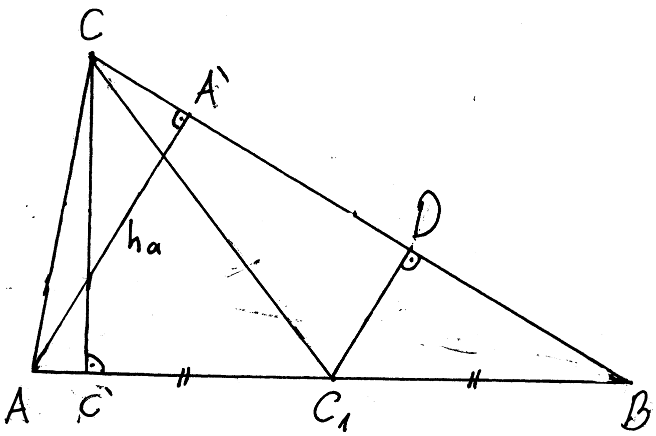
(#) Dat je trougao ΔABC u kome su poznate dvije visine $AA' = h_a$, $CC' = h_c$ i poznata je težišnica $CC_1 = t_c$. Ako je data tačka D na duži BA' takva da $C_1D \perp BC$ dokazati da $C_1D = \frac{1}{2} h_a$. Tvrdnju dokazati bez primjene teoreme o srednjoj liniji trougla.

Rj.



Prvo primjetimo da je C_1 sredina duži AB.
Kako je $AA' \perp BC$ i $C_1D \perp BC$ to je $p(A, A') \parallel p(C_1, D)$.
Primjenom Talesove teoreme sad možemo zaključiti da je $\frac{AB}{C_1B} = \frac{AA'}{C_1D}$.

Kako je $\frac{AB}{C_1B} = \frac{2}{1} \Rightarrow AB = 2C_1B$.

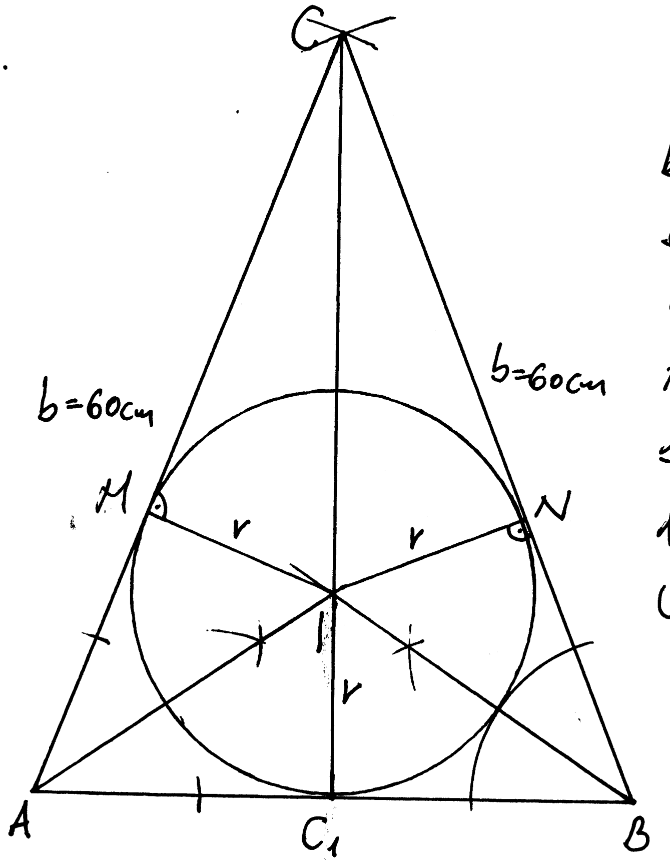
Možemo zaključiti $\frac{AA'}{C_1D} = \frac{2}{1} \Rightarrow 2C_1D = AA'$

$$\Rightarrow \qquad C_1D = \frac{1}{2} h_a$$

q.e.d.

(#) Centar upisane kružnice u jednakokrakom trouglu dijeli visinu u odnosu 12 : 5. Ako je dužina kraka trougla 60 cm, naći dužinu osnovice tog trougla.

Rj.



Označimo sa I centar upisanog kruga. Visina CC_1 spuštena na stranicu AB je ujedno i simetrala ugla $\measuredangle ACB$ pa je $I \in CC_1$. Posmatrajmo trouglove ΔAIC i ΔBIC. U ΔAIC visina na stranicu AC je $MI = r$.

