Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 05.07.2011.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija 2**

Zadatak br. 1

a) Ako jednakostraničnom trouglu $\triangle ABC$ (stranice a) svaku stranicu produžimo za a, dobijemo trougao $\triangle A_1B_1C_1$. U kojem omjeru se nalaze površine trouglova $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$.

b) Neka je I centar upisanog kruga $\triangle ABC$ ($AB < BC$), tačka S centar opisanog kruga k oko trougla $\triangle ABC$, M sredina stranice AC i neka je tačka P na luku AC (kojem ne pripada tačka B) kruga k takva da je $\triangle PAI$ jkk, da važi poredak $P - M - S$ i da je $PM \perp AC$. Ako je tačka N presječna tačka poluprave $pp[P, S)$ i kruga k dokazati da je $\triangle AMP \sim \triangle NAP$ i da je $\triangle PIN \sim \triangle PMI$.

c) Dat je krug $k_1(O_1, r_1)$ i u njegovoj unutrašnjosti krug $k_2(O_2, r_2)$ takav da dodiruje krug k_1 u tački P. Dokazati da su tačke O_1, O_2 i P kolinearne.

d) Date su prave t, q i s takve da $q \perp t$, $s \perp t$, $s \cap t = \{Q\}$ i $q \cap t = \{P\}$. Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ takvi da je $O_1 \in s$, $s \cap k_1 = \{M, N\}$ i $Q - M - N$, $O_2 \in q$, k_2 dodiruje krug k_1 u tački E i k_1 dodiruje pravu t u tački P. Dokazati da je $PN \cap O_1O_2 = \{E\}$.

e) Date su duži a i b ($b < 1 < a$). Nacrtati duž x ako je $x\sqrt{b} = \dfrac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} + a^2$.

Zadatak br. 2

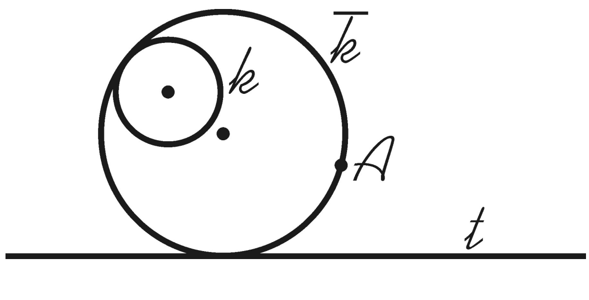
U ravni su date dvije tačke i prava. Konstruisati trougao, tako da se podnožja dvije njegove visine poklapaju sa datim tačkama, a stranica koja odgovara trećoj visini leži na datoj pravoj.

Zadatak br. 3

Dokazati da u svakom trouglu $\triangle ABC$ rastojanje od centra opisanog kruga trougla do stranice trougla BC je dva puta manje od rastojanja tačke presjeka visina do tjemena A.

Zadatak br. 4

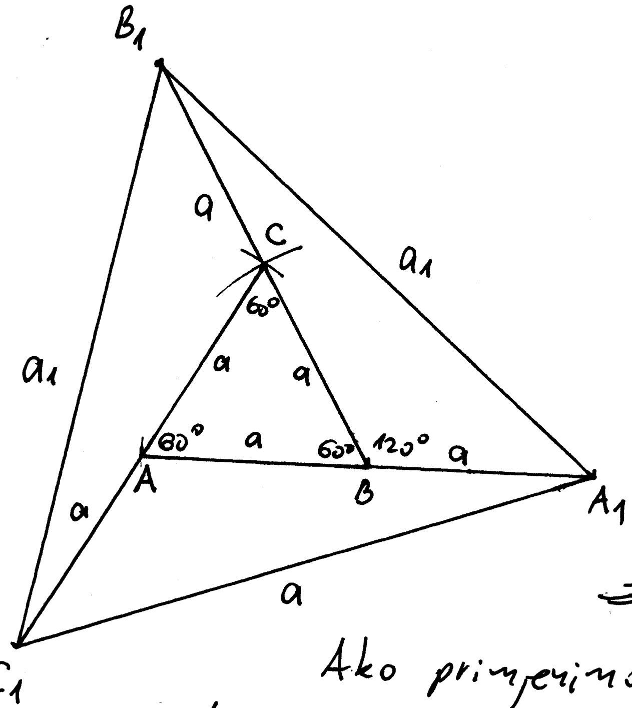
Dati je krug $k(O, r)$, tačka A i prava t. Konstruisati krug $\bar{k}(\bar{O}, \bar{r})$ koji prolazi kroz tačku A i dodiruje krugove k i pravu t kao na skici.



(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(#) Ako jednakostraničnom trouglu ΔABC (stranice a) svaku stranicu produžimo za a, dobijemo trougao $\Delta A_1B_1C_1$. U kojem omjeru se nalaze površine trouglova ΔABC i $\Delta A_1B_1C_1$?

Rj.



Uvedimo oznake kao sa slike. Dužinu stranice a_1 ćemo odrediti na dva načina.

I način

Primjetimo da kako je ΔABC jks to $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 60°$

$\Rightarrow \sphericalangle B_1BA_1 = 120°$.

