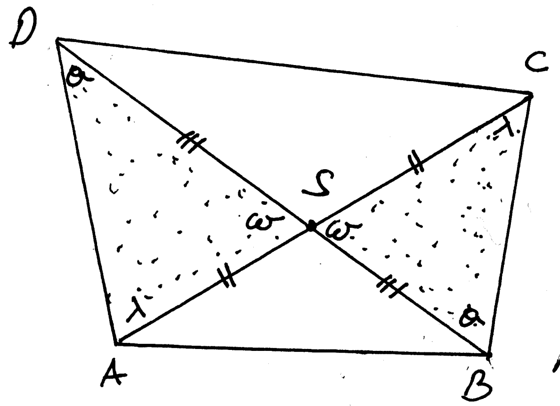
Definicija paralelograma: Paralelogram je četvorougao akko ima paralelne suprotne (stranice koje su suprotne jedna drugoj) stranice. Koristeći isključivo ovu definiciju, teoreme o podudarnosti trouglova i teoremu o podudarnosti uglova na transferzali dokazati sledeću tvrdnju: Četvorougao $\square ABCD$ je paralelogram akko mu se dijagonale polove.

Rj: postavku zadatka

"⇐": $\left.\begin{array}{l} \square ABCD \text{ četvorougao} \\ AC \text{ i } BD \text{ su dijagonale} \\ AC \cap BD = \{S\} \\ S \text{ sredina } AC \\ S \text{ sredina } BD \end{array}\right\} \Rightarrow \square ABCD \text{ paralelogram}$



Uvedimo oznake kao na slici.

$\left.\begin{array}{l} DS \cong BS \\ \sphericalangle ASD \cong \sphericalangle BSC = \omega \\ AS \cong CS \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \triangle ASD \cong \triangle BSC$

$\Downarrow$

$\sphericalangle SAD \cong \sphericalangle SCB = \lambda$ i

$\sphericalangle SDA \cong \sphericalangle SBC = \theta$

Na pravoj $p(A,C)$ imamo $\sphericalangle DAC \cong \sphericalangle BCA = \lambda$

$\Rightarrow p(A,D) \parallel p(B,C)$ ...(*)

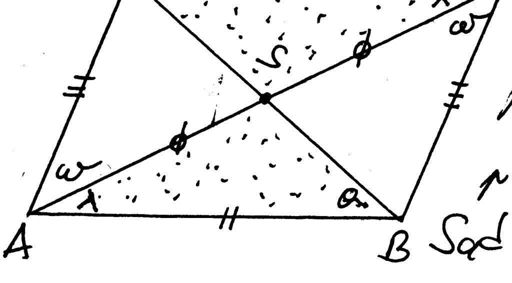
Na pravoj $p(B,D)$ imamo $\sphericalangle ADB \cong \sphericalangle DBC = \theta \Rightarrow p(A,D) \parallel p(B,C)$ ...(**)

(*) i (**) $\Rightarrow AB \parallel CD$ i $AD \parallel BC \Rightarrow \square ABCD$ je paralelogram q.e.d.

---

postavku zadatka

"⇒" $\left.\begin{array}{l} \square ABCD \text{ paralelogram} \\ AC, BD \text{ dijagonale} \\ AC \cap BD = \{S\} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} S \text{ je sredina } AC \\ \text{i } S \text{ je sredina } BD. \end{array}$



$\square ABCD$ paralelogram $\Rightarrow AB \parallel CD$ i $AD \parallel BC \Rightarrow$

$p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $p(A,C)$ transf. $\Rightarrow \sphericalangle BAC \cong \sphericalangle ACD = \lambda$

$p(A,D) \parallel p(B,C)$ i $p(A,C)$ transf. $\Rightarrow \sphericalangle DAC \cong \sphericalangle BCA = \omega$

Na osnovu podudarnost USU $\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ADC$

$\Downarrow$

$AB \cong DC$ i $AD \cong BC$

$p(A,B) \parallel p(D,C)$ i $p(B,D)$ transf.