U ΔBIC visina na stranicu BC je $NI = r$.

U ΔABI visina na stranicu AB je $C_1I = r$.

$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta AIC} + P_{\Delta BIC} + P_{\Delta ABI}$$

(ako označimo sa $h = CC_1$, sa $a = AB$, i sa $b = BC = AC$)

$$\frac{h \cdot a}{2} = \frac{r \cdot b}{2} + \frac{r \cdot b}{2} + \frac{r \cdot a}{2}$$

($b = 60$ cm)

$$\frac{h \cdot a}{2} = r \cdot 60 + \frac{r \cdot a}{2}$$

(Znamo $\frac{CI}{IC_1} = \frac{12}{5}$ (iz postavke)

$$\frac{CI}{IC_1} + 1 = \frac{12}{5} + 1$$

$$\frac{\overbrace{CI + IC_1}^{=h}}{\underbrace{IC_1}_{=r}} = \frac{17}{5} \Rightarrow \frac{h}{r} = \frac{17}{5}$$

$$h = \frac{17}{5} r$$

... (1))

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad \frac{17}{5} r \cdot \frac{a}{2} = 60r + \frac{a}{2} r \quad /:r$$

$$60 + \frac{a}{2} = \frac{17a}{10} \quad /\cdot 10$$

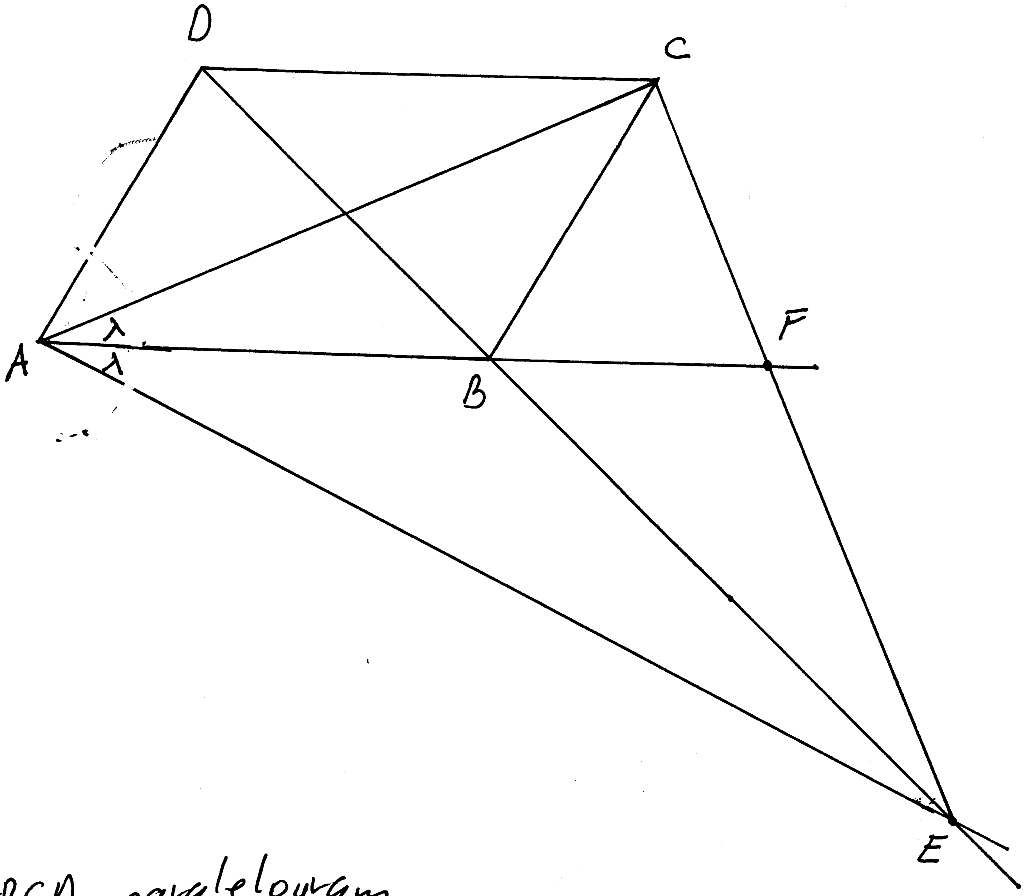
$$17a - 5a = 600$$

$$12a = 600$$

$$a = 50 \text{ cm}$$ ← traženo rješenje

(#) Neka je $\square ABCD$ paralelogram. Na polupravoj DB uzeta je tačka E tako da je poluprava AB simetrala ugla $\measuredangle CAE$. Neka je F tačka presjeka pravih CE i AB.
Dokazati da $\frac{EC}{EF} = \frac{AB}{BF}$.