Ako primjenimo kosinusnu teoremu na stranicu a_1 u ΔB_1BA_1 imamo

$$a_1^2 = (2a)^2 + a^2 - 2(2a)\cdot a \cdot \cos 120° = 4a^2 + a^2 - 4a^2\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 7a^2$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = a\sqrt{7}$$

II način

Posmatrajmo ΔACB_1 i neka je CE visina tog trougla

$$\left.\begin{array}{l} AC \overset{\sim}{=} CB_1 \\ CE \overset{\sim}{=} CE \\ \sphericalangle CEA \overset{\sim}{=} \sphericalangle CEB_1 = 90° \end{array}\right\} \underset{\substack{\text{(ugao} \\ \text{naspram} \\ \text{veće str.)}}}{\overset{SSU}{\Longrightarrow}} \Delta AEC \overset{\sim}{=} \Delta B_1EC$$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle ECA \overset{\sim}{=} \sphericalangle B_1CE = 60°$$

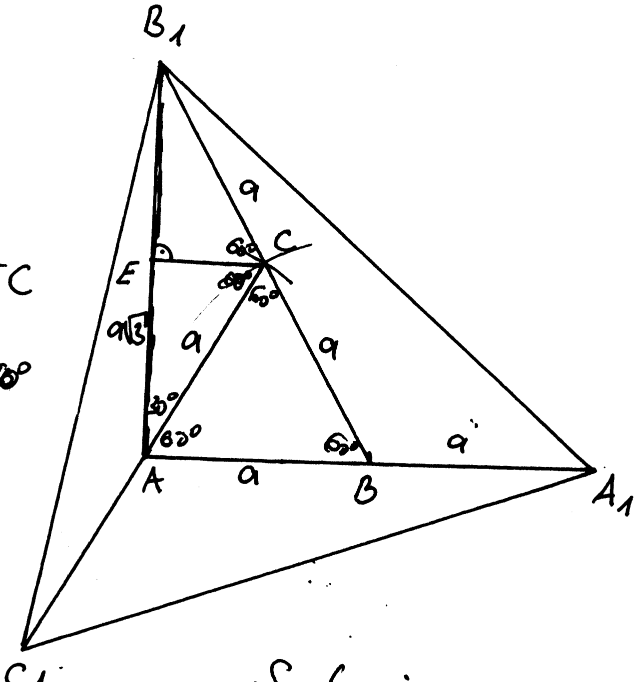
$$(\sphericalangle ACB = 120°)$$

$\Rightarrow \sphericalangle CAE = 30° \Rightarrow \sphericalangle A_1AB_1 = 90°$

ΔABB_1 pravougli $\overset{\text{Pit. teor.}}{\Longrightarrow} AB_1^2 = 3a^2$

ΔA_1AB_1 pravougli $\overset{\text{Pit. teor.}}{\Longrightarrow} A_1B_1^2 = 7a^2$

$\Rightarrow \quad a_1 = a\sqrt{7}$



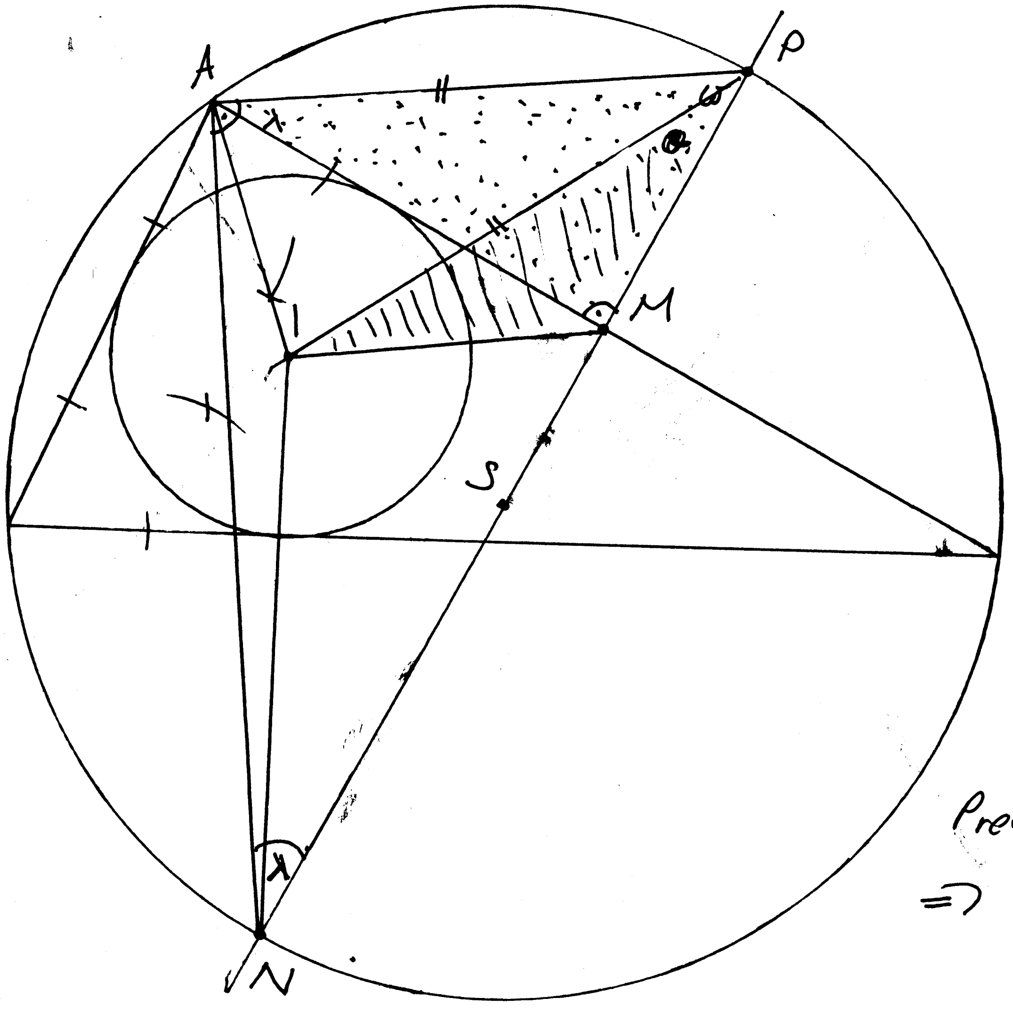
Sad imamo:

