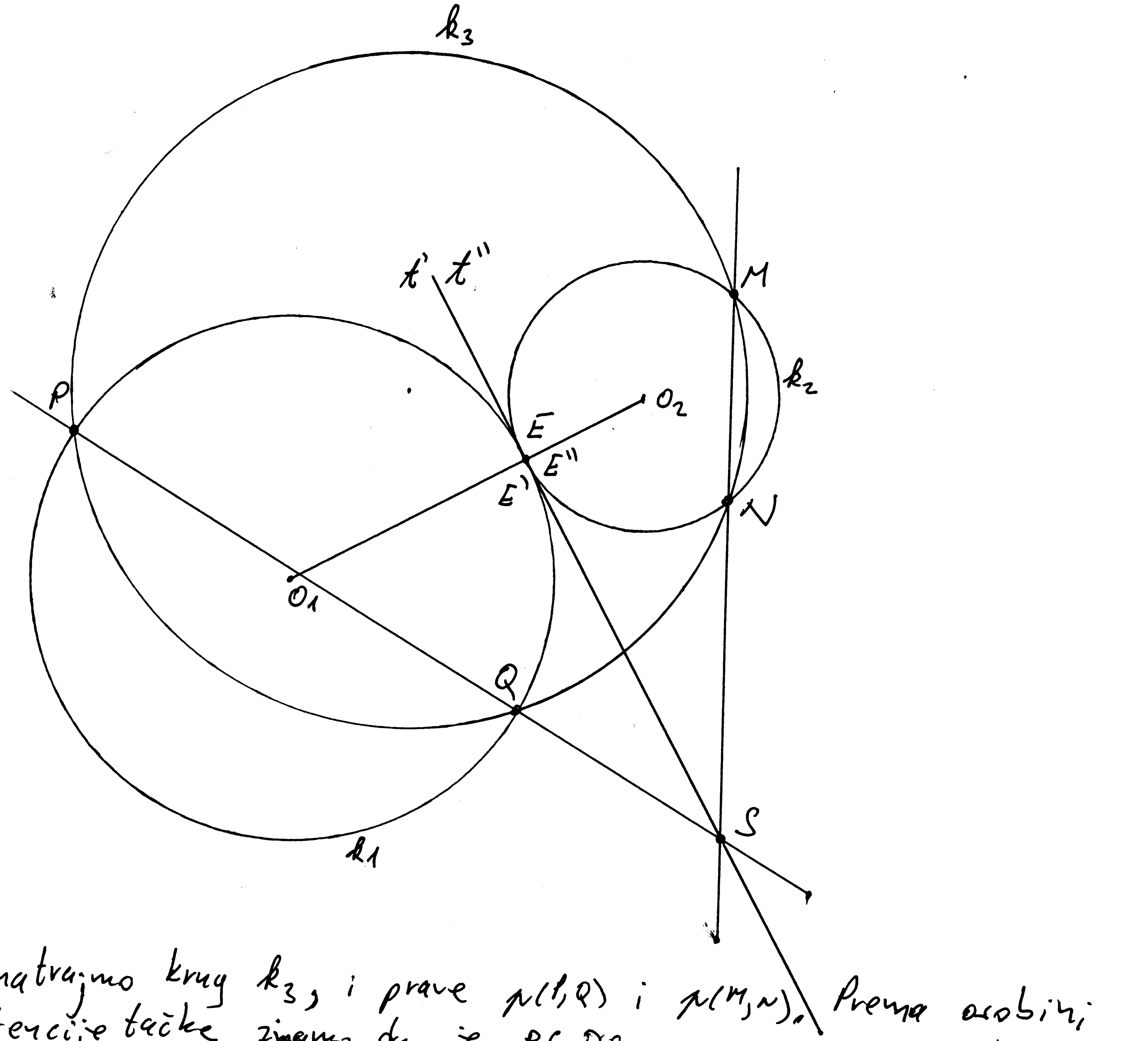
Ugao nad prečnikom je prav pa $\sphericalangle NBP = 90^\circ$ tj.

$\sphericalangle NBI = 90^\circ$ $\Rightarrow$ ΔNBI je pravougli

q.e.d.

(#) Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ koji se dodiruju u tački E i dat je krug $k_3(O_3, r_3)$ takav da siječe krug k_1 u tačkama P i Q, a krug k_2 u tačkama M i N. Ako sa S označimo presjek pravih $p(P,Q)$ i $p(M,N)$ dokazati da je $p(S,E)$ tangenta i na krug k_1 i na krug k_2.

