Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 10.07.2010.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija 2**

Zadatak br. 1 (20 boda)

a) Dokazati da težište trougla dijeli težišnicu u omjeru 2:1.

b) Konstruisati vanjsku zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

c) Date su duži a i b. Nacrtati duž x ako je $x\sqrt{2}+1=\dfrac{\sqrt{3a}-a^2}{\sqrt{b}}$, gdje je $a<1<b$.

d) Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku i dodiruje datu pravu u datoj tački.

e) Date su dvije podudarne kružnice k_1 i k_2 i tačka T. Kroz tačku T konstruisati pravu na kojoj date kružnice odsjecaju podudarne tetive.

Zadatak br. 2 (20 bodova)

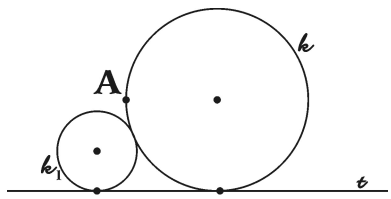
Date su tačke A, M i N. Konstruisati paralelogram $\square ABCD$, tako da je M sredina stranice BC, a N sredina stranice CD.

Zadatak br. 3 (20 bodova)

U trouglu $\triangle ABC$, AP polovi $\measuredangle BAC$, sa tačkom P na BC, i duž BQ polovi $\measuredangle ABC$, sa Q na CA. Zna se da je $\measuredangle BAC = 60°$ i da je $AB+BP=AQ+QB$. Naći uglove u trouglu.

Zadatak br. 4 (20 bodova)

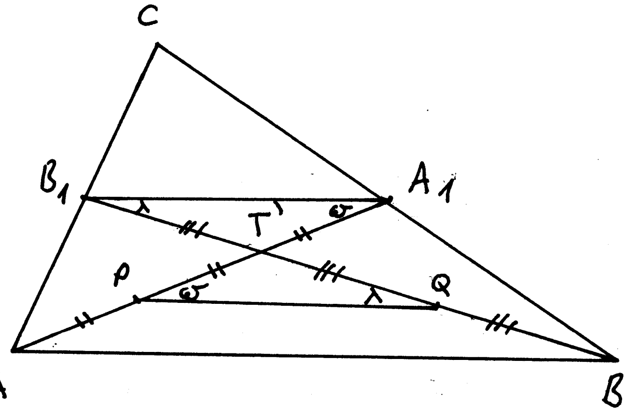
Dati je krug $k_1(O_1, r_1)$, prava t i tačka A. Konstrisati krug k koji će prolaziti kroz tačku A, dodirivati krug k_1 i pravu t kao na skici.

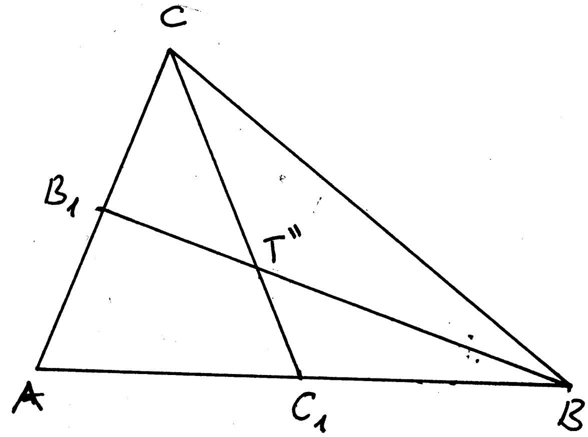


(Zadaci su skinuti sa stranice: \pf.unze.ba\nabokov
Za uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

Dokazati da težište trougla dijeli težišnice u omjeru 2:1.

Rj.





Neka su AA_1 i BB_1 težišnice u trouglu ΔABC i $\{T'\} = AA_1 \cap BB_1$.

A_1B_1 je srednja linija ΔABC pa $A_1B_1 \parallel AB$ i $A_1B_1 = \frac{1}{2} AB$.

Neka su P i Q sredine redom duži AT' i BT'.

PQ je srednja linija $\Delta ABT'$ pa $PQ \parallel AB$ i $PQ = \frac{1}{2} AB$

$\Rightarrow PQ \cong B_1A_1$. Dalje, posmatrajmo $\Delta PQT'$ i $\Delta B_1T'A_1$.

Ovi trouglovi su slični (imaju sva tri podudarna ugla

$$\Rightarrow \frac{PT'}{T'A_1} = \frac{QT'}{T'B_1} = \frac{PQ}{A_1B_1} = 1 \Rightarrow PT' \cong A_1T' \text{ i } QT' \cong T'B_1$$

Pa imamo $\frac{AT'}{T'A_1} = \frac{BT'}{T'B_1} = \frac{2}{1}$.