$\Rightarrow \sphericalangle ABD \cong \sphericalangle BDC = \theta$

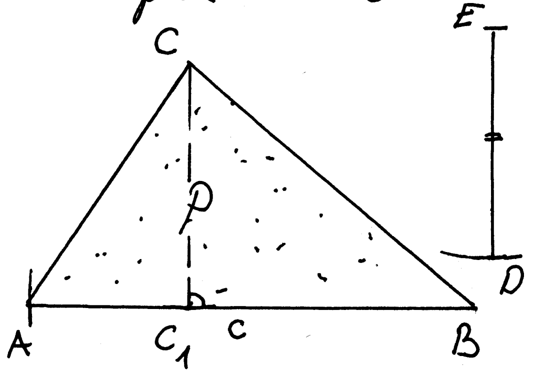
Sad ako posmatramo $\triangle ABS$ i $\triangle CDS$ na osnovu pravila USU

$\Rightarrow \triangle ABS \cong \triangle CDS \Rightarrow AS \cong CS$ i $BS \cong DS$, q.e.d.

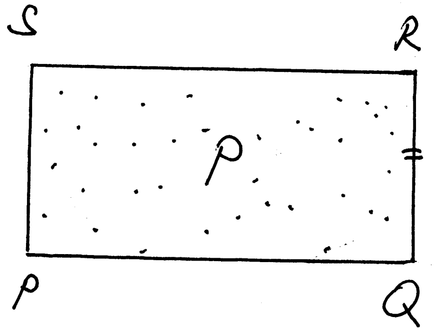
(#) Dat je ΔABC i data je duž DE. Konstruisati pravougaonik čija je površina jednaka površini trougla ΔABC i čija je jedna strana jednaka dužini duži DE.

Rj: Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat ΔABC, duž DE i neka je $\square PQRS$ četverougao čija je površina jednaka površini ΔABC i $RQ \cong DE$



$$P_{\square PQRS} = |PQ| \cdot |RQ| = |PQ| \cdot |ED|$$

$$P_{\Delta ABC} = c \cdot h_c = |AB| \cdot |CC_1|$$

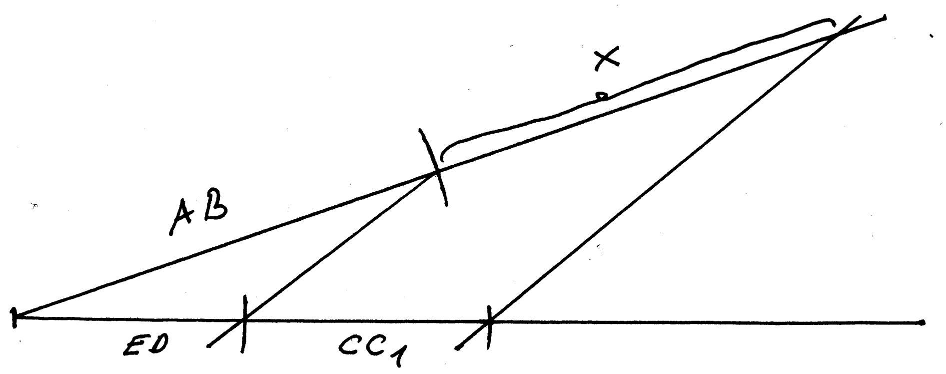
$$|PQ| \cdot |ED| = |AB| \cdot |CC_1|$$

$$|PQ| = \frac{|AB| \cdot |CC_1|}{|ED|}$$

Kako su nam poznate duži AB, CC_1, ED to nije teško konstruisati duž PQ, a time i $\square PQRS$ (pošto su nam poznate duži PQ i QR).

