Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 26.06.2010.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija 2**

Zadatak br. 1 (20 boda)

a) U trouglu $\triangle ABC$ je $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 4 : 5$. Dokazati da prava koja sadrži poluprečnik BS (S je centar opisane kružnice $\triangle ABC$) siječe stranicu AC u tački N koja je dijeli u omjeru $1 : 2$ računajući od vrha A.

b) Deltoid $\square FACE$ preslikati homotetično s koeficijentom $-0,75$ u odnosu na tačku F. Ako je $O_{\square FACE} = 90\,cm$ izračunati obim novodobijenog četverougla.

c) Konstruisati unutrašnju zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

d) U pravouglom trouglu $\triangle ABC$, a i b su kraci a c je hipotenuza ($BC = a$, $AC = b$, $AB = c$). Dokazati da je $a^2 + b^2 = c^2$.

e) Date su duži a i b. Nacrtati duž x ako je $x\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{3\sqrt{b}}}{a}$.

Zadatak br. 2 (20 bodova)

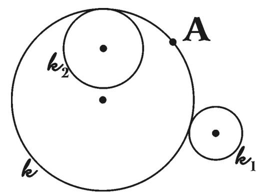
U trouglu $\triangle ABC$ uglovi B i C su oštri, a visina iz tjemena A podudarna je sa stranicom BC. Dokazati da svi pravougaonici upisani u $\triangle ABC$ tako da im dva tjemena leže na stranicama BC, imaju jednake obime.

Zadatak br. 3 (20 bodova)

Konstruisati kvadrat ako je dat njegov centar opisane kružnice i dvije tačke koje pripadaju nekim od njegovih stranica.

Zadatak br. 4 (20 bodova)

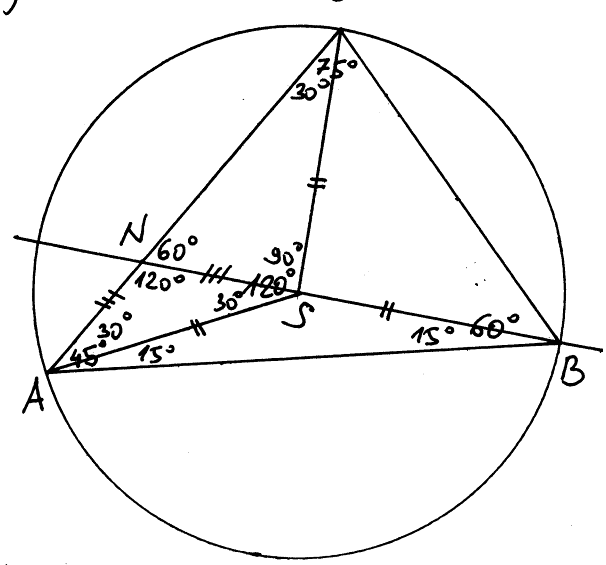
Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$, $(r_1 < r_2)$ i tačka A. Konstrisati krug k koji će prolaziti kroz tačku A i dodirivati krugove k_1 i k_2 kao na skici:



(Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

U trouglu ΔABC je $\alpha:\beta:\gamma = 3:4:5$. Dokazati da prava koja sadrži poluprečnik BS (S je centar opisane kružnice ΔABC) siječe stranicu AC u tački N koja je dijeli u omjeru $1:2$ računajući od vrha A.

Rj.



$\alpha:\beta:\gamma = 3:4:5$

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{4}$ $\quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{4}{5}$

$\alpha = \frac{3}{4}\beta$ $\quad \gamma = \frac{5}{4}\beta$

$\alpha+\beta+\gamma = 180°$

$\frac{3}{4}\beta + \beta + \frac{5}{4}\beta = 180°$

$3\beta = 180°$

$\beta = 60°$

$\Rightarrow \alpha = 45°$; $\gamma = 75°$

$\measuredangle ASC$ centralni ugao nad tetivom AC

$\measuredangle ASC = 120° \Rightarrow \measuredangle SAC = \measuredangle SCA =$

ΔABS jkk sa osnovicom $AB \Rightarrow$

$\Rightarrow \measuredangle SAB = \measuredangle SBA = 15° \Rightarrow$

$\Rightarrow \measuredangle CNB = 60°$ (vanjski ugao ΔABN)

$\Rightarrow \measuredangle ANB = 120° \Rightarrow \measuredangle ASN = 30° \Rightarrow AN \stackrel{?}{=} SN$