$$P_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{a_1\cdot h}{2} = \frac{a_1\sqrt{a_1^2 - \frac{a_1^2}{4}}}{2} = \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} = 7\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 7\,P_{\Delta ABC}$$

$$P_{\Delta ABC} : P_{\Delta A_1B_1C_1} = 1 : 7$$

(#) Neka je I centar upisanog kruga ΔABC ($AB < BC$), tačka S centar opisanog kruga k oko trougla ΔABC, M sredina stranice AC i neka je tačka P na luku $\widehat{AC}$ (kojem ne pripada tačka B) kruga k takva da je ΔPAI jkk, da važi poredak P-M-S i da je $PM \perp AC$. Ako je tačka N presječna tačka poluprave $[P,S)$ i kruga k dokazati da je $\Delta AMP \sim \Delta NAP$ i da je $\Delta PIM \sim \Delta PMI$.

Rj.



Posmatrajmo ΔAMP i NAP. Ugao $\measuredangle APM \cong \measuredangle APN = \omega$ im je zajednički, imaju po jedan ugao od $90°$ tj.

$\measuredangle AMP = \measuredangle NAP = 90°$

($\measuredangle NAP$ je ugao nad prečnikom). Prema tome i treći ugao im je podudaran $\measuredangle PAM \cong \measuredangle ANP = \lambda$.

Prema slučaju UUU

$\Rightarrow \Delta AMP \sim \Delta NAP$

$\Downarrow$ q.e.d.

$$\frac{AP}{NP} = \frac{MP}{AP}$$

Kako je ΔAPI jkk to je $AP \cong PI$.

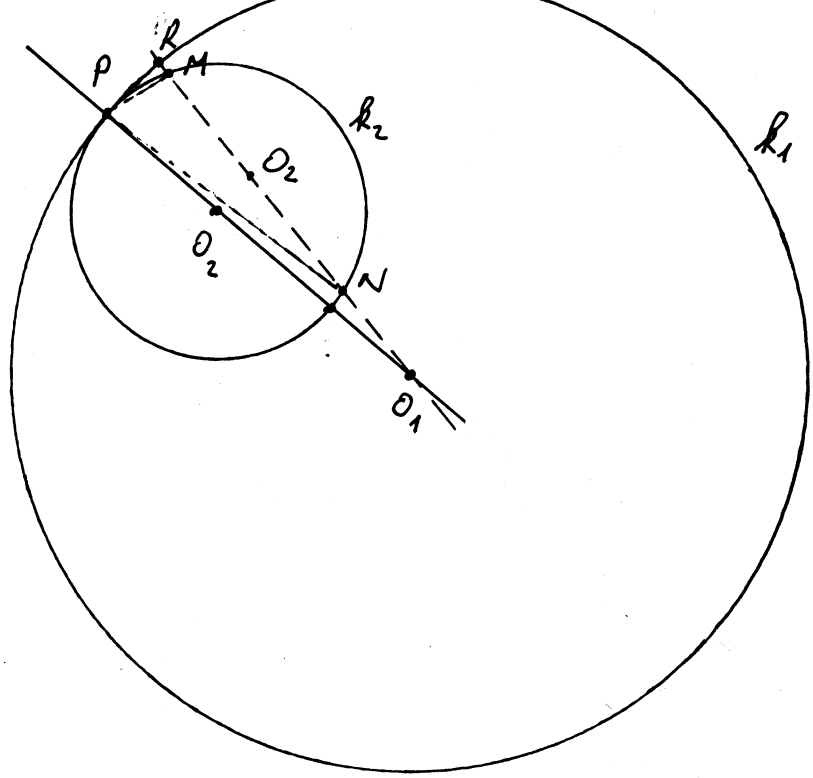
Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{PI}{NP} = \dfrac{MP}{IP} \\ \measuredangle IPN \cong \measuredangle MPI = \theta \\ \text{(zajednički ugao)} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(sličn. SUS)}} \Delta PIN \sim \Delta PMI$$

q.e.d.

(#) Dat je krug $k_1(O_1, r_1)$ i u njegovoj unutrašnjosti krug $k_2(O_2, r_2)$ takav da dodiruje krug k_1 u tački P. Dokazati da su tačke O_1, O_2 i P kolinearne.

Rj.



Posmatrajmo pravu $p(O_1, P)$. Ako tačka O_2 ne bi pripadala ovoj pravoj imali bi da $p(O_1, O_2) \cap k_2 = \{M, N\}$ gdje je MN prečnik kruga k_2. Recimo da je poredak O_1-N-O_2-M. Neka je R tačka na k_1 t.d. $N-M-R$.