Rj.



$\square ABCD$ paralelogram

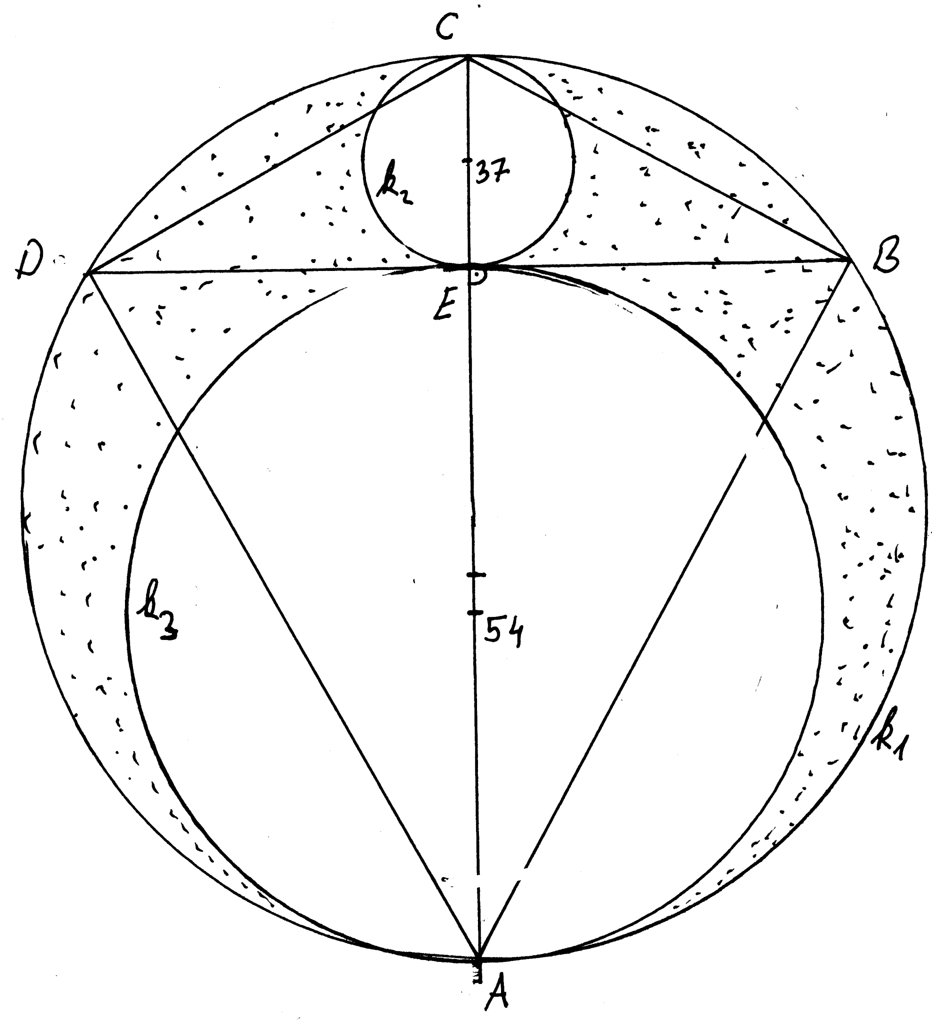
$\Rightarrow AB \parallel CD \Rightarrow p(A,B) \parallel p(C,D) \overset{T.T.}{\Rightarrow} \frac{EC}{EF} = \frac{ED}{EB} = \frac{CD}{BF}$ ... (∗)

Kako je $CD \cong AB \overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{EC}{EF} = \frac{AB}{BF}$

q.e.d.

(#) Deltoid je upisan u krug k_1. Kraća dijagonala dijeli dužu na odsječke 37 cm i 54 cm. Nad tim odsječcima kao nad prečnicima konstruisani su krugovi k_2 i k_3. Naći površinu $P = P_{k_1} - P_{k_2} - P_{k_3}$, označiti na slici šta predstavlja ova površina i odrediti dužinu kraće dijagonale BD.

Rj.