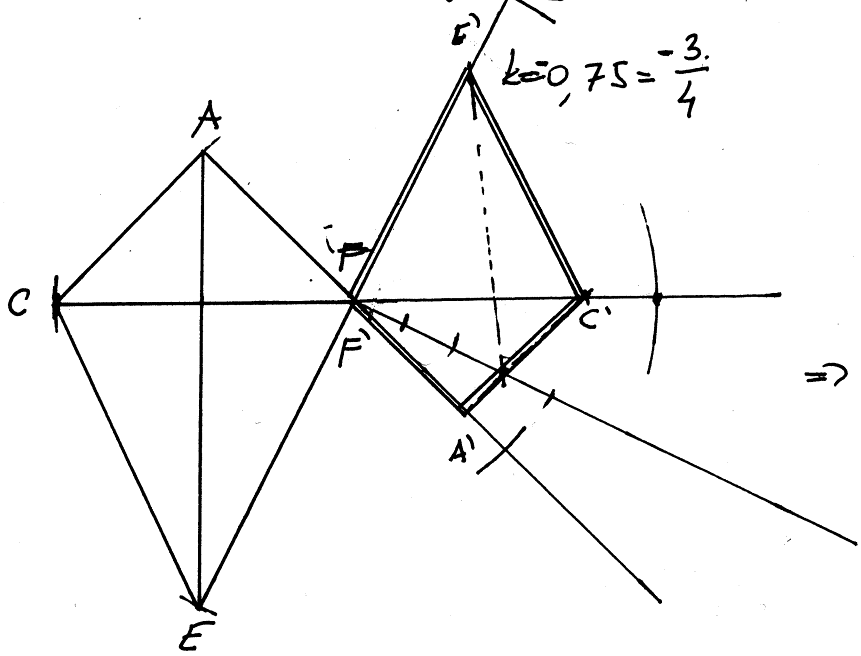
ΔNSC je pravougli pa $\cos 60° = \frac{SN}{CN} \Rightarrow CN \cdot \frac{1}{2} = SN = AN$

$CN = 2AN$

tj. $\frac{AN}{NC} = \frac{1}{2}$ q.e.d.

Deltoid $\square FACE$ preslikati homotetično s koeficijentom $-0,75$ u odnosu na tačku F. Ako je $O_{\square FACE} = 90$ cm izračunati obim novodobijenog četverougla.

Rj.



$O_{\square FACE} = 90$

$\frac{A'F'}{AF} = |k| = \frac{3}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{O_{\square F'A'C'E'}}{O_{\square FACE}} = \frac{3}{4} = k \Rightarrow$

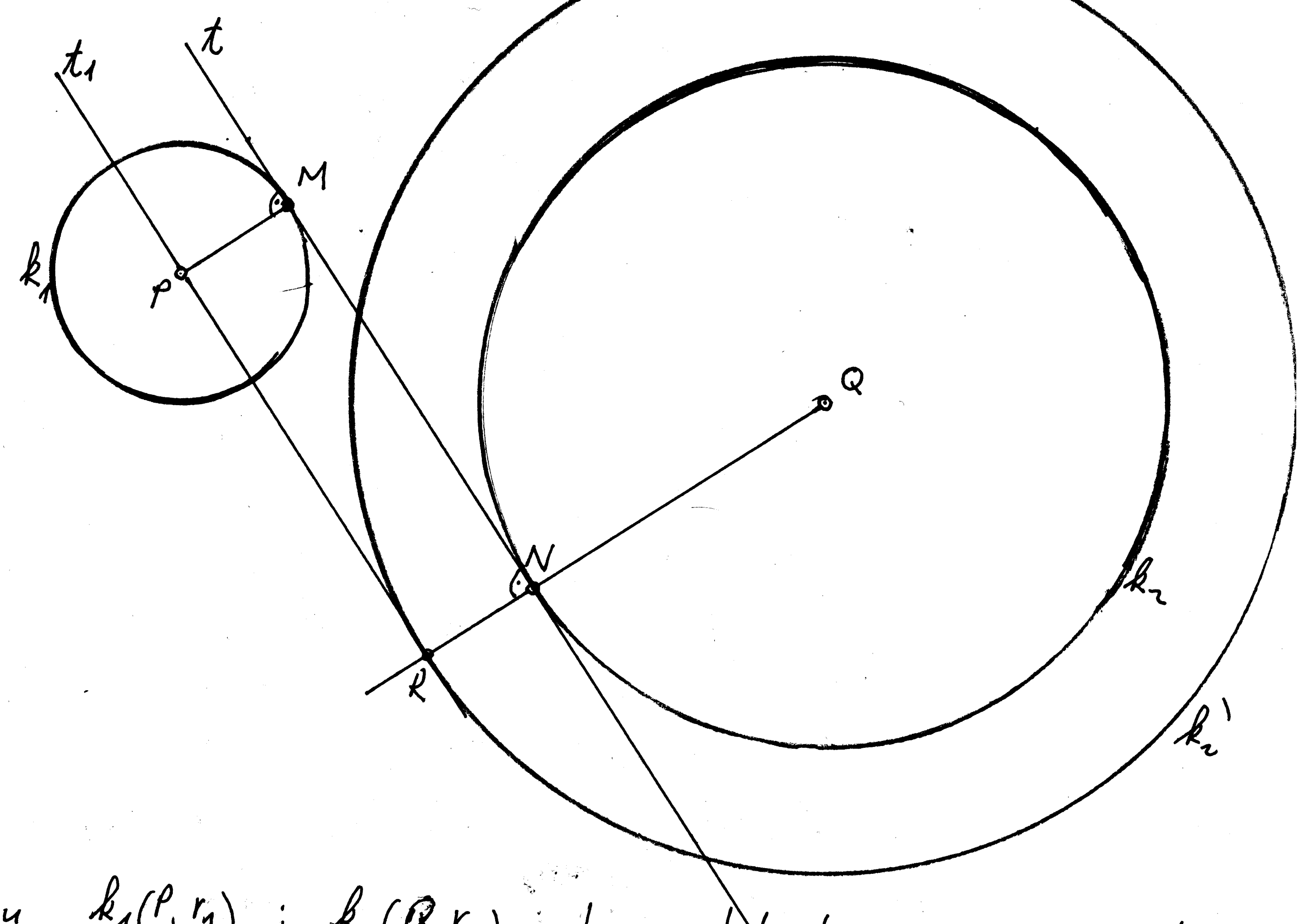
$\Rightarrow O_{\square F'A'C'E'} = \frac{3}{4} \cdot O_{\square FACE}$