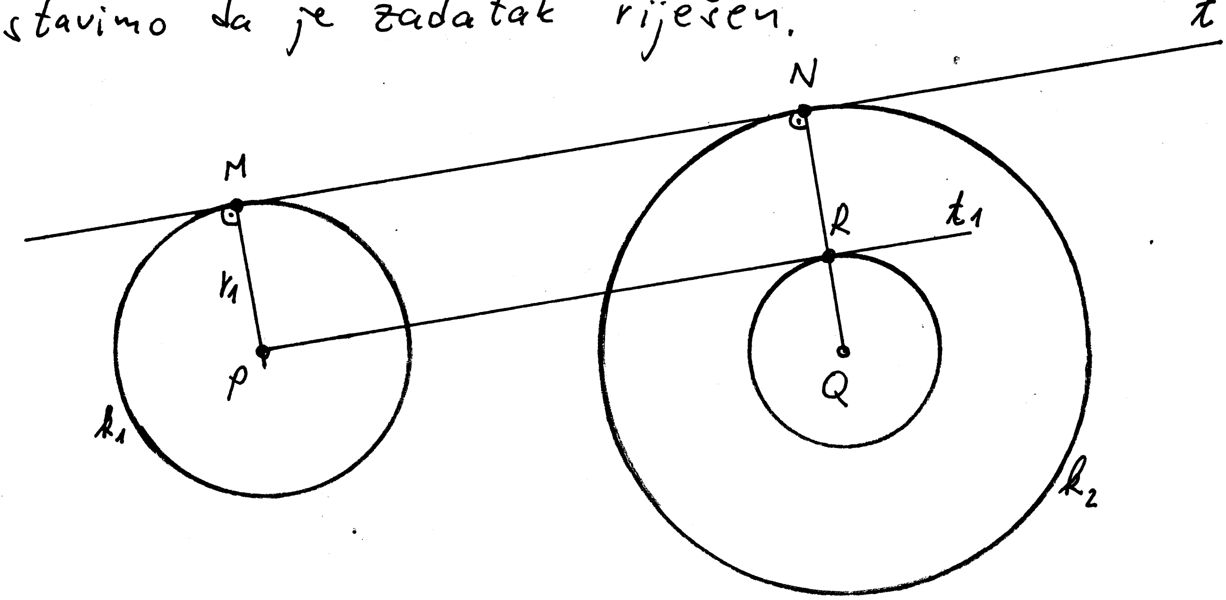
Na isti način ako pretpostavimo da se težišnice BB_1 i CC_1 sijeku u tački T'' bi dobili $\frac{CT''}{T''C_1} = \frac{BT''}{T''B_1} = \frac{2}{1}$.

Iz jedinstvenosti podjele duži BB_1 u datom omjeru slijedi da je $T' \equiv T''$ pa težište dijeli težišnicu u omjeru $2:1$.

(#) Konstruisati vanjsku zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su $k_1(P, r_1)$ i $k_2(Q, r_2)$ dvije date kružnice i neka je t njihova zajednička tangenta $(r_2 > r_1)$. Označimo sa M tačku dodira k_1 i t, a sa N tačku dodira k_2 i t.

$PM \perp t$ i $QN \perp t \Rightarrow p(P,M) \parallel p(Q,N)$

Neka je $t_1 \parallel t$, $t_1 \ni P$ i $t_1 \cap NQ = \{R\}$ $(NQ > PM)$.

Imamo da je $\square PRNM$ paralelogram (preciznije pravougaonik).

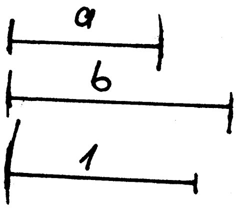
$QR = r_2 - r_1$, pa kako su tačke P i Q date mogu konstruisati tangentu t_1.

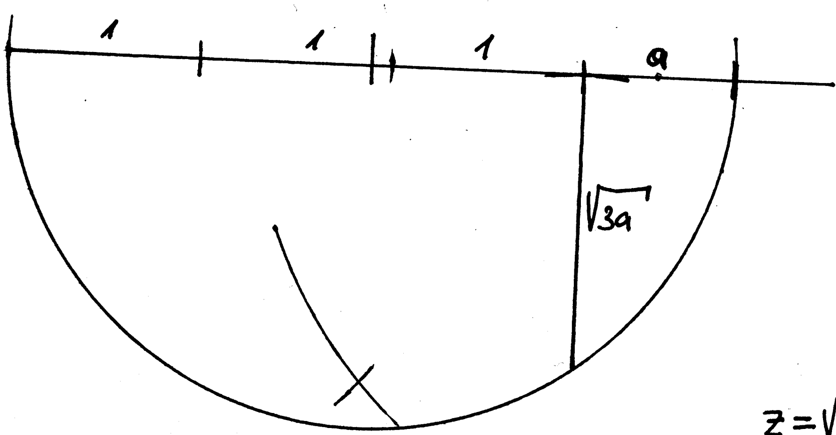
Tangenta t je paralelna sa t_1 i udaljena je od t_1 za dužinu r_1, pa je možemo konstruisati.

(#) Date su duži a i b. Nacrtati duž x ako je

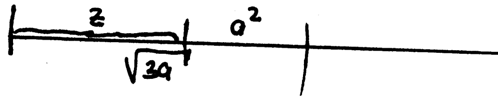
$$x\sqrt{2}+1=\frac{\sqrt{3a}-a^2}{\sqrt{b}}, \quad a<1<b.$$

Rj.