Ugao nad prečnikom je prav tj. $\angle MPN = 90°$. Kako je $\angle MPO_1 > \angle MPN \Rightarrow \angle MPO_1$ je tup, pa u $\triangle MPO_1$ stranica MO_1 je najveća tj. $MO_1 > PO_1$ #kontradikcija

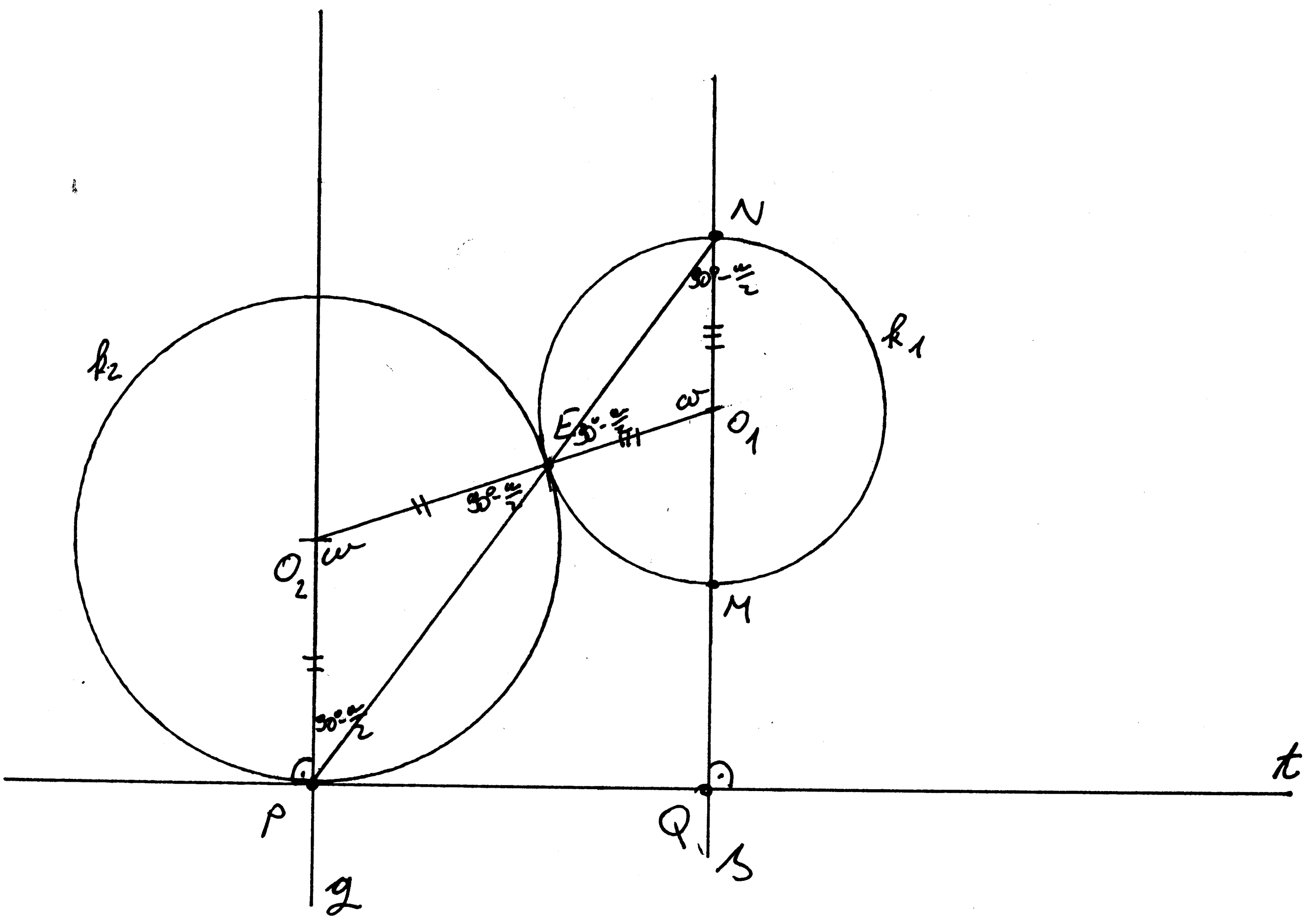
(${PO_1}$ i RO_1 su poluprečnici kruga k_1 i kako je O_1-M-R to je $MO_1 < PO_1$)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome tačke O_1, O_2 i P su kolinearne

q.e.d.

(7) Date su prave t, g i s takve da $g \perp t$, $s \perp t$, $s \cap t = \{Q\}$ i $g \cap t = \{P\}$. Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ takvi da $O_1 \in s$, $s \cap k_1 = \{M, N\}$ i $Q - M - N$, $O_2 \in g$, k_2 dodiruje krug k_1 u tački E i k_1 dodiruje pravu t u tački P. Dokazati da je $PN \cap O_1O_2 = \{E\}$.

Rj.



Prvo primjetimo kako je $g \perp t$ i $s \perp t$ to je $g \parallel s$. Dalje krugovi k_1 i k_2 se dodiruju u tački E pa imamo da $E \in p(O_1, O_2)$ i $O_1 - E - O_2$. Kako je $g \parallel s$ i $p(O_1, O_2)$ transferzala to $\measuredangle PO_2O_1 \overset{=}{} \measuredangle NO_1O_2 = \omega$.
Posmatrajmo trouglove ΔPO_2E i ΔNO_1E.