P je označena na slici istačkano.

$$P_{k_1} = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 \pi = \left(\frac{54+37}{2}\right)^2 \pi$$

$$P_{k_2} = \left(\frac{EC}{2}\right)^2 \pi = \left(\frac{37}{2}\right)^2 \pi$$

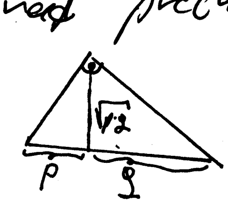
$$P_{k_3} = \left(\frac{AE}{2}\right)^2 \pi = \left(\frac{54}{2}\right)^2 \pi$$

$$P = P_{k_1} - P_{k_2} - P_{k_3} =$$

$$= \frac{54^2 + 2\cdot 54\cdot 37 + 37^2 - 37^2 - 54^2}{4}\pi$$

$$= 27\cdot 37\,\pi = 999\,\pi$$

Primjetimo da je $\measuredangle ABC$ u stvari ugao nad prečnikom AC pa je $\measuredangle ABC = 90°$. Od ranije znamo da

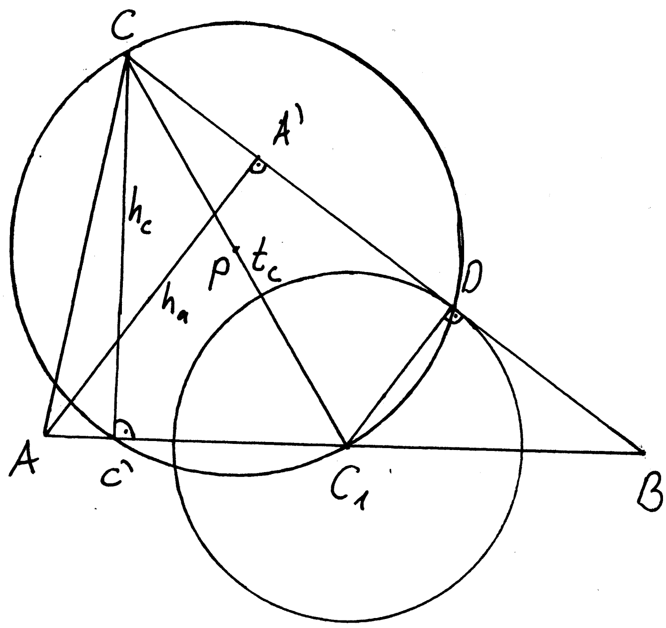


pa $BE = \sqrt{37\cdot 54} = \sqrt{37\cdot 6\cdot 9} = 3\sqrt{222}$

$BD = 6\sqrt{222}$.

Dat je trougao ΔABC u kome su poznate dvije visine $AA' = h_a$, $CC' = h_c$ i težišnica $CC_1 = t_c$. Na stranici BC data je tačka D takva da $C_1D \perp BC$ i $C_1D = \frac{1}{2} AA'$. Diskutovati da li se tačka D može dobiti kao presjek dva kruga čiji se poluprečnici mogu izraziti preko h_a, h_c ili t_c.

Rješenje:



$AA' = h_a$

Prema pretpostavci zadatka

$C_1D = \frac{1}{2} AA' = \frac{1}{2} h_a$,

Prema tome prvi krug može biti $k_1(C_1, \frac{1}{2} h_a)$

Trougao ΔCDC_1 je pravougli pa je centar opisanog kruga tog trougla na sredini težišnice $t_c = CC_1$. Označimo tu tačku sa P.

Drugi krug može biti $k_2(P, \frac{1}{2} t_c)$.