$O_{\square F'A'C'E'} = \frac{3}{\cancel{4}_{2}} \cdot \cancel{90}^{45} = \frac{135}{2}$ cm

Konstruisati unutrašnju zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su $k_1(P, r_1)$ i $k_2(Q, r_2)$ dvije date kružnice i neka je t njihova zajednička tangenta. Označimo sa M i N tačke dodira tangente t sa k_1 i k_2 redom.

$PM \perp t$ i $QN \perp t \Rightarrow p(P,M) \parallel p(Q,N)$

Neka je $t_1 \parallel t$, $P \in t_1$ i $t_1 \cap p(Q,N) = \{R\}$: $Q-N-R$.

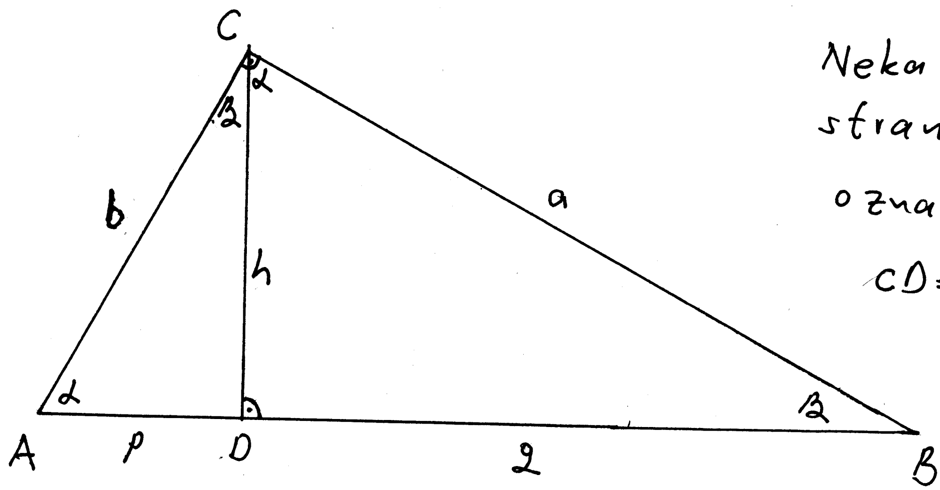
$QR = QN + NR = r_2 + r_1$. Označimo sa $k_2'(Q, QR)$.

Kako kružnicu k_2' mogu konstruisati, to mogu konstruisati i tačku R (tangenta na kružnicu k_2' iz tačke P).