Rj.



Posmatrajmo krug k_3, i prave $p(P,Q)$ i $p(M,N)$. Prema osobini potencije tačke znamo da je $PS \cdot QS = MS \cdot NS$. ...(1)

Iz tačke S možemo povući dvije tangente na krug k_1. Pa neka je t' tangenta na k_1 sa one strane prave $p(S,O_1)$ sa koje je tačka E i i neka t' dodiruje k_1 u tački E'. Slično imamo i za k_2, pa neka je t'' tangenta na krug k_2 sa one strane prave $p(S,O_2)$ sa koje je tačka E i neka t'' dodiruje k_2 u tački E''.

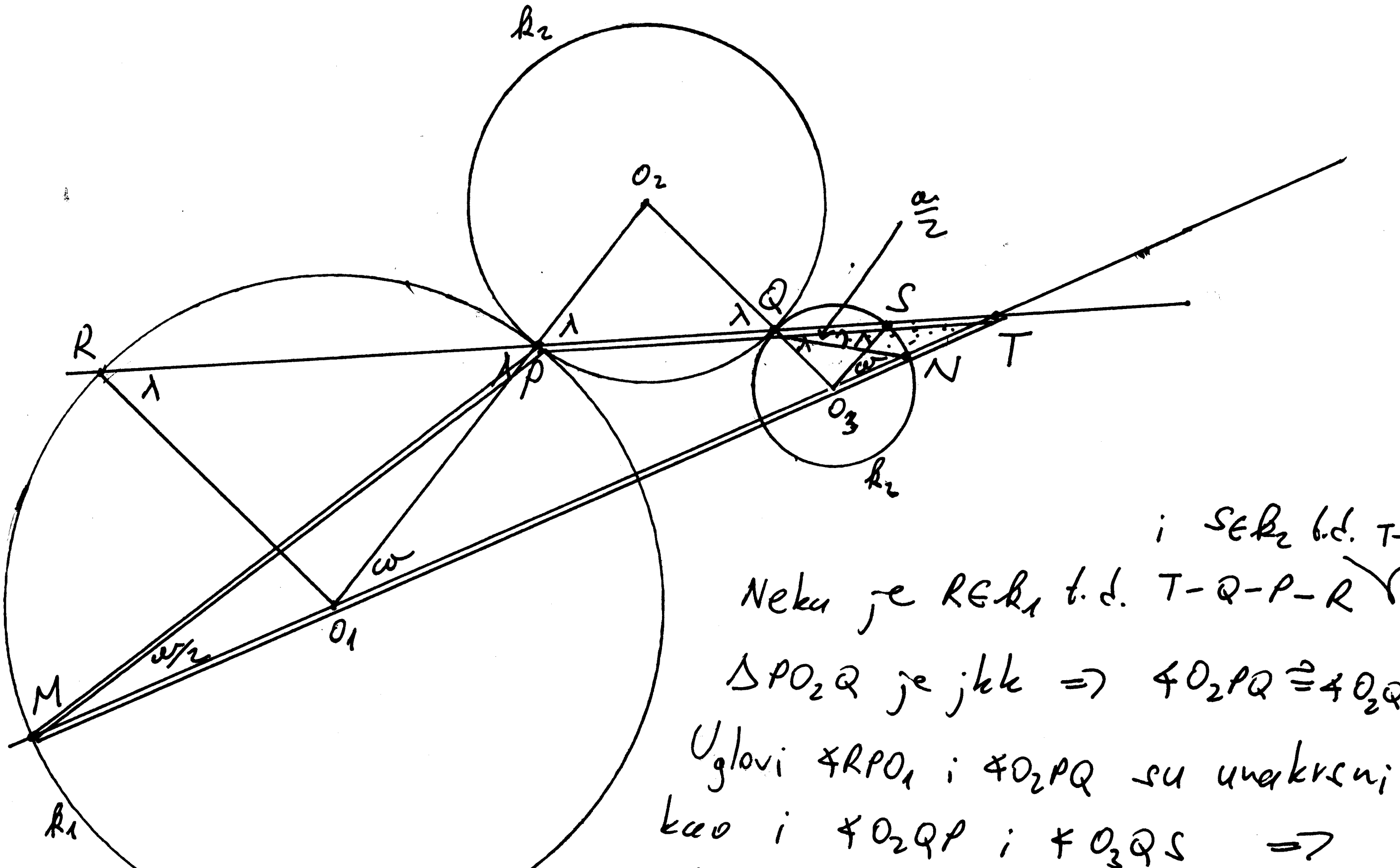
za k_1 $PS \cdot QS = SE'^2$
za k_2 $MS \cdot NS = SE''^2$ $\Big\} \overset{(1)}{\Longrightarrow} SE'^2 \cong SE''^2 \Rightarrow SE' \cong SE''$