$z=\sqrt{3a}-a^2$

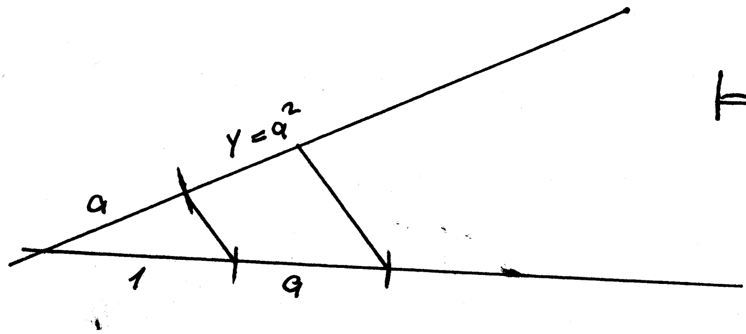


$Y=a^2$

$Y=a\cdot a$

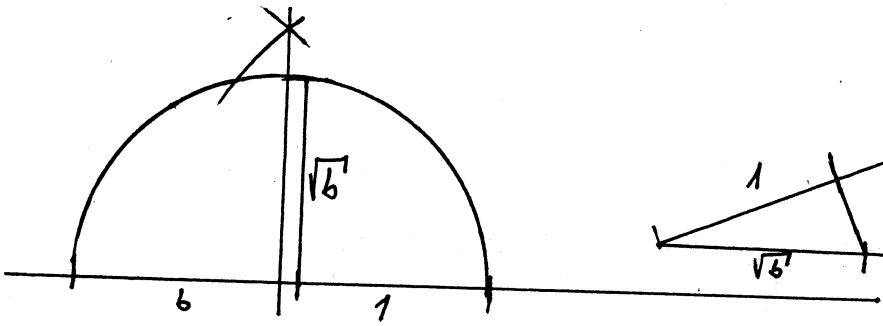
$\frac{Y}{a}=\frac{a}{1}$

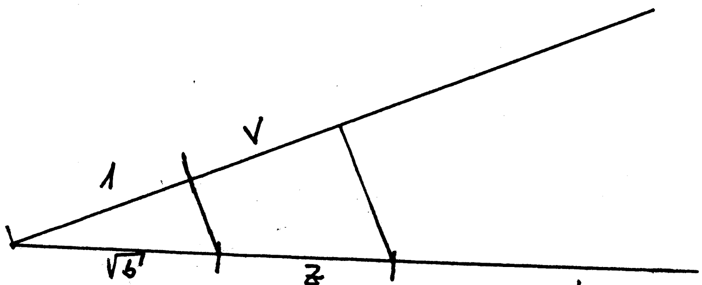
$\frac{1}{a}=\frac{a}{Y}$



$V=\frac{z}{\sqrt{b}}$

$\frac{\sqrt{b}}{z}=\frac{1}{V}$



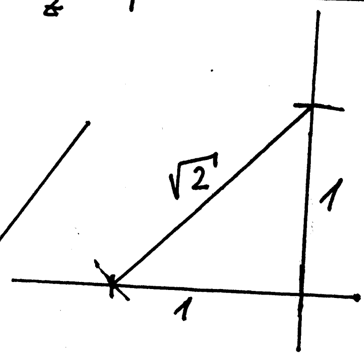


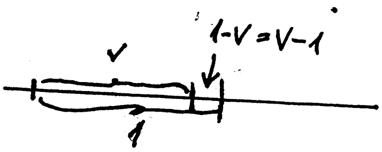
Sad imamo $x\sqrt{2}+1=V$

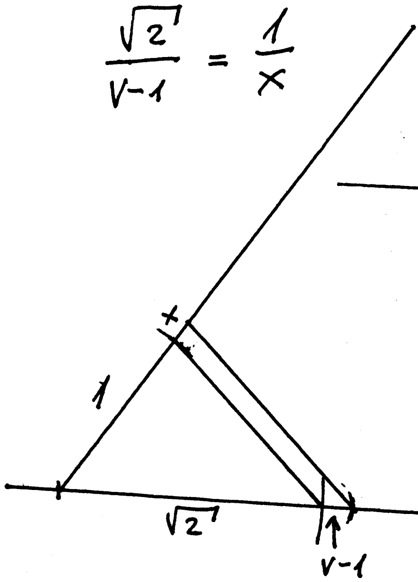
$x\sqrt{2}=V-1$

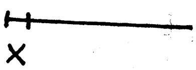
$x=\frac{V-1}{\sqrt{2}}$

$\frac{\sqrt{2}}{V-1}=\frac{1}{x}$





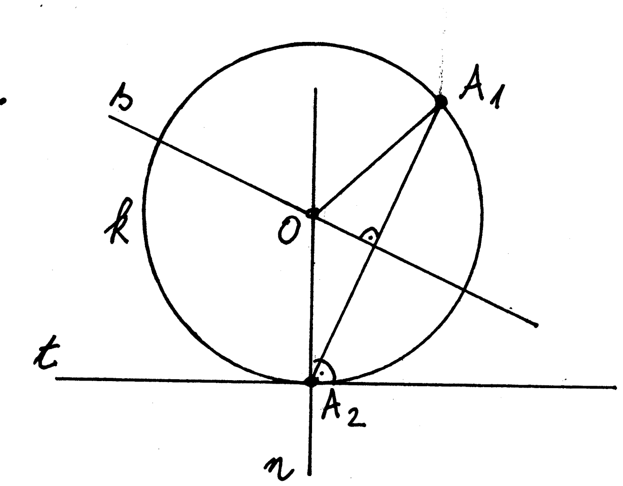




(#) Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku i dodiruje datu pravu u datoj tački.