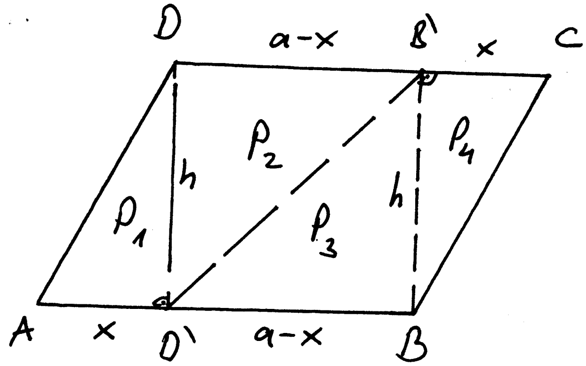
Uputa za konstrukciju duži PQ.

$$\frac{\overset{=x}{PQ}}{AB} = \frac{CC_1}{ED} \Rightarrow \frac{ED}{CC_1} = \frac{AB}{x}$$



7) Koristeći isključivo formulu za površinu pravouglog trougla ($P=\frac{a\cdot b}{2}$, gdje su a i b katete) izvesti formulu za površinu paralelograma ($P=a\cdot h$, gdje je npr. $AB=a$ a h udaljenost između stranica AB i CD).

Rj.:



Označimo stranicu AB sa a. Na osnovu osobina paralelograma znamo da je $AB \cong CD = a$. Neka je D' ortogonalna projekcija tačke D na AB.

Ako je $AD' = x$ tada je $BD' = a-x$. Ostale oznake uvedimo kao na slici.

$$P_{\square ABCD} = P_1+P_2+P_3+P_4 = \frac{x\cdot h}{2} + \frac{(a-x)\cdot h}{2} + \frac{(a-x)\cdot h}{2} + \frac{h\cdot x}{2}$$

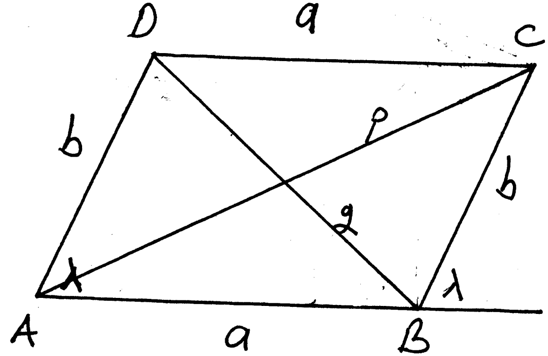
$$= x\cdot h + (a-x)\cdot h = (x+a-x)h = a\cdot h$$

$P_{\square ABCD} = a\cdot h$ što je i trebalo dobiti

(#) Neka je $\square ABCD$ paralelogram kod koga su $AB=a$, $BC=b$, $AC=p$ i $BD=q$. Dokazati da vrijedi jednakost $p^2+q^2=2a^2+2b^2$.

(uputa: iskoristiti kosinusnu teoremu)

Rj.



$$p^2 = a^2+b^2-2ab\cos\measuredangle ABC \quad (*)$$

$$q^2 = a^2+b^2-2ab\cos\measuredangle BAD \quad (**)$$

$$\measuredangle BAD = 180^\circ - \measuredangle ABC$$

$$\cos\measuredangle BAD = \cos(180^\circ - \measuredangle ABC) = -\cos\measuredangle ABC \quad (***)$$

$$(*)+(**) \xRightarrow{(***)} p^2+q^2 = a^2+b^2-2ab\cos\measuredangle ABC + a^2+b^2+2ab\cos\measuredangle ABC$$

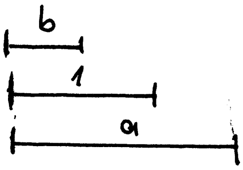
$$p^2+q^2 = 2a^2+2b^2$$

q.e.d.