ΔPO_2E jkk i $\measuredangle PO_2E = \omega \Rightarrow \measuredangle O_2PE = \measuredangle O_2EP = 90° - \frac{\omega}{2}$.

ΔEO_1N jkk i $\measuredangle NO_1E = \omega \Rightarrow \measuredangle NEO_1 = \measuredangle ENO_1 = 90° - \frac{\omega}{2}$

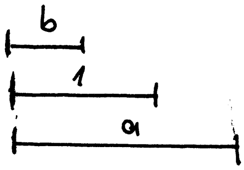
Na pravoj $p(O_1, O_2)$ imamo $E \in O_1O_2$ i $\measuredangle O_2EP = \measuredangle O_1EN = 90° - \frac{\omega}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow E \in p(P, N)$ tj. $O_1O_2 \cap PN = \{E\}$ q.e.d.

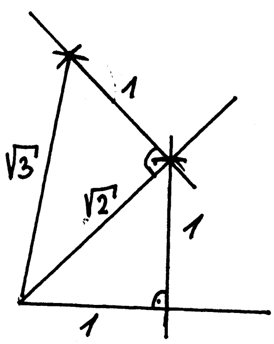
(#) Date su duži a i b $(b<1<a)$. Nacrtati duž x ako je

$$x\sqrt{b} = \frac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} + a^2 .$$

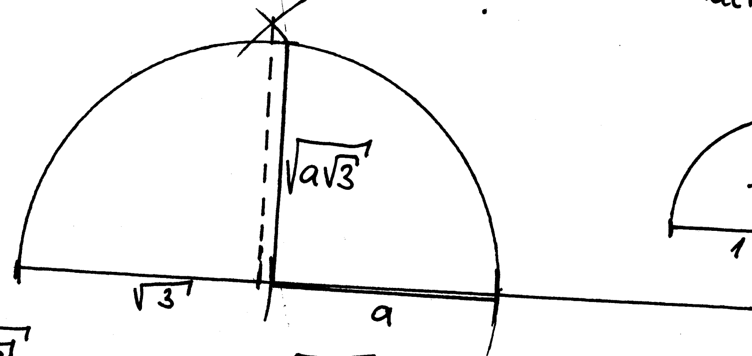
R:



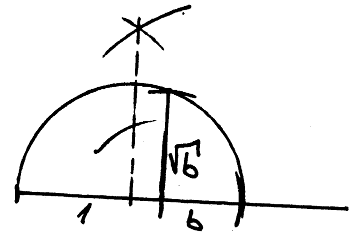
Nacrtajmo duži $\sqrt{3}$ i $\sqrt{2}$.



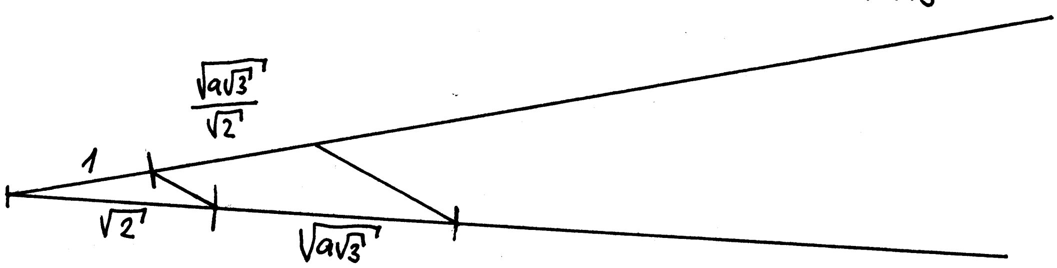
Nacrtajmo duž $\sqrt{a\sqrt{3}}$.



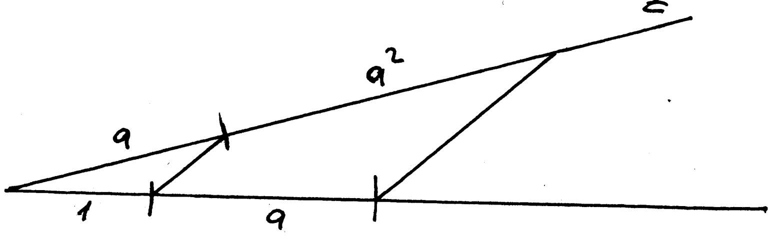
Nacrtajmo duž $\sqrt{b}$.



Nacrtajmo duž $\frac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$. $\quad Y = \frac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a\sqrt{3}}} = \frac{1}{Y}$

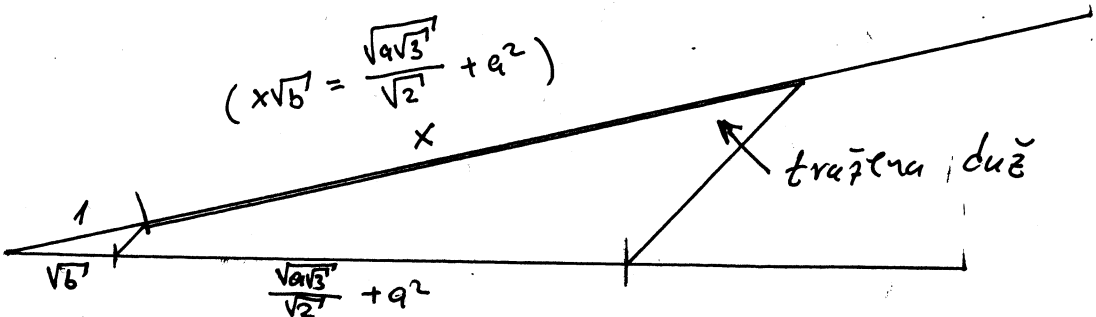


Nacrtajmo duž a^2. $\quad z = a \cdot a \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{a}{z}$