Kako je $PM = NR$, $N \in t$ i $t_1 \parallel t$ to možemo konstruisati i traženu tangentu t.

(#) U pravouglom trouglu ΔABC, a i b su kraci a c je hipotenuza ($BC=a$, $AC=b$, $AB=c$). Dokazati da je $a^2+b^2=c^2$.

Rj.



Neka je CD visina na stranicu c. Uvedimo oznake $AD=p$, $DB=q$, $CD=h$, $\measuredangle CAB=\alpha$ i $\measuredangle ABC=\beta$.

$c=p+q$

U ΔADC, $\measuredangle ADC=90^\circ$, $\measuredangle CAD=\alpha \Rightarrow \measuredangle ACD=\beta$

U ΔBCD, $\measuredangle BDC=90^\circ$, $\measuredangle DBC=\beta \Rightarrow \measuredangle BCD=\alpha$

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle ACB=\measuredangle ADC=90^\circ\\ \measuredangle CAB=\measuredangle CAD=\alpha\\ \measuredangle ABC=\measuredangle ACD=\beta\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta ABC \sim \Delta ACD$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{c}{b}=\frac{b}{p} \Rightarrow b^2=cp \quad \ldots(1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle ACB=\measuredangle CDB=90^\circ\\ \measuredangle CAB=\measuredangle BCD=\alpha\\ \measuredangle ABC=\measuredangle DBC=\beta\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta ABC \sim \Delta BCD$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{c}{a}=\frac{a}{q} \Rightarrow a^2=cq \quad \ldots(2)$$

$$(1) \text{ i } (2) \Rightarrow a^2+b^2=cq+cp=c(p+q)=c\cdot c=c^2$$

$$a^2+b^2=c^2$$

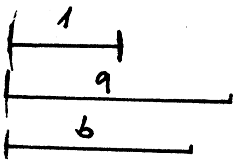
q.e.d.

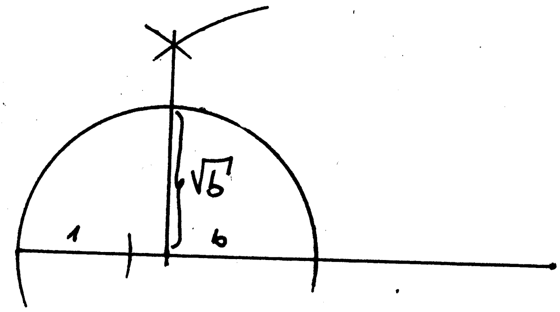
(#) Date su duži a i b. Nacrtati duž x ako je

$$x\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3\sqrt{b}}}{a}.$$

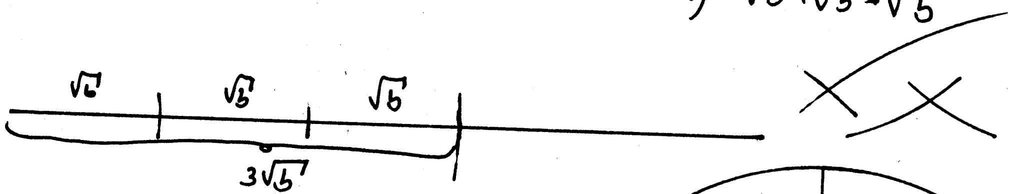
Rj.

Nacrtajmo duž $\sqrt{b}$:

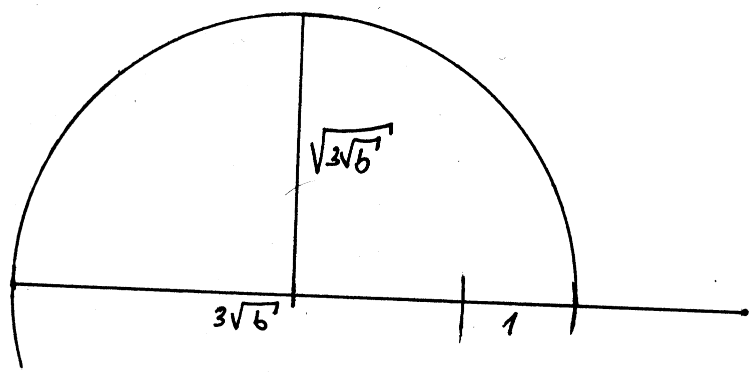




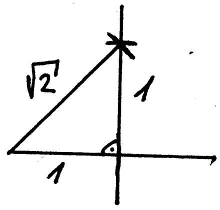
Nacrtajmo duž $3\sqrt{b}$ tj. $\sqrt{b}+\sqrt{b}+\sqrt{b}$