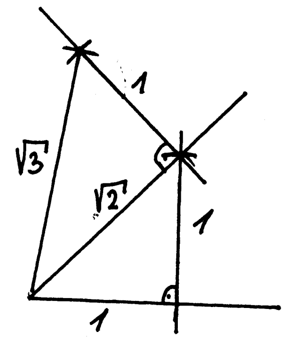
Date su duži a i b $(b<1<a)$. Nacrtati duž x ako je

$$x\sqrt{b} = \frac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} + a^2 .$$

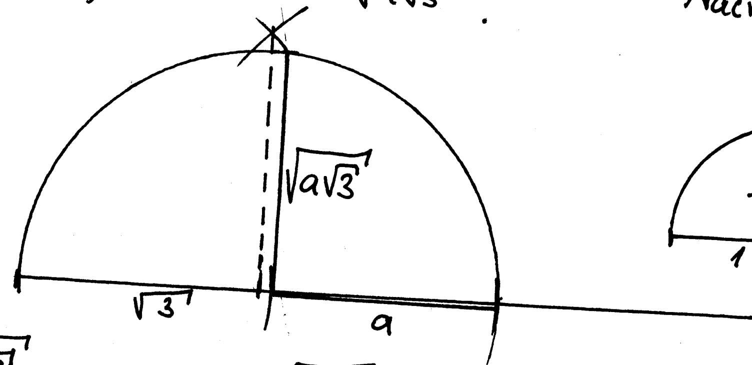
R:



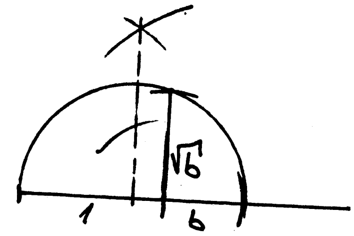
Nacrtajmo duži $\sqrt{3}$ i $\sqrt{2}$.



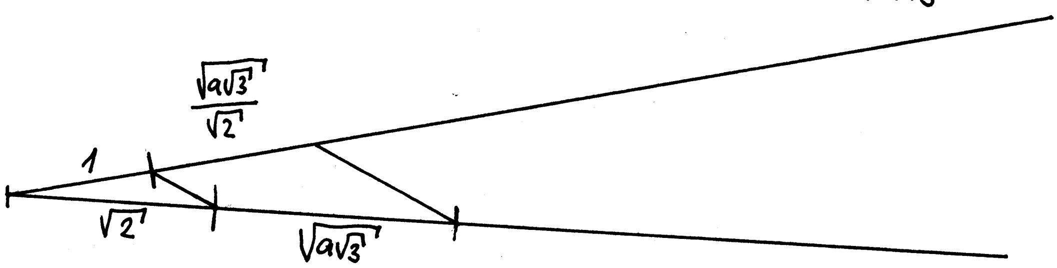
Nacrtajmo duž $\sqrt{a\sqrt{3}}$.



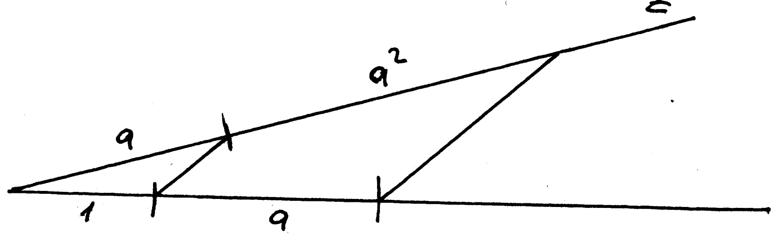
Nacrtajmo duž $\sqrt{b}$.