Rj: <u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak rješen. Neka je data prava t tačke $A_2 \in t$ i $A_1 \notin t$, i neka je k tražena kružnica.

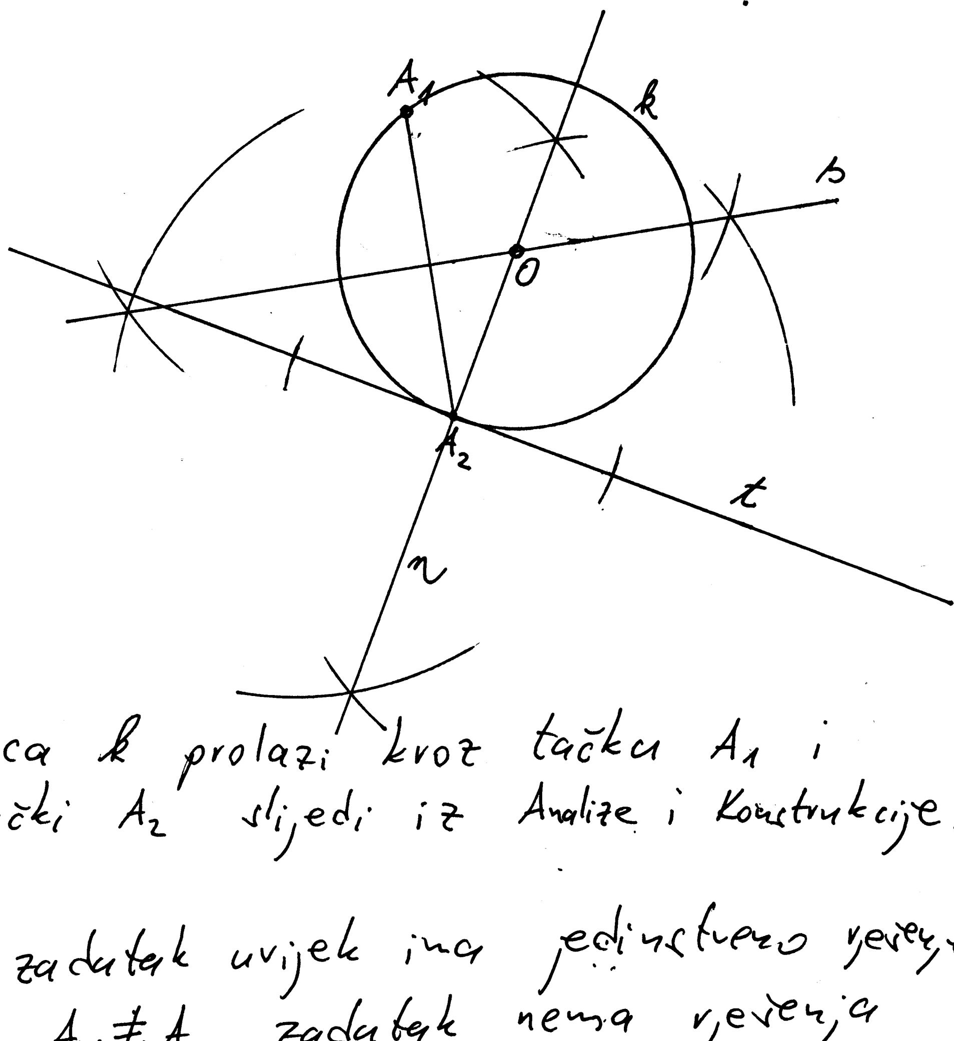


Primjetimo da je $p(O, A_2) \perp t$ gdje je O centar kružnice k i primjetimo da je $\Delta O A_2 A_1$ jkk. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $O \in s$ gdje je s simetrala stranice $A_1 A_2$.

Sad kako možemo konstruisati n i s to možemo konstruisati tačku O a time i traženu kružnicu k.

<u>Konstrukcija</u>

1. t, $A_2 \in t$, $A_1 \notin t$
2. pravu n: $n \perp t$ i $A_2 \in n$
3. pravu s: s simetrala $A_2 A_1$
4. $n \cap s = \{O\}$
5. $k(O, OA_2)$

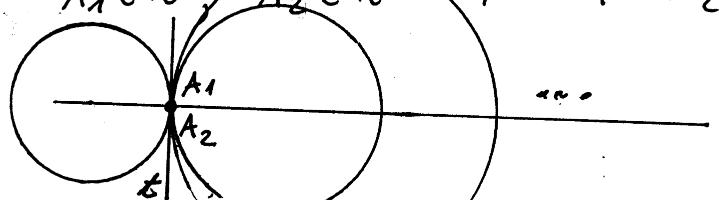


<u>Dokaz</u>

Da konstruisana kružnica k prolazi kroz tačku A_1 i dodiruje pravu t u tački A_2 slijedi iz Analize i Konstrukcije.