$\boxed{p(S,E) \text{ jest tang. na } k_1 \text{ i na } k_2 \text{ š.e.d.}}$

Prave $p(S,E')$ i $p(S,E'')$ ne mogu biti dvije različite prave jer bi tada razdvajali krugove k_1 i k_2 (krugovi ne bi imali zajedničku tačku E) $\Rightarrow p(S,E') \equiv p(S,E'') \Rightarrow \boxed{E' = E'' = E}$

(#) Neka su dati krugovi $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ i $k_3(O_3, r_3)$ takvi da k_1 dodiruje krug k_2 u tački P, k_2 dodiruje krug k_3 u tački Q i k_1 i k_3 nemaju zajedničkih tački. Na pravoj $p(O_1, O_2)$ date su tačke M i N takve da $M \in k_1$, $N \in k_3$ i važi poredak $M-O_1-O_2-N$. Neka je $\{T\} = p(O_1, O_2) \cap p(P, Q)$. Dokazati da su trouglovi $\triangle TNQ$ i $\triangle TPM$ slični.

Rj.



Neka je $R \in k_1$ t.d. $T-Q-P-R$ i $S \in k_2$ t.d. $T-S-Q$

$\triangle PO_2Q$ je jkk $\Rightarrow \angle O_2PQ \cong \angle O_2QP = \lambda$,

Uglovi $\angle RPO_1$ i $\angle O_2PQ$ su unakrsni kao i $\angle O_2QP$ i $\angle O_3QS$ $\Rightarrow$

$\angle RPO_1 = \lambda = \angle SQO_3$

Kako su $\triangle PO_1R$ i $\triangle SO_3Q$ jkk $\Rightarrow \angle PRO_1 = \lambda$ i $\angle QSO_3 = \lambda$

Ako posmatramo $p(S, R)$ i primjetimo da je $\angle RSO_3 \cong \angle RPO_1 = \lambda$

$\Rightarrow PO_1 \parallel SO_3$

$PO_1 \parallel SO_3$ i $p(M, N)$ transferzala $\Rightarrow \angle SO_3T \cong \angle PO_1T = \omega$.

Ovo su dva centralna ugla nad lukom kojima odgovaraju periferijski $\angle O_1MP$ i $\angle NQS$. Sad imamo

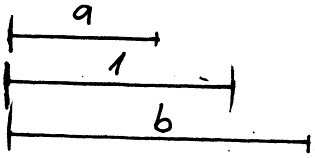
$\angle QTN \cong \angle MTQ$ (zajednički ugao)
$\angle TQN \cong \angle TMP = \frac{\omega}{2}$
$\angle TNQ \cong \angle TPM$ (treći ugao)

$\xrightarrow{\text{(slič UUU)}}$ $\triangle TNQ \sim \triangle TPM$

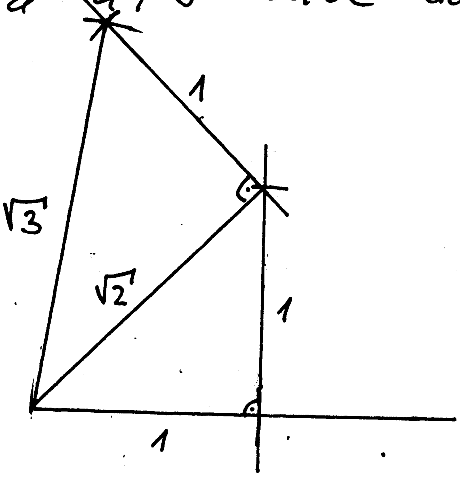
q.e.d.

(#) Nacrtati duž $x=\frac{\sqrt{3}+ab}{\sqrt{ab}}-1$ gdje su a i b date duži $(a<1<b)$.

Rj.



Nacrtajmo duž $\sqrt{3}$.