Nacrtajmo duž $\sqrt{3\sqrt{b}}$



Nacrtajmo $\sqrt{2}$



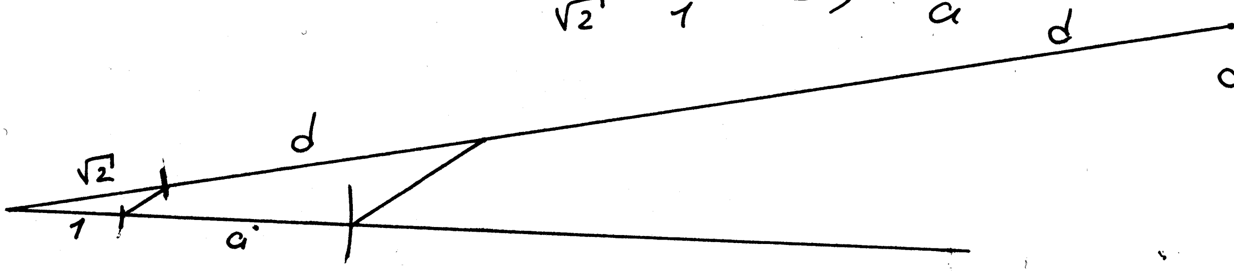
$$x\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3\sqrt{b}}}{a} \quad / \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

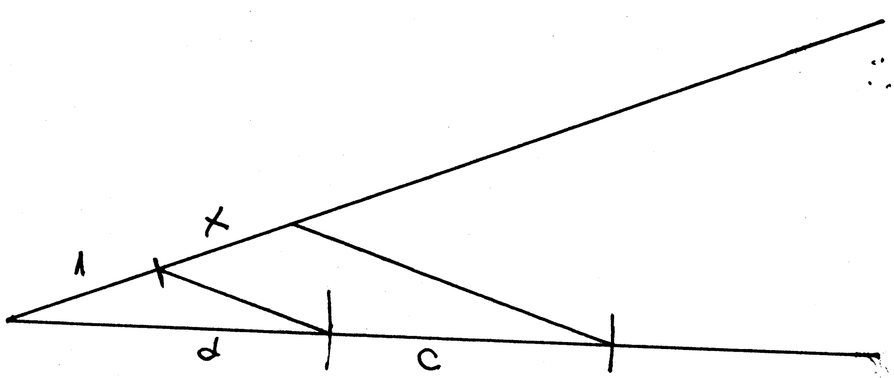
$$x = \frac{\sqrt{3\sqrt{b}}}{\sqrt{2}\,a} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{c} = \frac{1}{x}$$

gdje je $c = \sqrt{3\sqrt{b}}$

Nacrtajmo duž $d = a\sqrt{2}$

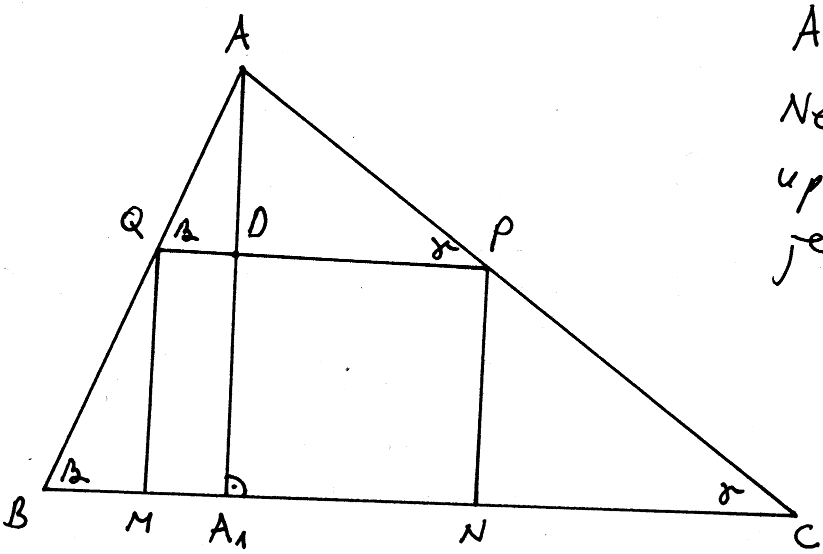
$$\frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{a}{1} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{2}}{d}$$





(#) U trouglu ΔABC uglovi B i C su oštri, a visina iz tjemena A podudarna je sa stranicom BC. Dokazati da svi pravougaonici upisani u ΔABC tako da im dva tjemena leže na stranici BC, imaju jednake obime.