<u>Determinacija</u>

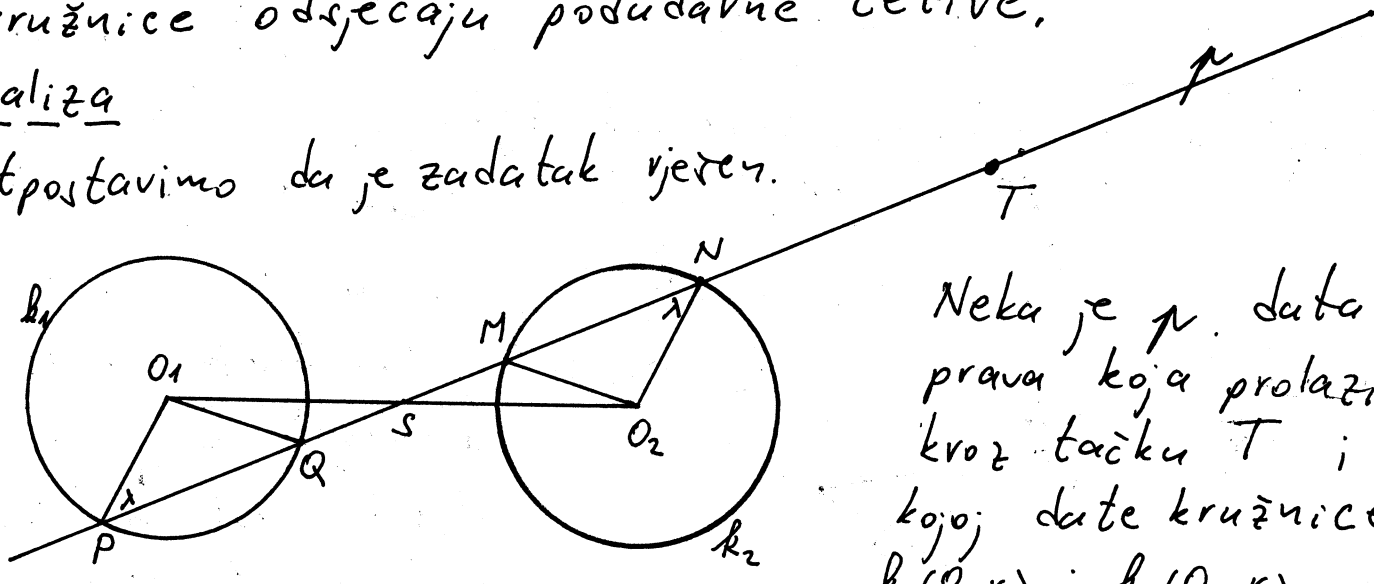
Ako je $A_1 \notin t$, $A_2 \in t$ zadatak uvijek ima jedinstveno rješenje
Ako $A_1 \in t$ i $A_2 \in t$, $A_1 \not\equiv A_2$ zadatak nema rješenja
Ako $A_1 \in t$, $A_2 \in t$ i $A_1 \equiv A_2$ zadatak ima ∞ mnogo rješenja



(#) Date su podudarne kružnice k_1 i k_2 i tačka T. Kroz tačku T konstruisati pravu na kojoj date kružnice odsjecaju podudarne tetive.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je p data prava koja prolazi kroz tačku T i kojoj date kružnice $k_1(O_1, r)$ i $k_2(O_2, r)$ odsjecaju podudarne tetive PQ i MN.

$\Delta PQO_1 \cong \Delta MO_2N$ (podud. SSS)

$\Downarrow$

$\sphericalangle O_1PQ \cong \sphericalangle MNO_2 = \lambda$. Neka je $\{S\} = p \cap O_1O_2$.

Sad imamo
$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle O_1SP \cong \sphericalangle NSO_2 \text{ (unakrsni)} \\ \sphericalangle SPO_1 \cong \sphericalangle SNO_2 = \lambda \\ PO_1 \cong NO_2 = r \end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow} \Delta PSO_1 \cong \Delta NSO_2 \Rightarrow O_1S \cong O_2S.$$

Prema tome S je sredina duži O_1O_2 pa pravu p sad nije teško konstruisati.

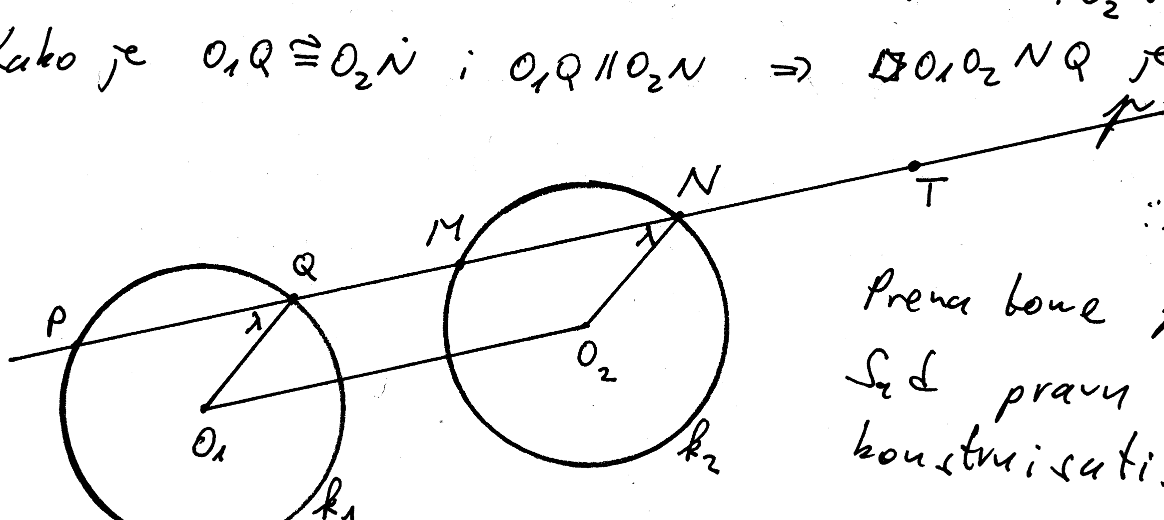
II način

Iz podudarnosti SSS $\Rightarrow$ $\Delta PQO_1 \cong \Delta MNO_2$

$\Downarrow$

$\sphericalangle O_1QP \cong \sphericalangle O_2NM = \lambda$.