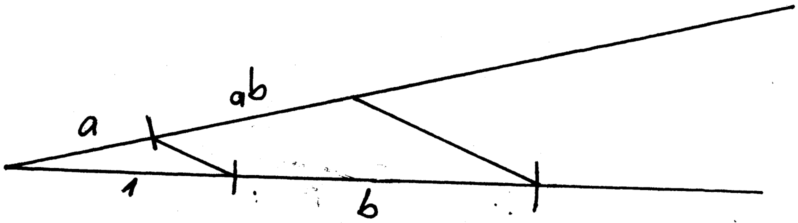


Nacrtajmo duž ab.

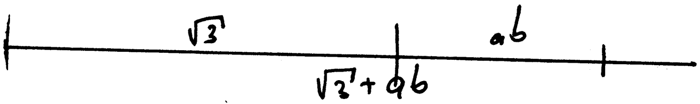
$Y=a\cdot b$

$\frac{Y}{a}=\frac{b}{1}$

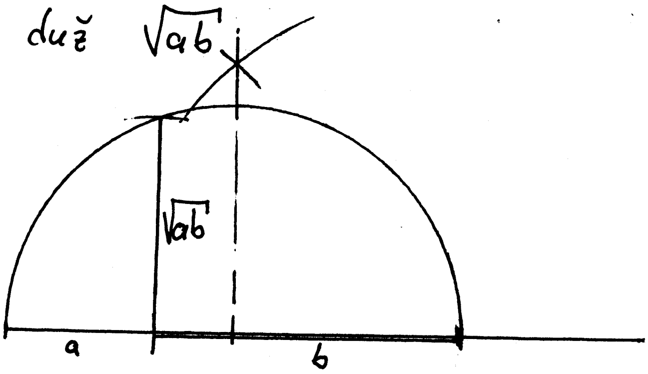
$\frac{1}{b}=\frac{a}{Y}$



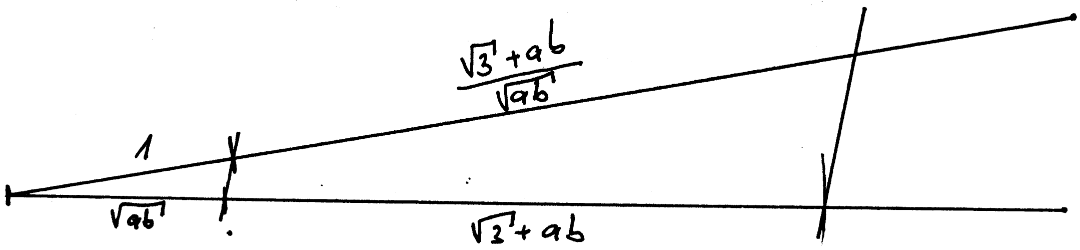
Nacrtajmo duž $\sqrt{3}+ab$



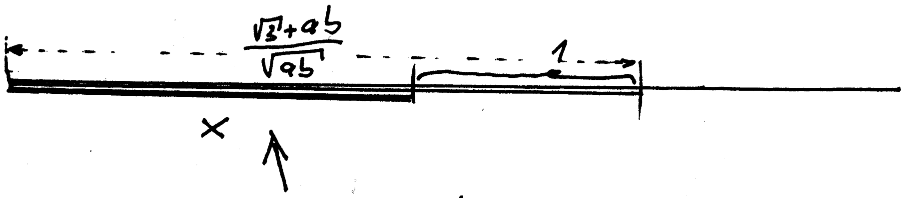
Nacrtajmo duž $\sqrt{ab}$



Nacrtajmo duž $\frac{\sqrt{3}+ab}{\sqrt{ab}}$. $z=\frac{\sqrt{3}+ab}{\sqrt{ab}} \Rightarrow \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{3}+ab}=\frac{1}{z}$