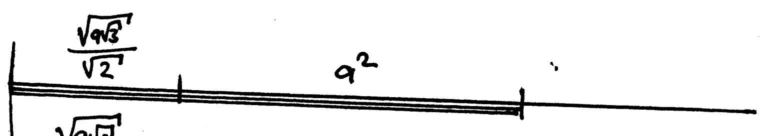
Nacrtajmo duž $\dfrac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$. $\quad Y = \dfrac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{a\sqrt{3}}} = \dfrac{1}{Y}$



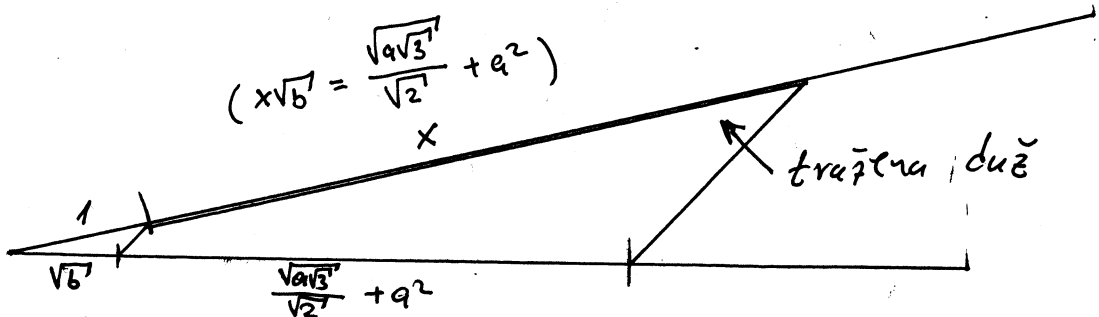
Nacrtajmo duž a^2. $\quad z = a \cdot a \Rightarrow \dfrac{1}{a} = \dfrac{a}{z}$



Nacrtajmo duž $\dfrac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} + a^2$



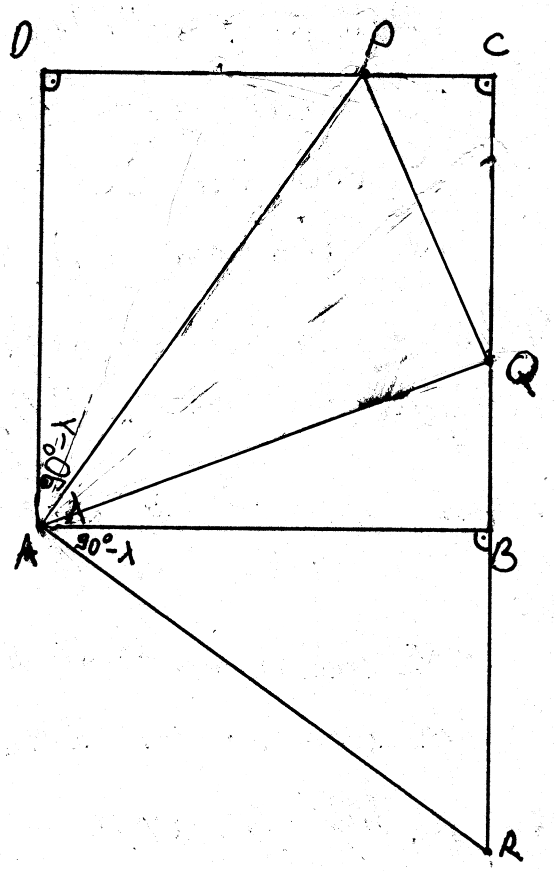
Na kraju, nacrtajmo duž $x = \dfrac{\frac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} + a^2}{\sqrt{b}}$. $\quad \left(\dfrac{\sqrt{b}}{\frac{\sqrt{a\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} + a^2} = \dfrac{1}{x} \right)$



Konstruisati kvadrat ako je dato jedno tjeme i po jedna tačka na stranicama koje ne sadrže to tjeme.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat kvadrat $\square ABCD$ kod koga je $P \in CD$ i $Q \in BC$.

Označimo sa $\lambda = \measuredangle PAB$.

Tada je $\measuredangle PAD = 90° - \lambda$

Neka je $R \in p(C,B)$: $C-B-R$ i $\measuredangle BAR = 90° - \lambda$.