Kako je $O_1Q \cong O_2N$ i $O_1Q \parallel O_2N$ $\Rightarrow$ $\square O_1O_2NQ$ je paralelogram.

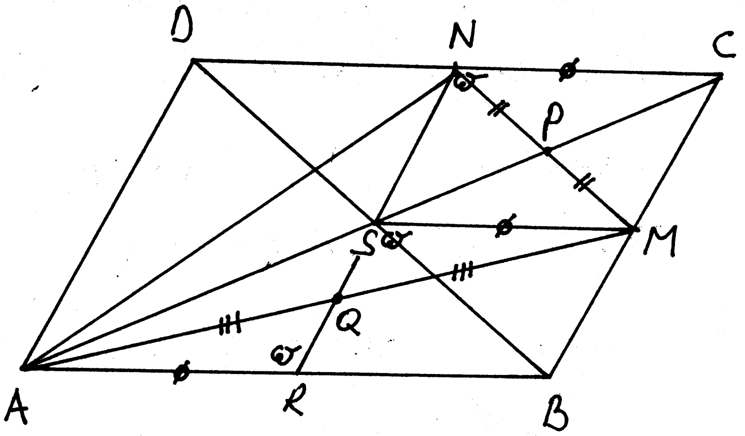


Prema tome $p \parallel O_1O_2$.
Sad pravu p možemo konstruisati.

(#) Date su tačke A, M i N. Konstruisati paralelogram $\square ABCD$, tako da je M sredina BC, a N sredina stranice CD.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Dat je paralelogram $\square ABCD$, gdje su M sredina BC i N sredina CD.

Neka je tačka S presjek dijagonala AC i BD.

Dijagonale u paralelogramu se polove pa je S sredina dijagonala AC i BD.

S sredina BD, N sredina CD $\overset{u\ \triangle BCD}{\Longrightarrow}$ SN sred. lin. $\Rightarrow SN \parallel p(B,C)$

S sredina BD, M sredina BC $\overset{u\ \triangle DBC}{\Longrightarrow}$ SM sred. lin $\Rightarrow SM \parallel p(C,D)$

pa je $\square SMCN$ paralelogram. Neka je $\{P\} = SC \cap MN$

$\Rightarrow$ P sredina MN i P sredina SC tj. $MP \cong NP$.

Neka je $\{R\} = p(N,S) \cap AB$. Tad $\left.\begin{array}{l} \angle ASR \cong \angle NSC \\ \angle ARS \cong \angle SNC = \omega \\ AS \cong SC \end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow} \triangle ARS \cong \triangle CNS \Downarrow AR \cong CN$ ...(*)

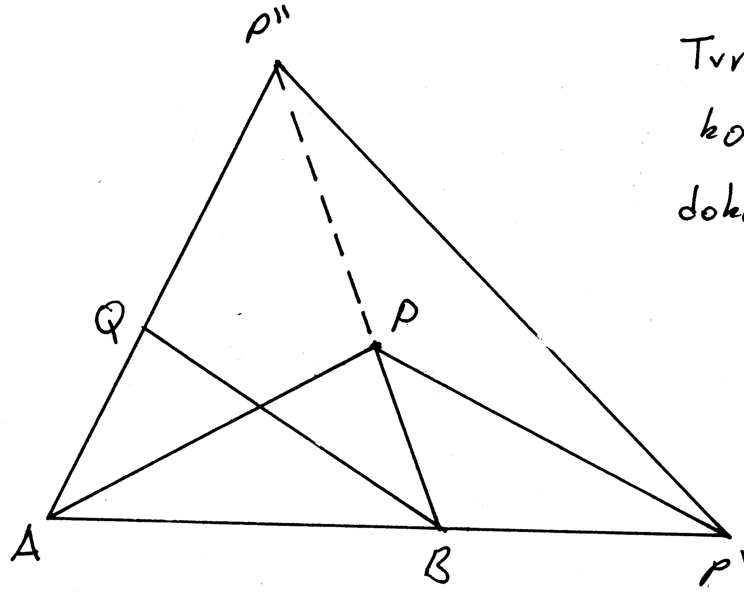
Neka je $\{Q\} = SR \cap AM$. Tada. $\left.\begin{array}{l} \angle AQR \cong \angle SQM \\ \angle QRA \cong \angle QSM = \omega \\ AR \cong SM \end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow} \triangle ARQ \cong \triangle MSQ \Downarrow AQ \cong QM$ ...(**)

Na osnovu (*) i (**) $\Rightarrow$ S težište $\triangle AMN$.

Tačku S možemo konstruisati, a time i $p(N,C)$ i $p(M,C)$. Sad nije problem dobiti tačke B i D a time i $\square ABCD$.