Nacrtajmo duž $\frac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} + a^2$

Na kraju, nacrtajmo duž $x = \frac{\frac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} + a^2}{\sqrt{b}}$. $\left(\frac{\sqrt{b}}{\frac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} + a^2} = \frac{1}{x} \right)$

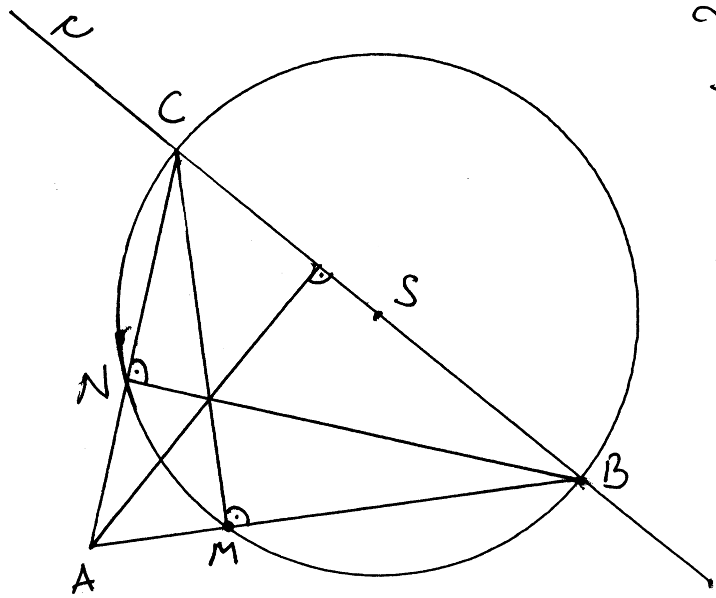


(#) U ravni su date dvije tačke i prava. Konstruisati trougao, tako da se podnožja dvije njegove visine poklapaju sa datim tačkama, a stranica koja odgovara trećoj visini leži na datoj pravoj.

Rj:

Analiza

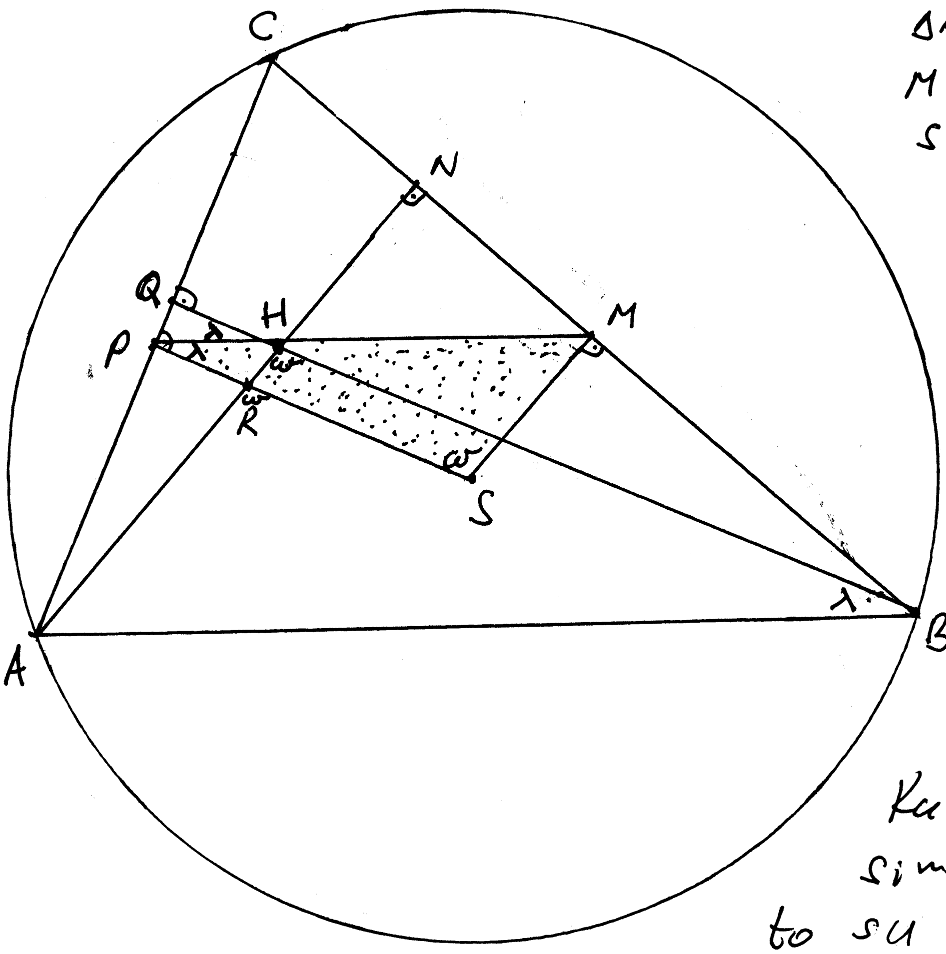
Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je c data prava koja sadrži stranicu BC, a M i N date tačke takve da su CM i BN visine trougla $\triangle ABC$.