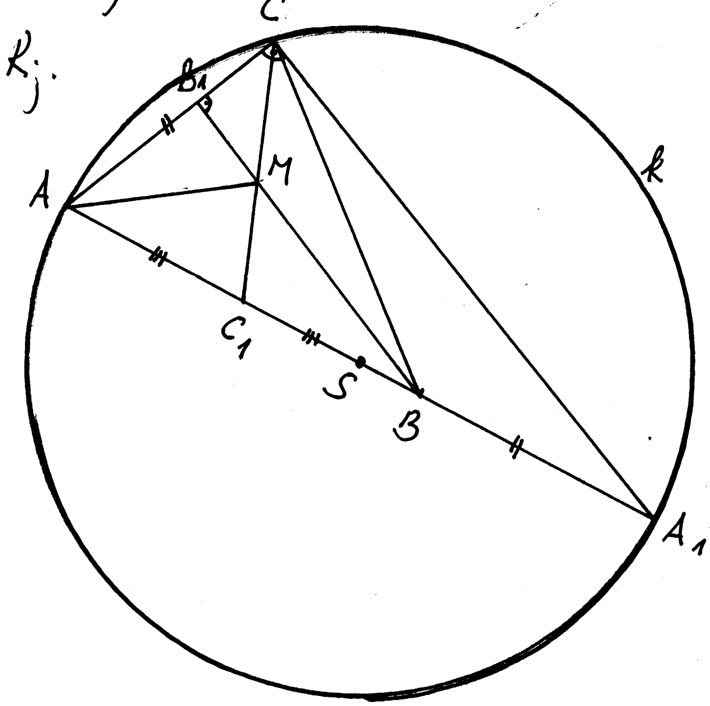
Tad
$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle DAP = \measuredangle BAR = 90° - \lambda \\ AD = AB \\ \measuredangle ADP = \measuredangle ABR = 90° \end{array}\right\} \overset{USU}{\Longrightarrow} \triangle ADP \cong \triangle ABR$$
$$\Downarrow$$
$$AP \cong AR$$

Primetimo da je i
$$\measuredangle PAR = 90°.$$

Kako su date tačke A, P i Q sad nije problem konstruisati tačku R a poslije nje tačke B i C.
Prema tome kvadrat $\square ABCD$ možemo konstruisati.

(#) Neka je C proizvoljna tačka kružnice k, a B tačka na prečniku AA_1 kružnice takva da je $AC = BA_1$. Dokazati da se u trouglu $\triangle ABC$ simetrala ugla kod A, visina iz B i težišna linija iz C sijeku u istoj tački.

Rj.



Neka je u $\triangle ABC$, CC_1 težišna linija, a BB_1 visina.

$\{M\} = CC_1 \cap BB_1$

Trebamo pokazati da je $p(A,M)$ simetrala ugla $\measuredangle BAC$.

Dovoljno je pokazati da je

$$\frac{C_1M}{MC} = \frac{AC_1}{AC}$$

(simetrala ugla dijeli naspremnu stranicu u omjeru druge dvije)

$\measuredangle ACA_1 = 90°$ (ugao nad prečnikom)

$$p(B,B_1) \parallel p(A_1,C) \xRightarrow{T_0T_0} \frac{C_1M}{MC} = \frac{C_1B}{BA_1}.$$