(#) U trouglu ΔABC, AP polovi $\measuredangle BAC$, sa tačkom P na BC, i duž BQ polovi $\measuredangle ABC$, sa Q na CA. Zna se da je $\measuredangle BAC = 60°$ i da je $AB + BP = AQ + QB$. Naći uglove u Δ.

Rj. Označimo uglove u ΔABC sa α, β i γ. $\alpha = 60°$. Produžimo AB do P' tako da je $BP' = BP$, i konstruišimo P'' na AQ tako da je $AP'' = AP'$. Tad je $\Delta BP'P$ jednakokraki sa uglom na bazi $\frac{\beta}{2}$. Kako je $AQ + QP'' = AB + BP' = AB + BP = AQ + QB$, slijedi da je $QP'' = QB$. Kako je $\Delta AP'P''$ jks i AP polovi ugao kod A, imamo $PP' = PP''$



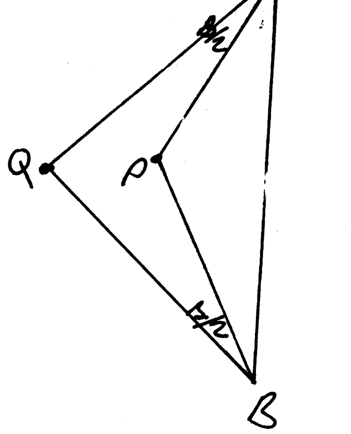
Tvrdnja: Tačke B, P, P'' su kolinearne, pa se $P'' \equiv C$.

dokaz: Pretpostavimo suprotno tvrdnji:

$\measuredangle PBQ = \measuredangle PP'B = \measuredangle PP''Q = \frac{\beta}{2}$.

Tako da imamo slučaj kao na slici, ili je P na drugoj strani BP''.

U bilo kojem slučaju, pretpostavka da je $\Delta BPP''$ razmatranjem vodi nas na $BP = PP'' = PP'$ pa zaključujemo da je $\Delta BP'P$ jks, i na kraju do apsurda da $\frac{\beta}{2} = 60°$ pa $\alpha + \beta = 60° + 120° = 180°$. #

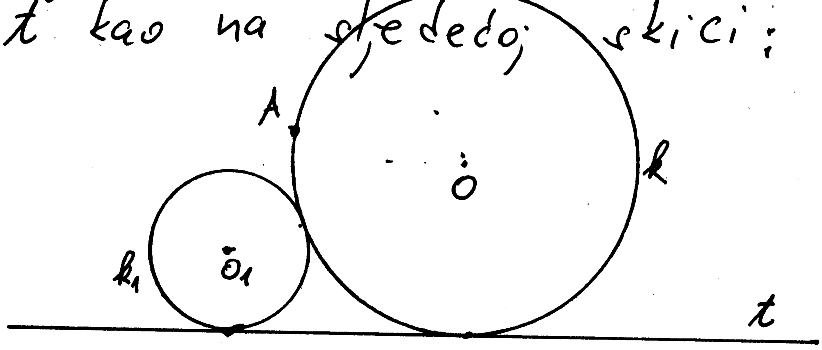


Prema tome, tačke B, P, P'' su kolinearne i $P'' \equiv C$ q.e.d.

Kako je ΔBCQ jkk, imamo $120° - \beta = \gamma = \frac{\beta}{2}$ pa $\beta = 80°$ i $\gamma = 40°$.