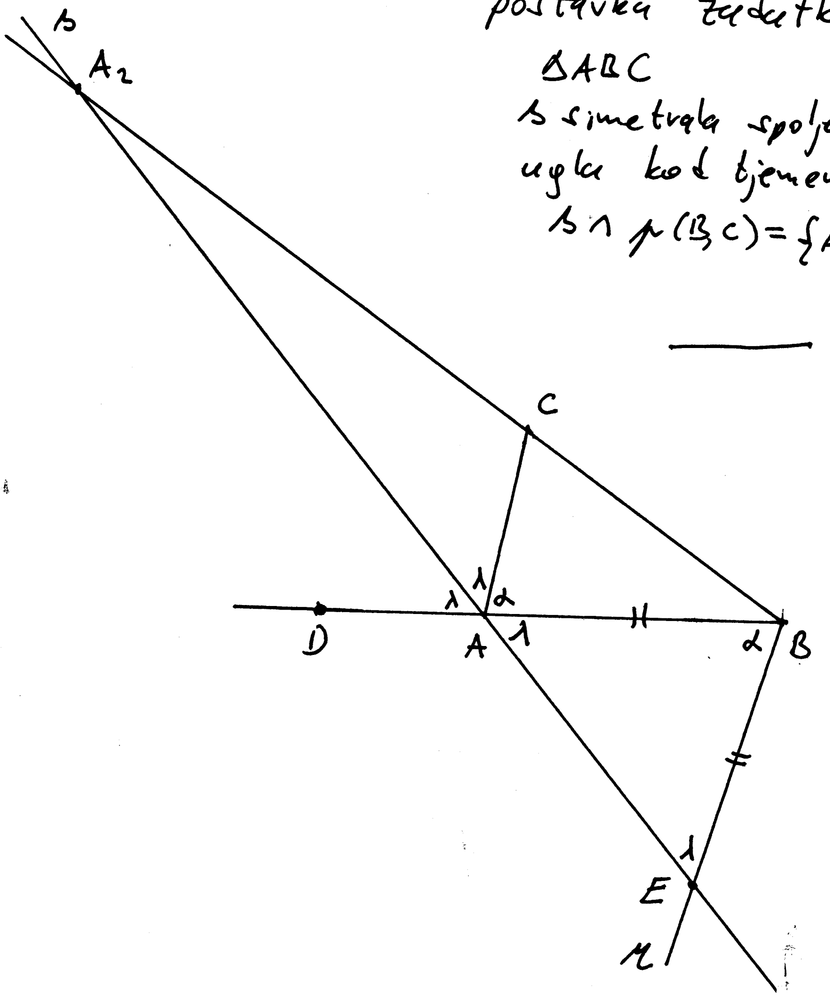
Na kraju nacrtajmo duž $x=\frac{\sqrt{3}+ab}{\sqrt{ab}}-1$



tražena duž

(#) Simetrala spoljašnjeg ugla kod tjemena A trougla ΔABC siječe pravu BC u tački A_2. Dokazati da je $A_2B : A_2C = AB : AC$.

Rj.



postavka zadatka

$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \\ s \text{ simetrala spoljašnjeg ugla kod tjemena } A \\ s \cap p(B,C) = \{A_2\} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{A_2B}{A_2C} = \dfrac{AB}{AC}$

Neka je D proizvoljna tačka na pp$[B,A)$ t.d. $B-A-D$.
Neka je r poluprava sa početnom tačkom B takva da $\measuredangle ABr = \alpha$ i r siječe $p(A_2, A)$. Njihovu presječnu tačku označimo sa E.

Sad primjetimo da su uglovi $\measuredangle DAA_2$ i $\measuredangle BAE$ unakrsni pa imamo da je $\measuredangle BAE = \lambda$. Isto tako primjetimo da je $\measuredangle DAB$ ravan tj. $2\lambda + \alpha = 180°$. Kako u trouglu ΔAEB imamo već dva ugla α i λ to je $\measuredangle AEB = \lambda \Rightarrow \Delta AEB$ jkk tj. $AB \cong EB$. Na pravoj $p(A_2, E)$ imamo $\measuredangle A_2AC = \measuredangle A_2EB = \lambda$ $\Rightarrow p(A,C) \parallel p(E,B)$. Sad na ove dvije prave možemo upotrebiti Talesov teorem i zaključiti da