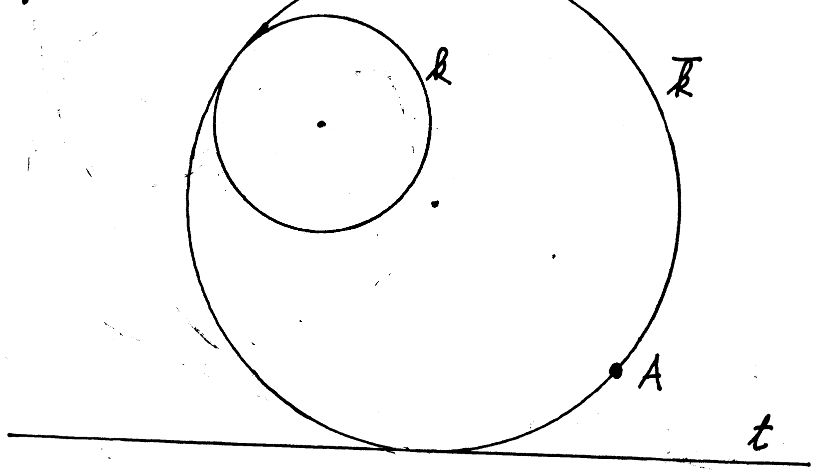
Kako je $C_1B \cong AC_1$ i $BA_1 \cong AC$ to

$$\frac{C_1M}{MC} = \frac{AC_1}{AC} \Rightarrow p(A,M) \text{ je simetrala ugla}$$

$\Rightarrow$ simetrala ugla kod A, visina iz B i težišna linija iz C sijeku se u istoj tački

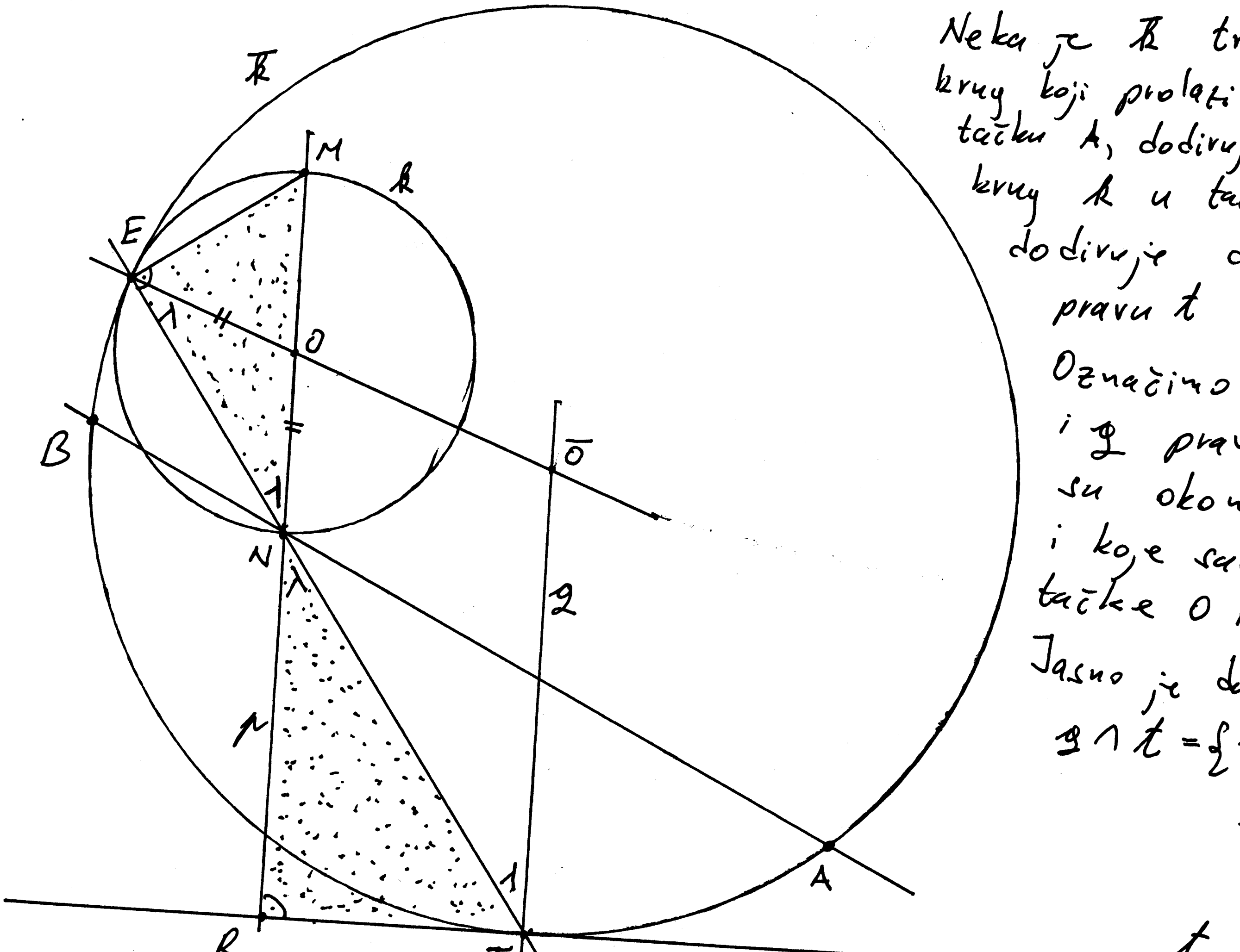
q.e.d.