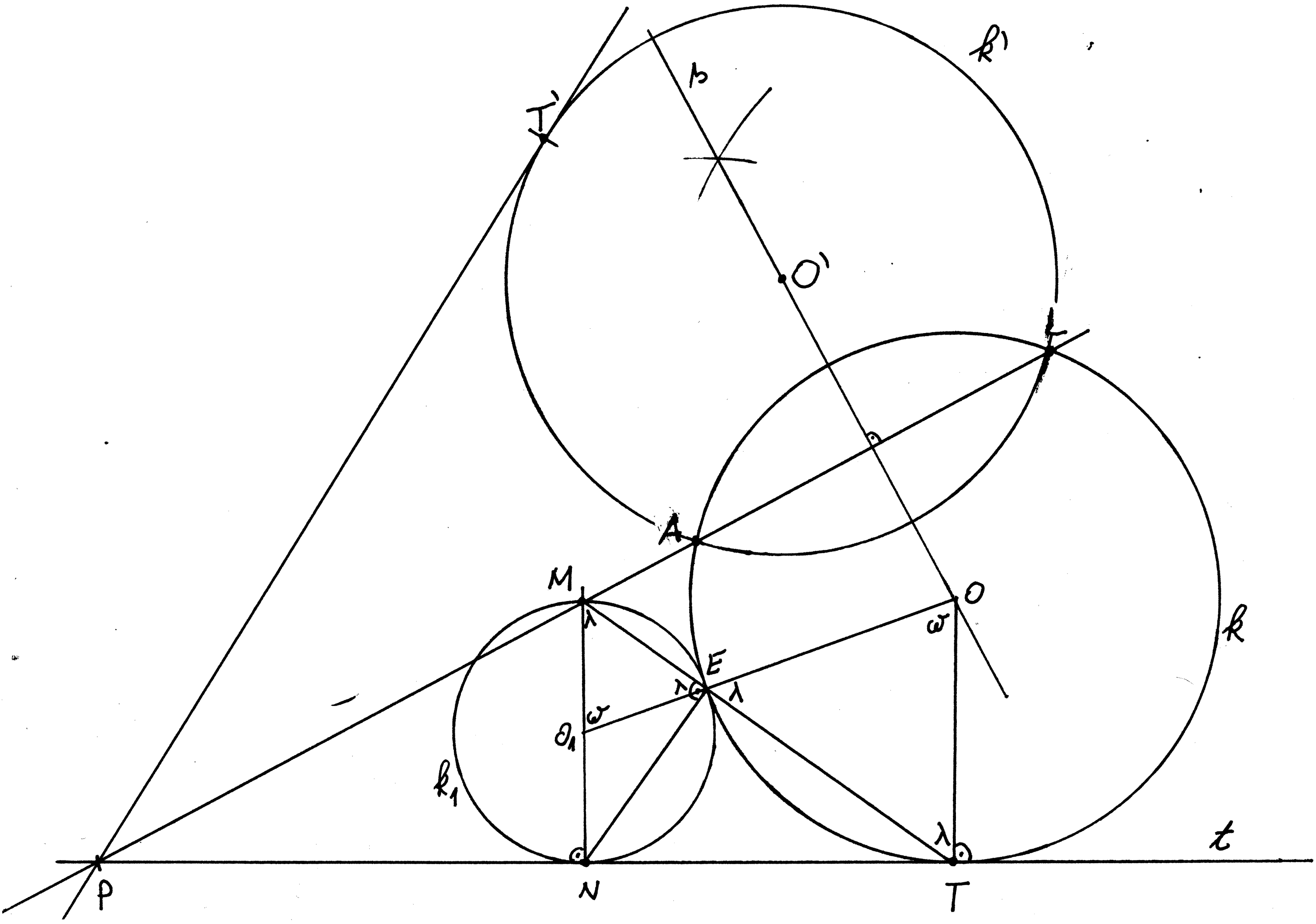
$\alpha = 60°$, $\beta = 80°$, $\gamma = 40°$ tražene vrijednosti

(#) Dat je krug $k_1(O_1, r_1)$, prava t i tačka A. Konstruisati krug k koji će prolaziti kroz tačku A i dodirivati krug k_1 i pravu t kao na sledećoj skici:



Rj: Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je $k(O,r)$ traženi krug koji prolazi kroz tačku A, dodiruje dati krug $k_1(O_1, r_1)$ u tački E i dodiruje datu pravu u tački T. Dalje, neka dati krug k_1 dodiruje pravu t u tački T. Kako je E dodirna tačka krugova primjetimo odmah da je $O_1 - E - O$. Primjetimo isto tako da je

$O_1N \perp t$ i $OT \perp t \Rightarrow p(O_1,N) \parallel p(O,T)$.

$p(O_1,N) \parallel p(O,T)$ i $p(O_1,O)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle MO_1E = \measuredangle TOE = \omega$

$MO_1 \cong O_1E = r_1 \Rightarrow \triangle MO_1E$ jkk sa osnovicom $ME \Rightarrow$

$(\{M,N\} = p(N,O_1) \cap k_1)$ $\Rightarrow \measuredangle O_1ME = \measuredangle O_1EM = \lambda$

Isto tako $OE \cong OT = r \Rightarrow \triangle OET$ jkk sa osnovicom ET

$\Rightarrow \measuredangle OET \cong \measuredangle OTE = \lambda$

$p(O_1, O)$ je prava koja sadrži dvije stranice ovog trougla i njihov vrh E, pa kako je $\measuredangle O_1EM \cong \measuredangle OET = \lambda$ to je $M - E - T$.

Posmatrajmo trouglove $\triangle MNE$ i $\triangle MNT$

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle NEM \cong \measuredangle MNT = 90^\circ \\ \measuredangle EMN \cong \measuredangle TMN = \lambda \\ \measuredangle MNE \cong \measuredangle NTM \text{ (kao treći ugao)} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \triangle MNE \sim \triangle MNT$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{MN}{MT} = \frac{ME}{MN} \Rightarrow MN^2 = ME \cdot MT \quad \dots(1)$$

Posmatrajmo pravu $p(M,A)$

Neka je $\{A, L\} = p(M,A) \cap k$ i $\{P\} = p(M,A) \cap t$

Primjetimo (potencija tačke iz M) da je $ME \cdot MT = MA \cdot ML \quad \dots(2)$

(1) i $(2) \Rightarrow MA \cdot ML = MN^2 \Rightarrow ML = \dfrac{MN^2}{MA}$

Kako možemo konstruisati tačke M, A i N to sad nije teško konstruisati i tačku L.

Neka je s simetrala duži AL i $O' \in s$ proizvoljna tačka na simetrali. Posmatrajmo krug $k'(O', r')$. Neka je $p(P,T')$ tangenta iz tačke P na krug k', $T' \in k'$. Primjetimo da je $(PT')^2 = PA \cdot PL$ i $PT^2 = PA \cdot PL \Rightarrow PT' \cong PT$.

Kako tačku T' možemo konstruisati to sad nije teško dobiti i tačku T, pa kako imamo A, L i T to traženi krug k nije teško konstruisati.