Na kraju

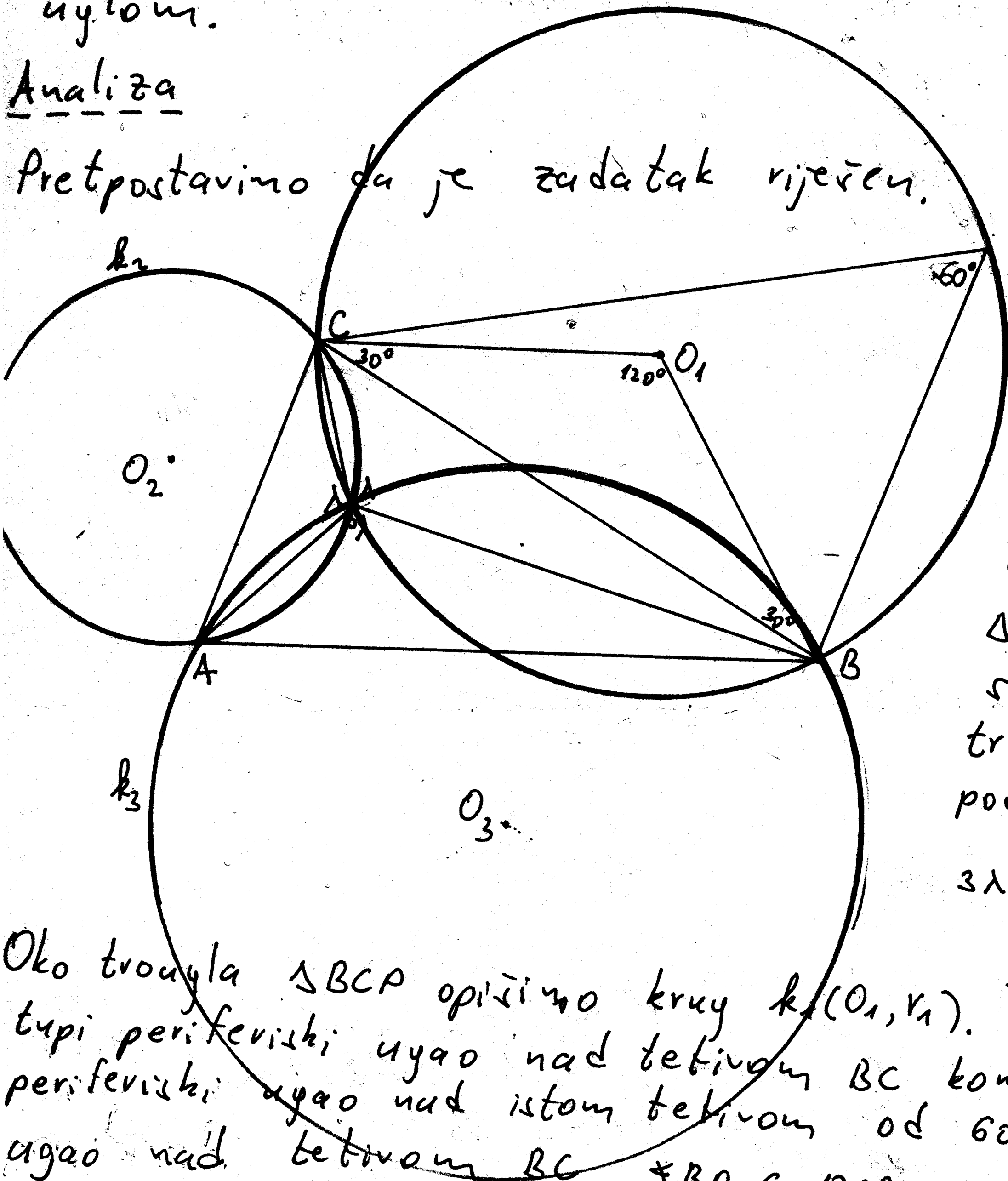
$$\{D\} = k_1(C_1, \tfrac{1}{2} h_a) \cap k_2(P, \tfrac{1}{2} t_c).$$

q.e.d.

(#) U unutrašnjosti datog trougla odrediti tačku iz koje se sve tri strane trougla vide pod podudarnim uglom.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je tačka P u unutrašnjosti $\triangle ABC$ iz koje se sve tri stranice trougla vide pod podudarnim uglom λ.

$3\lambda = 360° \Rightarrow \lambda = 120°$

Oko trougla $\triangle BCP$ opišimo krug $k_1(O_1, r_1)$. Tada je $\measuredangle BPC = 120°$ tupi periferiski ugao nad tetivom BC kome odgovara oštri periferiski ugao nad istom tetivom od $60°$ pa je centralni ugao nad tetivom BC, $\measuredangle BO_1C = 120°$.

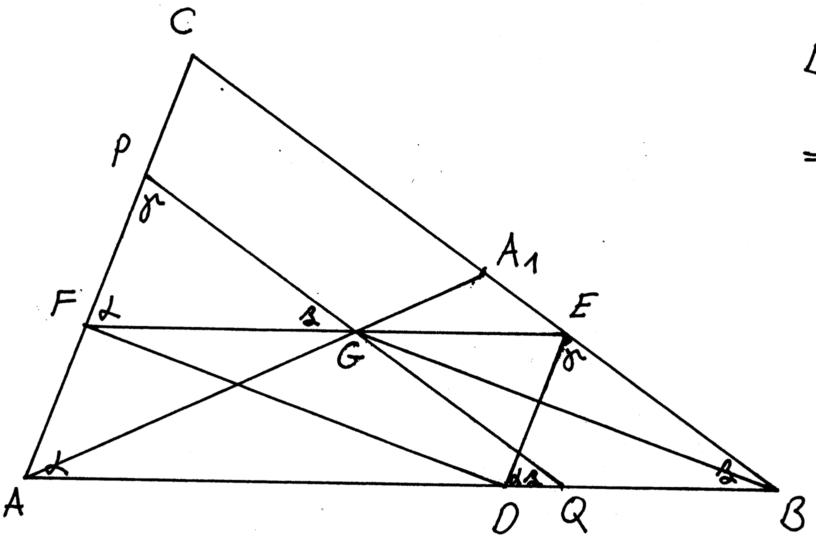
$\triangle BO_1C$ jkk $\Rightarrow \measuredangle O_1CB = \measuredangle CBO_1 = 30°$.