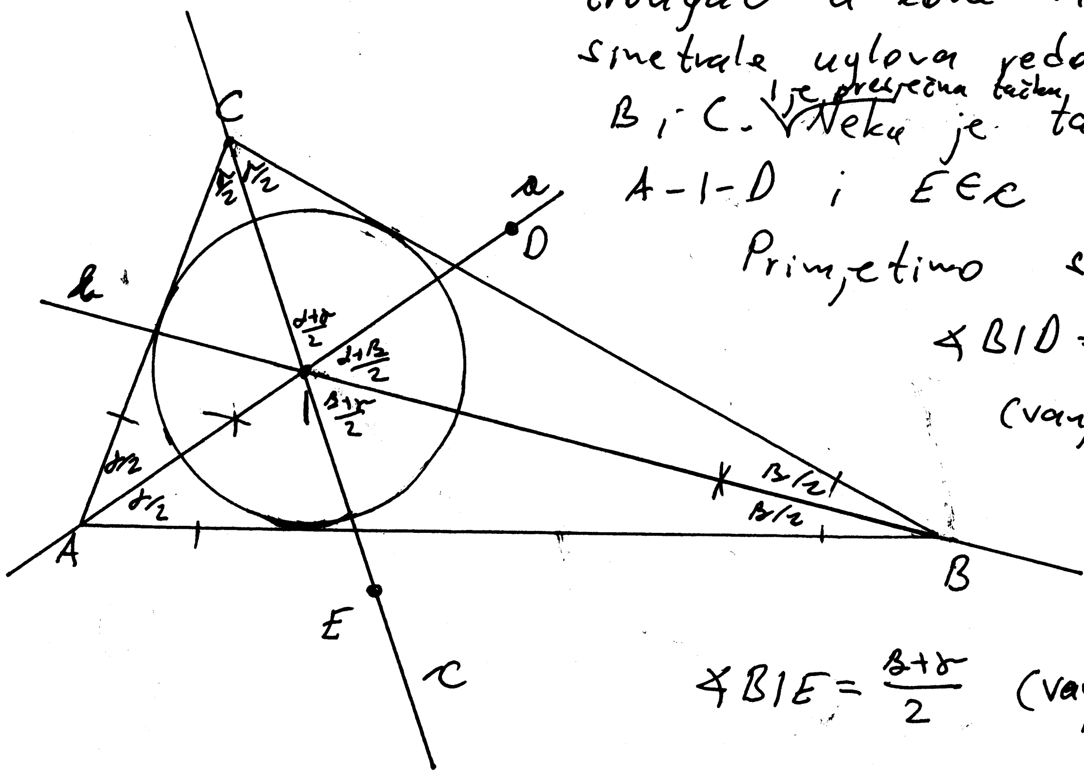
$$\frac{A_2B}{A_2C} = \frac{EB}{AC} \quad \overset{(\text{kako je } EB \cong AB)}{\Longrightarrow} \quad \frac{A_2B}{A_2C} = \frac{AB}{AC}$$

q.e.d.

(#) Date su tri konkurentne prave i na jednoj od njih tačka A. Konstruisati trougao ΔABC, tako da njegove simetrale uglova leže na datim pravama.
(Konkurentne prave su prave koje prolaze kroz istu tačku).

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je ΔABC traženi trougao u kome su date prave a, b i c simetrale uglova redom kod vrhova A, B i C. I je presječna tačka pravih. Neka je tačka $D \in a$ t.d. $A-I-D$ i $E \in c$ t.d. $C-I-E$.



Primjetimo sljedeće

$\sphericalangle BID = \frac{\alpha+\beta}{2}$ (vanjski ugao ΔABI)

$\sphericalangle BIE = \frac{\beta+\gamma}{2}$ (vanjski ugao ΔBIC)

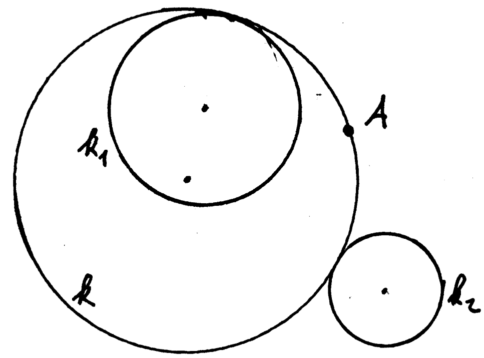
$\sphericalangle CID = \frac{\alpha+\gamma}{2}$ (vanjski ugao ΔAIC).

$$(\sphericalangle BID + \sphericalangle CID) - \sphericalangle BIE = \left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha+\gamma}{2}\right) - \frac{\beta+\gamma}{2} = \alpha + \frac{\beta+\gamma}{2} - \frac{\beta+\gamma}{2} = \alpha$$

Kako su uglovi $\sphericalangle BID$, $\sphericalangle CID$ i $\sphericalangle BIE$ poznati to možemo odrediti ugao α a time i ugao $\frac{\alpha}{2}$.