(#) Dat je krug $k(O,r)$, tačka A i prava t. Konstruisati krug $\bar{k}(\bar{O},\bar{r})$ koji prolazi kroz tačku A, i dodiruje krug k i pravu t kao na skici.



Rj. <u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je $\bar{k}$ traženi krug koji prolazi kroz tačku A, dodiruje dati krug k u tački E i dodiruje datu pravu t u tački T. Označimo sa p i q prave koje su okomite na t i koje sadrže redom tačke O i $\bar{O}$. Jasno je da $q \cap t = \{T\}$.

Dalje, neka je $t \cap p = \{R\}$ i $p \cap k = \{M, N\}$ t. d. $R-N-M$. Prava $p(\bar{O}, E)$ prolazi kroz tačku O (ZAŠTO? Objasniti ovo). Posmatrajmo sad trouglove $\triangle EON$ i $\triangle E\bar{O}T$.

Trougao $\Delta E\bar{O}T$ je jednakokraki ($E\bar{O} \cong T\bar{O}$) pa je $\measuredangle \bar{O}ET \cong \measuredangle \bar{O}TE = \lambda$. Isto tako ΔEON je jkk ($OE \cong ON$) pa je $\measuredangle OEN \cong \measuredangle ONE = \lambda$. Želimo pokazati da $N \in p(E,T)$. Kako je $p \parallel q$ i $p(N,T)$ transferzala to je $\measuredangle TNR = \lambda$

Sad na pravoj p imamo $\measuredangle TNR = \lambda = \measuredangle ONE \Rightarrow N \in p(E,T)$

Posmatrajmo ΔRTN i ΔENM. U njima imamo po jedan ugao od $90°$, ugao λ pa je i treći ugao podudaran.

$$\xRightarrow{\text{(slič. UUU)}} \Delta RTN \sim \Delta ENM$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{NT}{NM} = \frac{NR}{NE} \Rightarrow NT \cdot NE = NM \cdot NR \quad \ldots(1)$$

Posmatrajmo pravu $p(N,A)$. Neka je $p(N,A) \cap K = \{A, B\}$ t. d. $B - N - A$. Ako posmatramo krug K imamo

$$NA \cdot NB = NT \cdot NE \quad \ldots(2)$$

$$(1) \text{ i } (2) \Rightarrow NA \cdot NB = NM \cdot NR$$

$$NB = \frac{NM \cdot NR}{NA} \quad \ldots(3)$$

Sad, kako su nam poznate tačke A, N, M, R to možemo prema (3) možemo konstruisati tačku B pa smo naš problem sveli na konstrukciju kruga kroz dvije tačke A i B tako da dodiruje datu pravu. Ovaj problem smo već imali, nije teško konstruisati pomoćni krug i uz pomoć njega dobiti tačku T.

Prema tome, traženi krug možemo konstruisati.