Kako je $\measuredangle BNC \cong \measuredangle BMC = 90°$ primjetimo da je četverougao $\square BCNM$ tetivni. Kako su trouglovi $\triangle MBC$ i $\triangle NBC$ pravougli to tačka S, centar opisanog kruga oko trouglova $\triangle MBC$ i $\triangle NBC$ leži na sredini stranice BC. Primjetimo da je MN tetiva kruga pa tačka S pripada simetrali te tetive. Prema tome tačka S je presječna tačka simetrale duži MN i date prave c pa je možemo konstruisati. Poslije toga nije teško konstruisati i $\triangle ABC$.

(#) Dokažite da u svakom trouglu ΔABC rastojanje od centra opisanog kruga trougla do stranice trougla BC je dva puta manje od rastojanja tačke preseka visina do temena A.

Rj.



postavka zadatka

ΔABC, S centar opisanog kruga, M ortogonalna projekcija tačke S na BC, H presek visina trougla

$\Rightarrow AH = 2MS$

Neka su BQ i AN visine redom na stranice AC i BC, i neka je tačka P ortogonalna projekcija tačke S na AC.

Kako je S presek simetrala stranica ΔABC to su P i M sredine stranica AC i BC.

PM je srednja linija trougla $\Delta ABC \Rightarrow PM \parallel AB$ i $PM = \frac{1}{2} AB$.

Označimo sa $\lambda = \measuredangle ABQ$.

$p(A,B) \parallel p(P,M)$ i $p(B,Q)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle PHQ = \lambda$

$p(B,Q) \parallel p(P,S)$ i $p(M,P)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle MPS = \lambda$.

Označimo sa $\omega = \measuredangle AHB$.

$p(B,Q) \parallel p(P,S)$ i $p(A,N)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle ARS = \omega$

$p(A,N) \parallel p(M,S)$ i $p(P,S)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle PSM = \omega$.

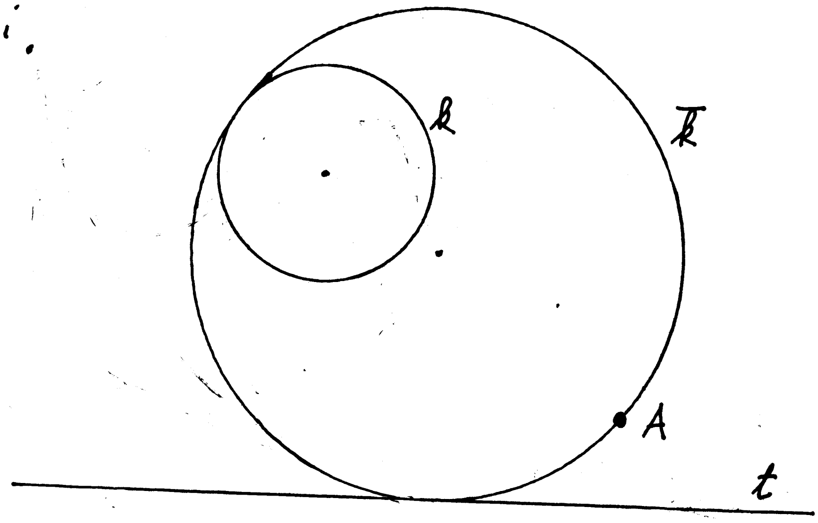
$\left.\begin{array}{l} \measuredangle ABH \cong \measuredangle MPS = \lambda \\ \measuredangle AHB \cong \measuredangle PSM = \omega \\ \measuredangle BAH \cong \measuredangle PMS \\ \text{(kao treći ugao)} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(slič. UUU)}} \Delta ABH \sim \Delta MPS$