Ako bi oko trougla $\triangle APC$ opisali krug $k_2(O_2, r_2)$ ili oko $\triangle ABP$ opisali krug $k_3(O_3, r_3)$ na sličan način bi došli do rezultata $\measuredangle ACO_2 = \measuredangle O_2AC = \measuredangle BAO_3 = \measuredangle ABO_3 = 30°$.

Kako možemo konstruisati kružnice k_1, k_2 i k_3 time možemo konstruisati i tačku P.

(#) U trougao ΔABC upisan je paralelogram $\square ADEF$ tako da tjemena D, E i F leže redom na stranicama AB, BC i CA. Kroz središte A_1 stranice BC konstruisana je prava AA_1 koja siječe pravu EF u tački G. Dokazati da je četverougao $\square BGFD$ paralelogram.

Rj.



$\square ADEF$ paralelogram

$\Rightarrow p(A,D) \parallel p(E,F)$

i $p(A,F) \parallel p(D,E)$

Kroz tačku G povucimo pravu paralelnu pravoj $p(B,C)$ koja siječe stranice AC i AB redom u tačkama P i Q.

$p(G,E) \parallel p(Q,B)$ i $p(Q,G) \parallel p(E,B) \Rightarrow \square QBEG$ paralelogram

$\Rightarrow GQ \cong BE$

$p(B,C) \parallel p(P,Q) \xrightarrow{TT} \dfrac{BA_1}{CA_1} = \dfrac{GQ}{GP} \Rightarrow \dfrac{GQ}{GP} = 1$ tj. $PG = GQ$

$p(B,C) \parallel p(P,Q)$ i $p(A,B)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle AQP \cong \measuredangle ABC = \beta$

$p(A,B) \parallel p(E,F)$ i $p(Q,P)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle AQP \cong FGP = \beta$

tj. $\measuredangle AQC \cong \measuredangle FGP = \beta$

$p(A,B) \parallel p(F,E)$ i $p(A,C)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle CAB \cong \measuredangle CFE = \alpha$

$p(A,C) \parallel p(D,F)$ i $p(A,B)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle CAB \cong \measuredangle EDB = \alpha$

tj. $\measuredangle CFE \cong \measuredangle EDB = \alpha$ pa je i $\measuredangle FPG \cong \measuredangle DEB = \gamma$

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle PFG \cong \measuredangle EDB = \alpha \\ \measuredangle FGP \cong \measuredangle DBE = \beta \\ \measuredangle GPF \cong \measuredangle BED = \gamma \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{sičn. UUU}} \Delta FGP \sim \Delta DBE$$

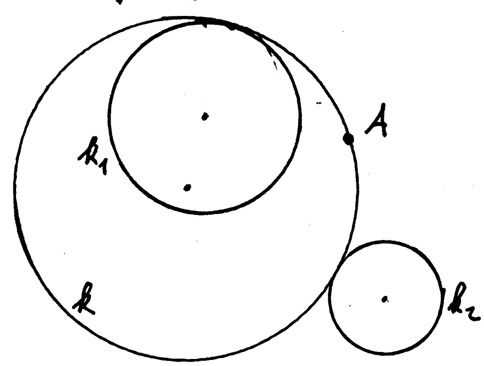
$$\Downarrow$$

$$\frac{DB}{FG} = \frac{BE}{PG} \xrightarrow{BE = GQ = PG} \frac{DB}{FG} = 1 \text{ tj. } DB = FG$$