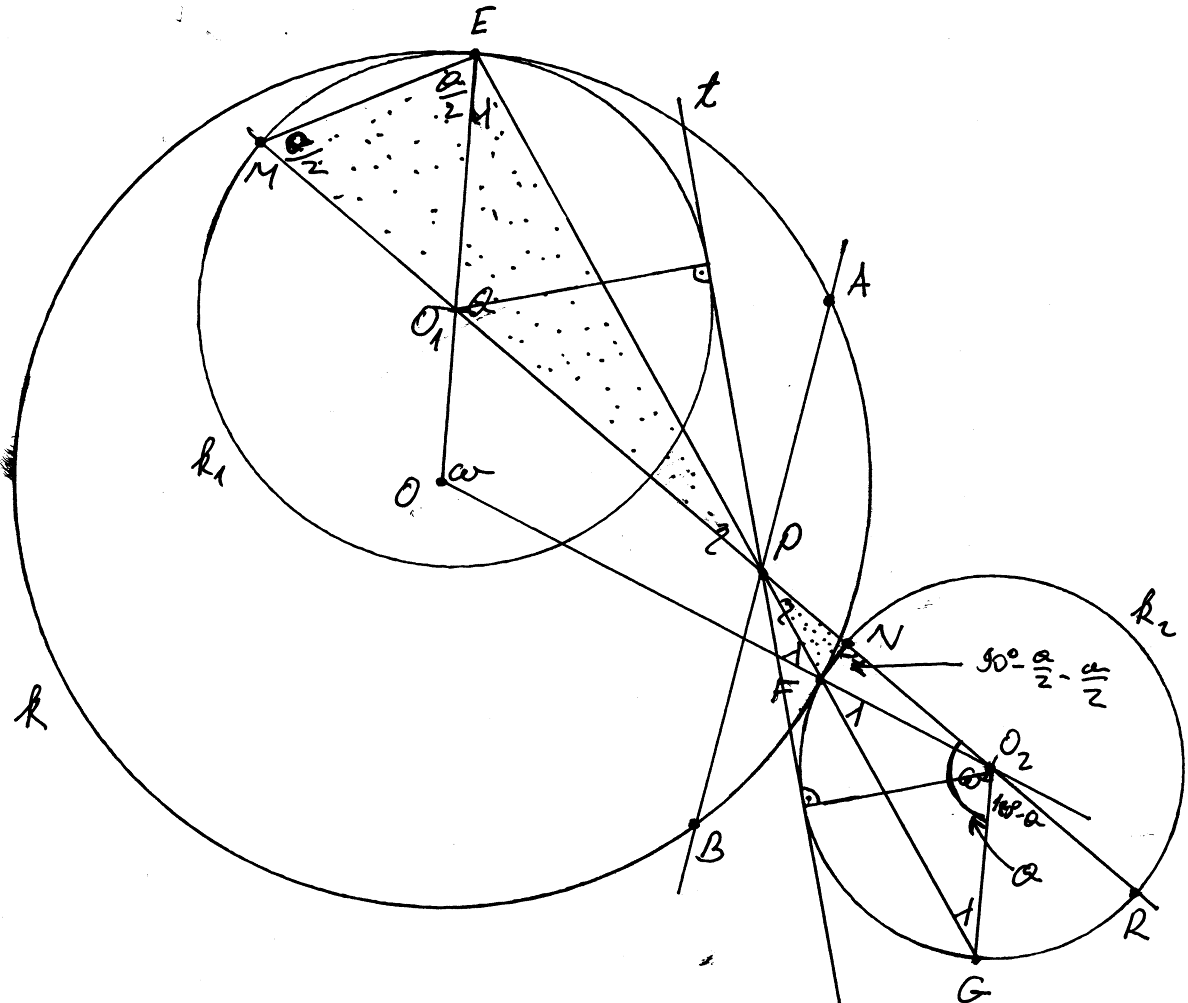
Sad nije teško konstruisati tačke B i C a time i ΔABC.

(#) Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ i tačka A. Konstruisati krug $k(O, r)$ koji prolazi kroz tačku A i dodiruje krugove k_1 i k_2 kao na skici.



Rj: Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $k(O, r)$ traženi krug koji prolazi kroz tačku A i dodiruje krugove $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ redom u tačkama E i F.