Rj.



$AA_1 \cong BC$ (AA_1 visina ΔABC)

Neka je $\square MNPQ$ proizvoljan pravougaonik upisan u ΔABC tako da je $M, N \in BC$, $P \in AC$ i $Q \in AB$.

$\{D\} = AA_1 \cap PQ$

Dokazat ćemo da je $O_{\square MNPQ} = 2AA_1$ iz čega će slijediti tačnost naše tvrdnje.

$$O_{\square MNPQ} = MN + PN + PQ + MQ \xRightarrow[MQ \cong PN]{MN \cong PQ} O_{\square MNPQ} = 2MQ + 2PQ$$

$$O_{\square MNPQ} = 2DA_1 + 2PQ \quad \ldots (*)$$

$$p(B,C) \parallel p(P,Q) \xRightarrow{T_0 T_0} \frac{AC}{AP} = \frac{BC}{QP} \quad i \quad \frac{AC}{AP} = \frac{AA_1}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{QP} = \frac{AA_1}{AD} \Rightarrow \frac{BC}{AA_1} = \frac{QP}{AD} \xRightarrow{BC \cong AA_1} \frac{QP}{AD} = 1$$

$$\Rightarrow QP = AD \xRightarrow{(*)} O_{\square MNPQ} = 2DA_1 + 2AD = 2AA_1.$$

Obim proizvoljnog pravougaonika upisanog u ΔABC iznosi $2AA_1$ $\Rightarrow$

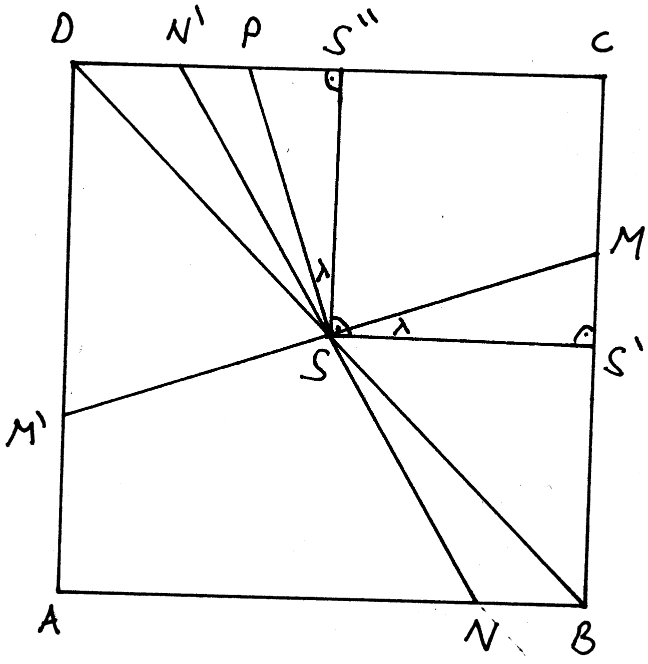
$\Rightarrow$ svi pravougaonici upisani u ΔABC tako da im dva tjemena leže na stranici BC imaju jednake obime

q.e.d.

(#) Konstruisati kvadrat ako je dat njegov centar opisane kružnice i dvije tačke koje pripadaju nekim od njegovih stranica.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat kvadrat $\square ABCD$ čiji je centar opisane kružnice tačka S (ujedno i presjek dijagonala) i neka su date tačke $M \in BC$ i $N \in AB$.

$p(M,S) \cap AD = \{M'\}$

$p(N,S) \cap CD = \{N'\}$

Neka su S' i S'' redom sredine stranica BC i CD.

SS' srednja linija $\triangle DBC \Rightarrow SS' = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} AB$

SS'' srednja linija $\triangle ACD \Rightarrow SS'' = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} AB$

$\Rightarrow SS' \cong SS''$

Nije teško pokazati (iz podudarnosti USU) da je $MS \cong M'S$ i da je $NS \cong N'S$.

Neka je $P \in CD$ takva $SP \perp MM'$. Označimo sa $\lambda = \measuredangle PSS''$.