$p(D,B) \parallel p(F,G)$ i $DB \cong FG \Rightarrow \square BGFD$ paralelogram

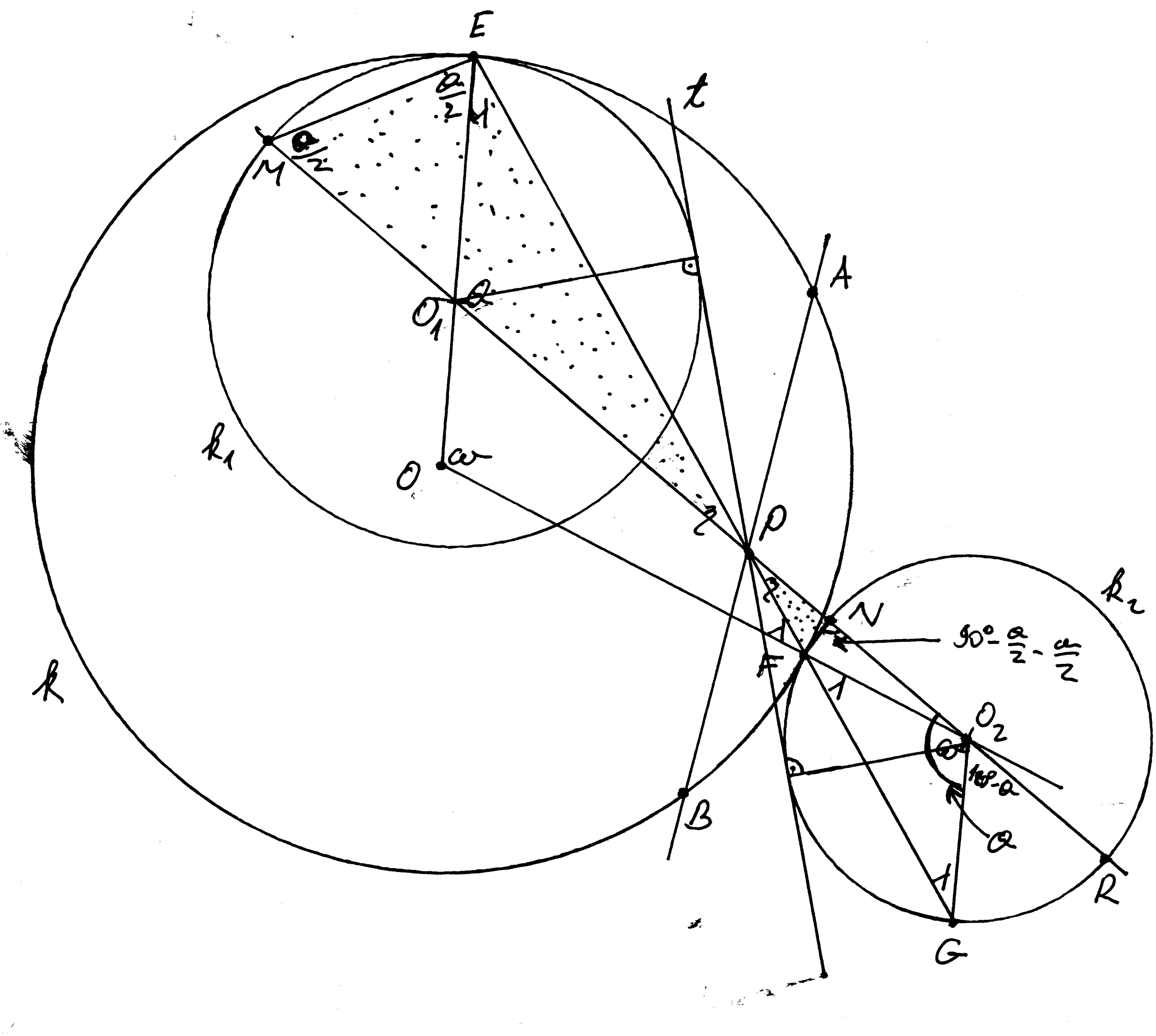
q.e.d.

(#) Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ i tačka A. Konstruisati krug $k(O, r)$ koji prolazi kroz tačku A i dodiruje krugove k_1 i k_2 kao na skici.



Rj: <u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $k(O, r)$ traženi krug koji prolazi kroz tačku A i dodiruje krugove $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ redom u tačkama E i F.