Označimo sa M i N tačke na pravoj $p(O_1, O_2)$ tako da je $M-O_1-N-O_2$ i $M \in k_1$, $N \in k_2$. Dalje neka je P tačka

$$\{P\} = p(O_1, O_2) \cap p(E, F).$$

Kako je F dodirna tačka krugova k i k_2 znamo da je $O-F-O_2$
Neka je $\{G\} = p(E, F) \cap k_2$
Ako označimo sa λ ugao $\measuredangle O_2FG$ imamo da je i
$\measuredangle OFE = \lambda$ (unakrsni) $\Rightarrow \measuredangle OEF \stackrel{\sim}{=} \measuredangle FGO_2 = \lambda$ (trouglovi ΔOFE i ΔFGO_2 su jkk) $\Rightarrow \measuredangle EOF \stackrel{\sim}{=} \measuredangle GO_2F = \omega$.
Pa na pravoj $p(O, O_2)$ imamo ugao $\omega \Rightarrow p(O, E) \parallel p(O_2, G)$.
Dalje, želimo pokazati da su trouglovi ΔMEP i ΔPFN slični. Neka je $R \in k_2$ t.d. $N-O_2-R$. Posmatrajmo oštri periferiski ugao $\measuredangle FNR$ nad lukom FGR. Njemu odgovarajući centralni je $\measuredangle FO_2R$ (nad istim lukom)
Ako označim sa α ugao $\measuredangle NO_2G$ imamo da je $\measuredangle RO_2G = 180° - \alpha$.
Isto tako, kako je $p(O, E) \parallel p(G, O_2)$ i $p(O_1, O_2)$ transferzala $\measuredangle EO_1P = \alpha$. Sad oštri periferiski ugao $\measuredangle FNR$ iznosi $90° - \frac{\alpha}{2} + \frac{\omega}{2}$ (zato što je centralni $\measuredangle FO_2R = \omega + 180° - \alpha$).
Prema tome možemo zaključiti da je $\measuredangle FNP = 90° + \frac{\alpha}{2} - \frac{\omega}{2}$.
Trougao ΔMO_1E je jkk sa osnovicom EM i vanjskim uglom kod vrha O_1 α pa je $\measuredangle O_1ME \stackrel{\sim}{=} \measuredangle O_1EM = \frac{\alpha}{2}$.
Znamo da je $2\lambda + \omega = 180° \Rightarrow \lambda = 90° - \frac{\omega}{2}$ tj. imamo da je $\measuredangle MEP = \frac{\alpha}{2} + 90° - \frac{\omega}{2}$. Možemo zaključiti

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle PNF \stackrel{\sim}{=} \measuredangle MEP = 90° + \frac{\alpha}{2} - \frac{\omega}{2} \\ \measuredangle NPF \stackrel{\sim}{=} \measuredangle EPM \text{ (unakrsni)} \\ \measuredangle EMP \stackrel{\sim}{=} \measuredangle PFN \text{ (treći ugao)} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(slič. UUU)}} \Delta PFN \sim \Delta PME$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{MP}{PF} = \frac{PE}{PN}$$

tj. $MP \cdot PN = PE \cdot PF \quad \dots(1)$

Sad ako označimo sa B tačku na k t.d. $A-P-B$ zbog potencije tačke imamo $PA \cdot PB = PE \cdot PF \quad \dots(2)$

$$(1) \text{ i } (2) \Rightarrow \quad PA \cdot PB = PM \cdot PN$$

$$PB = \frac{PM \cdot PN}{PA}$$

Pa kako imamo tačke M i N, ako bi mogli konstruisati tačku P odmah bi mogli konstruisati i tačka B.

Posmatrajmo tačke M, O_1 i E. Pokazaćemo da se one redom homotetično preslikavaju u tačke R, O_2 i G, sa centrom homotetije u tački P.

Trouglovi ΔEO_1P i ΔGO_2P su slični (trivijalno)

$$\frac{PE}{PG} = \frac{PO_1}{PO_2} = \frac{O_1E}{O_2G} = \frac{r_1}{r_2} \quad \dots(3)$$

Isto tako $\Delta PME \sim \Delta PRG$ (ZAŠTO?) pa

$$\frac{PM}{PR} = \frac{PE}{PG} = \frac{ME}{GR} \overset{(3)}{=} \frac{r_1}{r_2} \quad \dots(4)$$

(3) i (4) $\Rightarrow$ krug k_1 se homotetično preslikava u krug k_2 sa centrom homotetije u tački P. Pa ako je t tangenta na k_1, prava t će biti tangenta i na krug k_2.

Kako pravu t sad možemo konstruisati to možemo dobiti tačku P a poslije toga i tačku B. Naš problem smo sad sveli na konstrukciju kruga kroz dvije tačke A i B tako da dodiruje dati krug k_1 (ili k_2), a tu konstrukciju znamo od ranije pa je nije teško konstruisati.