$\Downarrow$

$\frac{AB}{MP} = \frac{AH}{MS} \xrightarrow{MP = \frac{1}{2} AB} AH = 2MS$

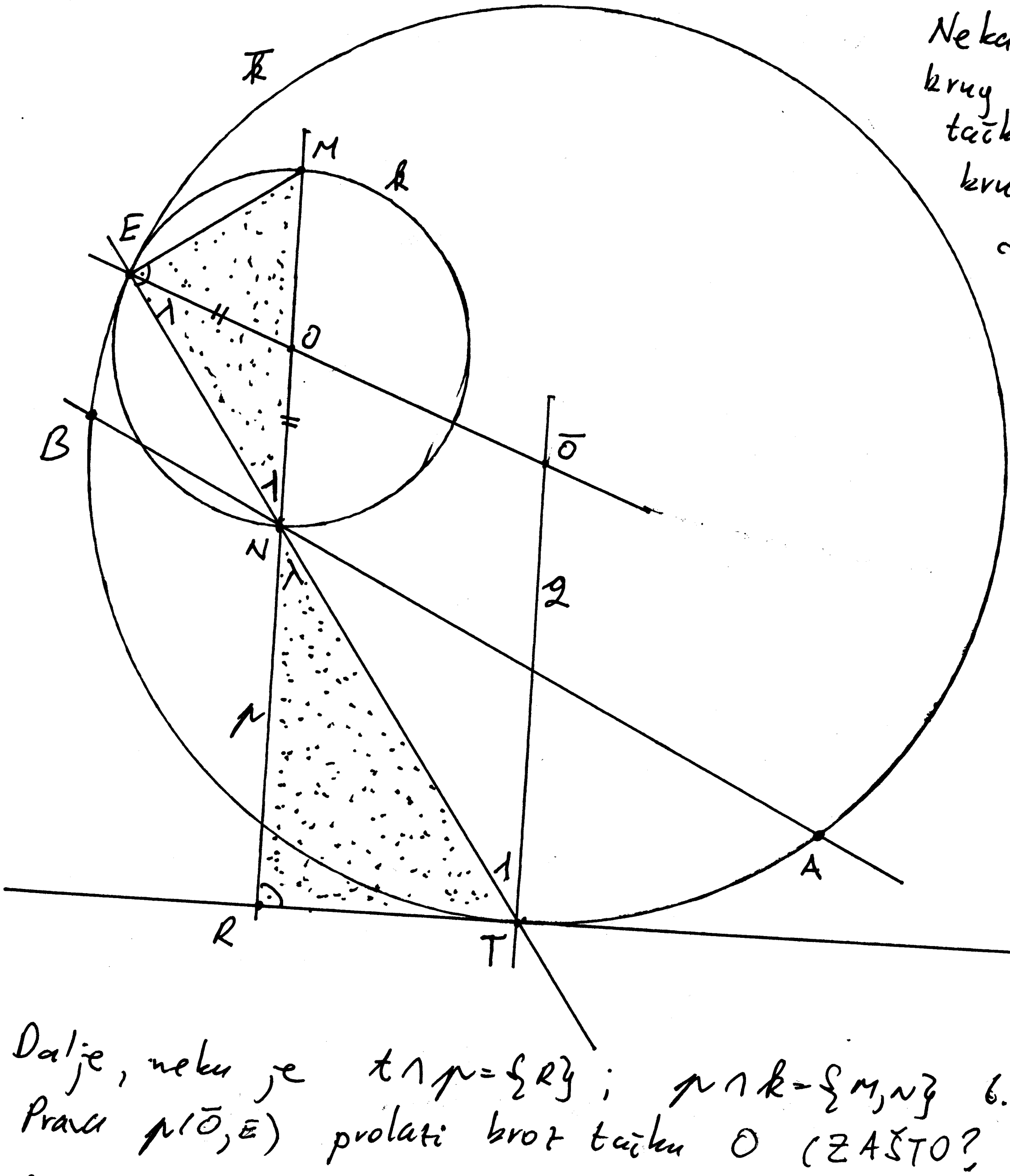
q.e.d.

(#) Dat je krug $k(O,r)$, tačka A i prava t. Konstruisati krug $\bar{k}(\bar{O},\bar{r})$ koji prolazi kroz tačku A, i dodiruje krug k i pravu t kao na skici.



Rj. Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je $\bar{k}$ traženi krug koji prolazi kroz tačku A, dodiruje dati krug k u tački E i dodiruje datu pravu t u tački T. Označimo sa p i q prave koje su okomite na t i koje sadrže redom tačke O i $\bar{O}$. Jasno je da $q \cap t = \{T\}$.

Dalje, neka je $t \cap p = \{R\}$ i $p \cap k = \{M, N\}$ t.d. $R-N-M$. Prava $p(\bar{O}, E)$ prolazi kroz tačku O (ZAŠTO? Objasniti ovo). Posmatrajmo sad trouglove ΔEON i $\Delta E\bar{O}T$.

Trougao $\Delta E\bar{O}T$ je jednakokraki ($E\bar{O} \cong T\bar{O}$) pa je $\measuredangle \bar{O}ET \cong \measuredangle \bar{O}TE = \lambda$. Isto tako ΔEON je jkk ($OE \cong ON$) pa je $\measuredangle OEN \cong \measuredangle ONE = \lambda$. Želimo pokazati da $N \in p(E,T)$. Kako je $p \parallel q$ i $p(N,T)$ transferzala to je $\measuredangle TNR = \lambda$

Sad na pravoj p imamo $\measuredangle TNR = \lambda = \measuredangle ONE \Rightarrow N \in p(E,T)$

Posmatrajmo ΔRTN i ΔENM. U njima imamo po jedan ugao od $90°$, ugao λ pa je i treći ugao podudaran.

$$\overset{(\text{slič. UUU})}{\Longrightarrow} \Delta RTN \sim \Delta ENM$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{NT}{NM} = \frac{NR}{NE} \Rightarrow NT \cdot NE = NM \cdot NR \quad \ldots (1)$$

Posmatrajmo pravu $p(N,A)$. Neka je $p(N,A) \cap k = \{A, B\}$ t. d. $B - N - A$. Ako posmatramo krug k imamo

$$NA \cdot NB = NT \cdot NE \quad \ldots (2)$$

$$(1) \text{ i } (2) \Rightarrow NA \cdot NB = NM \cdot NR$$

$$NB = \frac{NM \cdot NR}{NA} \quad \ldots (3)$$

Sad, kako su nam poznate tačke A, N, M, R to možemo prema (3) možemo konstruisati tačku B pa smo naš problem sveli na konstrukciju kruga kroz dvije tačke A i B tako da dodiruje datu pravu. Ovaj problem smo već imali, nije teško konstruisati pomoćni krug i uz pomoć njega dobiti tačku T.

Prema tome, traženi krug možemo konstruisati.