Označimo sa M i N tačke na pravoj $p(O_1, O_2)$ tako da je $M - O_1 - N - O_2$ i $M \in k_1$, $N \in k_2$. Dalje neka je P tačka

$$\{P\} = p(O_1, O_2) \cap p(E, F).$$

Kako je F dodirna tačka krugova k i k_2 znamo da je $O - F - O_2$.
Neka je $\{G\} = p(E, F) \cap k_2$.
Ako označimo sa λ ugao $\sphericalangle O_2 F G$ imamo da je i
$\sphericalangle OFE = \lambda$ (unakrsni) $\Rightarrow \sphericalangle OEF \stackrel{\sim}{=} \sphericalangle FGO_2 = \lambda$ (trouglovi $\triangle OFE$ i $\triangle FGO_2$ su jkk) $\Rightarrow \sphericalangle EOF \stackrel{\sim}{=} \sphericalangle GO_2F = \omega$.
Pa na pravoj $p(O, O_2)$ imamo ugao $\omega \Rightarrow p(O, E) \parallel p(O_2, G)$.
Dalje, želimo pokazati da su trouglovi $\triangle MEP$ i $\triangle PFN$ slični. Neka je $R \in k_2$ t.d. $N - O_2 - R$. Posmatrajmo oštri periferiski ugao $\sphericalangle FNR$ nad lukom FGR. Njemu odgovarajući centralni je $\sphericalangle FO_2R$ (nad istim lukom).
Ako označim sa α ugao $\sphericalangle NO_2G$ imamo da je $\sphericalangle RO_2G = 180° - \alpha$.
Isto tako, kako je $p(O, E) \parallel p(G, O_2)$ i $p(O_1, O_2)$ transferzala $\sphericalangle EO_1P = \alpha$. Sad oštri periferiski ugao $\sphericalangle FNR$ iznosi $90° - \frac{\alpha}{2} + \frac{\omega}{2}$ (zato što je centralni $\sphericalangle FO_2R = \omega + 180° - \alpha$).
Prema tome možemo zaključiti da je $\sphericalangle FNP = 90° + \frac{\alpha}{2} - \frac{\omega}{2}$.
Trougao $\triangle MO_1E$ je jkk sa osnovicom EM i vanjskim uglom kod vrha O_1 α pa je $\sphericalangle O_1ME \stackrel{\sim}{=} \sphericalangle O_1EM = \frac{\alpha}{2}$.
Znamo da je $2\lambda + \omega = 180° \Rightarrow \lambda = 90° - \frac{\omega}{2}$ tj. imamo da je $\sphericalangle MEP = \frac{\alpha}{2} + 90° - \frac{\omega}{2}$. Možemo zaključiti

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle PNF \stackrel{\sim}{=} \sphericalangle MEP = 90° + \frac{\alpha}{2} - \frac{\omega}{2} \\ \sphericalangle NPF \stackrel{\sim}{=} \sphericalangle EPM \text{ (unakrsni)} \\ \sphericalangle EMP \stackrel{\sim}{=} \sphericalangle PFN \text{ (treći ugao)} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(slič. UUU)}} \triangle PFN \sim \triangle PME$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{MP}{PF} = \frac{PE}{PN}$$

tj. $MP \cdot PN = PE \cdot PF$ ...(1)

Sad ako označimo sa B tačku na k t.d. $A-P-B$ zbog potencije tačke imamo $PA \cdot PB = PE \cdot PF$ ...(2)

(1) i (2) $\Rightarrow$ $PA \cdot PB = PM \cdot PN$

$$PB = \frac{PM \cdot PN}{PA}$$

Pa kako imamo tačke M i N, ako bi mogli konstruisati tačku P odmah bi mogli konstruisati i tačka B. Posmatrajmo tačke M, O_1 i E. Pokazaćemo da se one redom homotetično preslikavaju u tačke R, O_2 i G, sa centrom homotetije u tački P.

Trouglovi ΔEO_1P i ΔGO_2P su slični (trivijalno)

$$\frac{PE}{PG} = \frac{PO_1}{PO_2} = \frac{O_1E}{O_2G} = \frac{r_1}{r_2} \quad ...(3)$$

Isto tako $\Delta PME \sim \Delta PRG$ (ZAŠTO?) pa

$$\frac{PM}{PR} = \frac{PE}{PG} = \frac{ME}{GR} \overset{(3)}{=} \frac{r_1}{r_2} \quad ...(4)$$

(3) i (4) $\Rightarrow$ krug k_1 se homotetično preslikava u krug k_2 sa centrom homotetije u tački P. Pa ako je t tangenta na k_1, prava t će biti tangenta i na krug k_2. Kako pravu t sad možemo konstruisati to možemo dobiti tačku P a poslije toga i tačku B. Naš problem smo sad sveli na konstrukciju kruga kroz dvije tačke A i B tako da dodiruje dati krug k_1 (ili k_2), a tu konstrukciju znamo od ranije pa je nije teško konstruisati.