$\measuredangle PSS' = 90° + \lambda$, $\measuredangle PSS' = \measuredangle PSM + \measuredangle MSS' = 90° + \measuredangle MSS' \Rightarrow$

$\Rightarrow \measuredangle MSS' = \lambda$

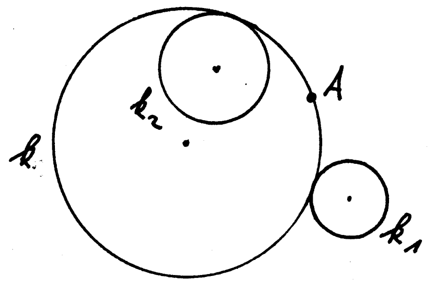
$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle MSS' \cong \measuredangle S''SP = \lambda \\ SS' \cong SS'' \\ \measuredangle SS'M \cong \measuredangle SS''P = 90° \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle SS'M \cong \triangle SS''P$$

$$\Downarrow$$

$$SM \cong PS$$

Kako su nam date tačke M i S to možemo konstruisati duž MM' a poslije toga i tačku P. Kako možemo konstruisati duž NN' time nije teško konstruisati i kvadrat $\square ABCD$.

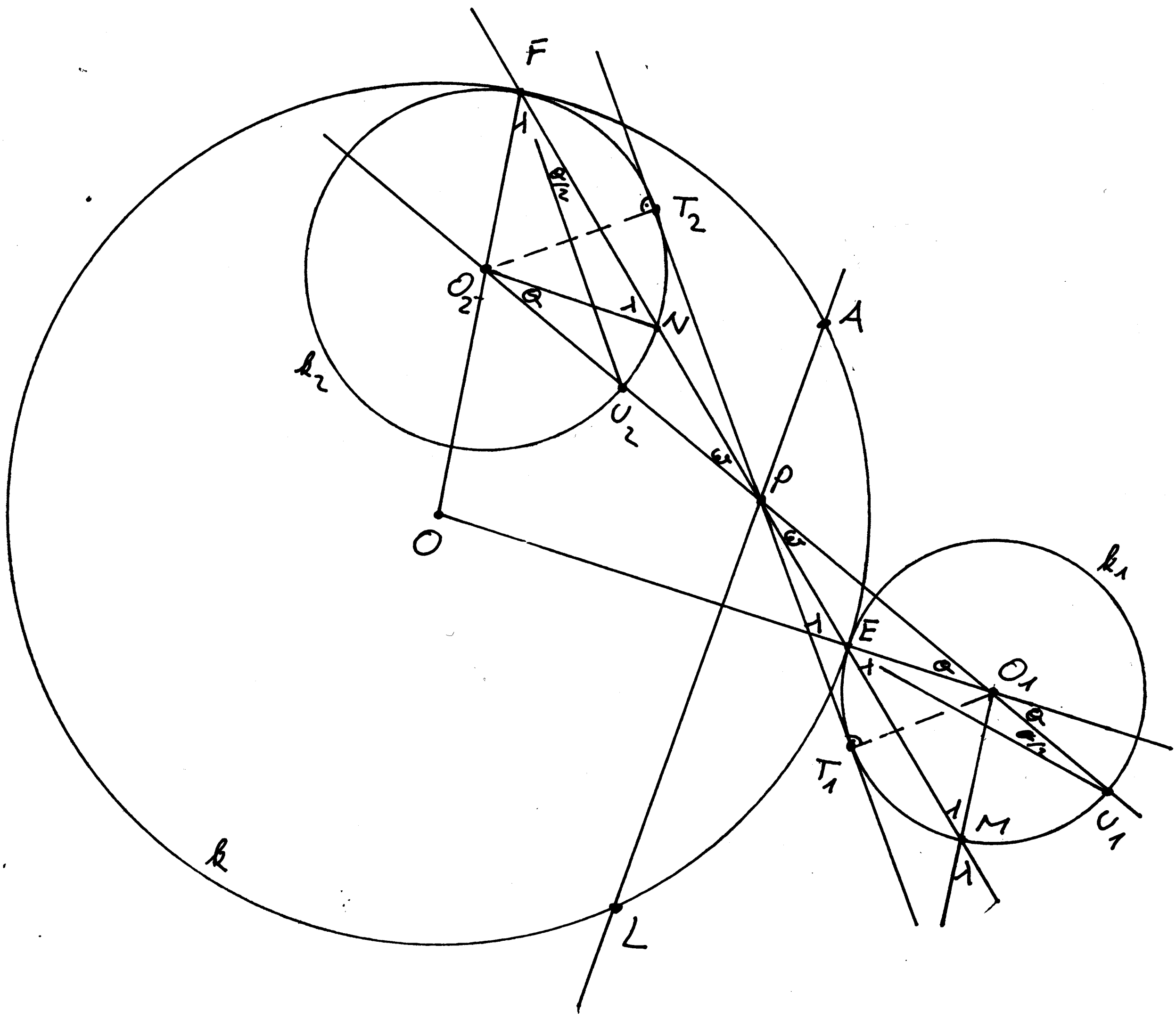
(#) Dati su krugovi $k_1(O_1,r_1)$ i $k_2(O_2,r_2)$ $(r_1<r_2)$ i tačka A. Konstruisati krug k koji će prolaziti kroz tačku A i dodirivati krugove k_1 i k_2 kao na sljedećoj skici:



Rj.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je $k(O,r)$ traženi krug koji prolazi kroz tačku A i dodiruje date krugove $k_1(O_1,r_1)$ i $k_2(O_2,r_2)$ $(r_1<r_2)$ redom u tačkama E i F. Kako su E i F dodirne tačke krugova primjetimo da imamo sljedeća dva poretka $O-E-O_1$ i $O-O_2-F$.
Neka je $p(E,F)\cap k_2=\{F,N\}$ i $p(E,F)\cap k_1=\{E,M\}$: $F-N-E-M$,

$p(O_1,O_2)\cap k_1=\{U_1\}$ i $p(O_1,O_2)\cap k_2=\{U_2\}$: $O_2-U_2-O_1-U_1$,

$\{P\}=p(O_1,O_2)\cap p(E,F)$

(kako O_1, O_2, E i F pripadaju nekim od krugova k_1 i k_2 primijetimo da je poredak U_2-P-O_1 i $N-P-E$.

Trouglovi ΔO_1EM, ΔOEF i ΔO_2FN su jkk. pa imamo

$$\measuredangle O_1EM\cong\measuredangle O_1ME\cong\measuredangle OEF\cong\measuredangle OFN\cong\measuredangle O_2FN\cong\measuredangle O_2NF=\lambda$$

$\Rightarrow$ $p(O,O_1)\parallel p(O_2,N)$ i $p(O_1,M)\parallel p(F,O)$

(imamo podudarne uglove na transferzali $p(E,F)$)).

Označimo sa θ ugao $\measuredangle NO_2U_2$. To je centralni periferijski ugao nad tetivom NU_2. Njemu odgovara periferijski ugao $\measuredangle U_2FN=\frac{\theta}{2}$.

Kako je $p(O_2,N)\parallel p(E,O_1)$ i $p(O_1,O_2)$ njihova transferzala imamo $\measuredangle NO_2U_2\cong\measuredangle PO_1E=\theta$ $\Rightarrow$ $\measuredangle O_1U_1E=\frac{\theta}{2}$.

Sad možemo pokazati da su ΔFU_2P i ΔU_1EP slični

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle U_1PE\cong\measuredangle FPU_2=\omega\\ \measuredangle PU_1E\cong\measuredangle PFU_2=\frac{\theta}{2}\\ \measuredangle U_1EP\cong\measuredangle FU_2P\end{array}\right\}\overset{\text{st. UUU}}{\Longrightarrow}\quad \Delta PU_1E\sim\Delta PFU_2$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{PE}{PU_2}=\frac{PU_1}{PF}\quad\Rightarrow\quad PE\cdot PF=PU_1\cdot PU_2 \quad\ldots(1)$$

Neka je $p(P,A)\cap k=\{A,L\}$.

Možemo primijetiti $PA\cdot PL=PE\cdot PF\quad\ldots(2)$

(1) i (2) $\Rightarrow$ $PU_1\cdot PU_2=PA\cdot PL$ $\Rightarrow$ $PL=\dfrac{PU_1\cdot PU_2}{PA}$

Da bi smo konstruisali tačku L potrebno je konstruisati tačku P. Primijetimo $\Delta PO_1E\sim\Delta PO_2N$ i $\Delta PO_1M\sim\Delta PFO_2$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{PO_1}{PO_2}=\dfrac{PE}{PN}=\dfrac{O_1E}{O_2N}=\dfrac{r_1}{r_2}\\[2ex] \dfrac{PO_1}{PO_2}=\dfrac{PM}{PL}=\dfrac{O_1M}{O_2F}=\dfrac{r_1}{r_2}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

P je centar homotetije koja kružnicu k_1 preslikava u k_2 sa koeficijentom $\frac{r_1}{r_2}$

Neka je $p(P,T_1)$ tangenta na kružnicu k_1. Kako je P centar homotetije $p(P,T_2)$ je tangenta i na kružnicu k_2. Sad tačku P možemo konstruisati, pa time i tačku L. Imamo tačke A, L i kružnicu k_1 pa smo ovaj problem sveli na 3. Apolonijev problem.