Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 17.02.2011.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija 1**

Zadatak br. 1

a) (Kosinusna teorema) Dat je raznostraničan trougao $\triangle ABC$ sa stranicama a, b, c i uglom $\alpha = \measuredangle BAC$. Dokazati da je $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\, cos\alpha$.

b) Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku i dodiruje datu pravu u datoj tački.

c) Nacrtati duž $x = \dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{2}}{ab}$, gdje su a i b date duži.

d) Jednakokraki trougao $\triangle ABC$ čiji je obim $O = 64\,cm$, a visina na osovici $h_a = 24\,cm$ rotirati oko vrha B za ugao od $90°$ u pozitivnom smjeru. Izračunati površinu novonastalog rotiranog trougla.

e) Dokazati da težište trougla dijeli težišnicu u omjeru 2:1.

Zadatak br. 2

Date su tačke A, M i N. Konstruisati paralelogram $\square ABCD$, tako da je M sredina stranice BC, a N sredina stranice CD.

Zadatak br. 3

U trouglu $\triangle ABC$ uglovi B i C su oštri, a visina iz tjemena A podudarna je sa stranicom BC. Dokazati da svi pravougaonici upisani u $\triangle ABC$ tako da im dva tjemena leže na stranicama BC, imaju jednake obime.

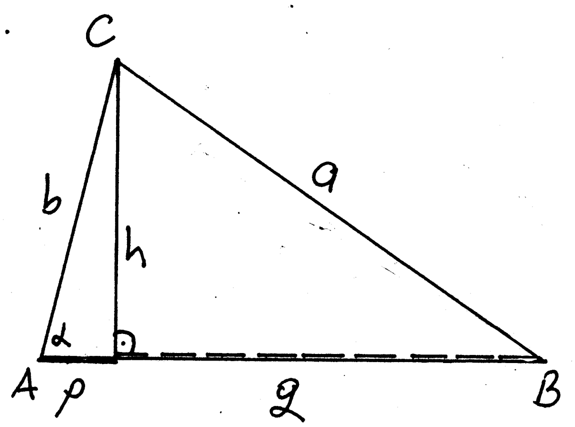
Zadatak br. 4

Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku i dodiruje dvije date kružnice.

(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(#) (Kosinusna teorema) Dat je raznostraničan trougao ΔABC sa stranicama a, b, c i uglom $\alpha = \sphericalangle BAC$. Dokazati da je $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Rj:



Uvedimo oznake kao na slici.

$$\cos\alpha = \frac{p}{b}$$

$$\begin{aligned} & a^2 = h^2 + q^2 \\ + \; & h^2 = b^2 - p^2 \\ \hline & a^2 = b^2 + q^2 - p^2 \quad \dots (*) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} q^2 - p^2 &= (c-p)^2 - p^2 \\ q^2 - p^2 &= c^2 - 2pc \\ p &= b\cos\alpha \end{aligned}\right\} (**)$$

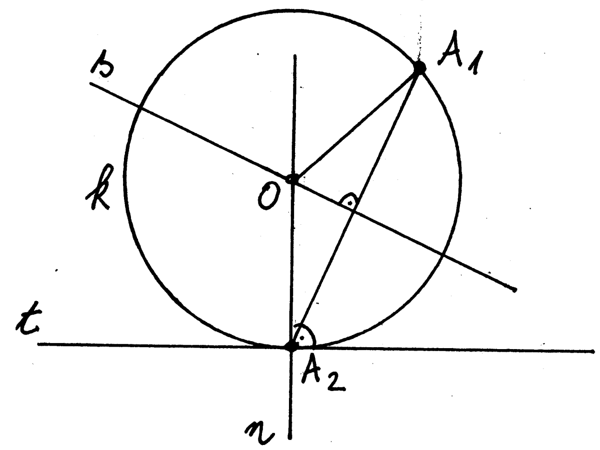
$(*)$ i $(**)$ $\Rightarrow$ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

q.e.d.

(#) Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku i dodiruje datu pravu u datoj tački.

R: **Analiza**

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je data prava t tačke $A_2 \in t$ i $A_1 \notin t$, i neka je k tražena kružnica.

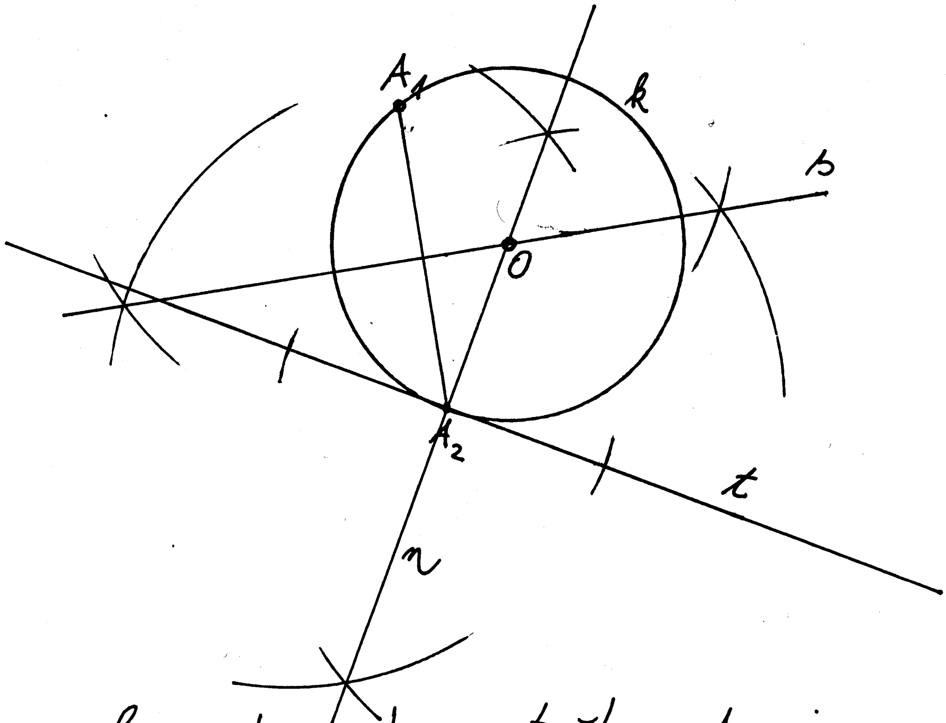


Primetimo da je $p(O, A_2) \perp t$ gdje je O centar kružnice k i primetimo da je $\triangle OA_2A_1$ jkk. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $O \in s$ gdje je s simetrala stranice A_1A_2.

Sad kako možemo konstruisati n i s to možemo konstruisati tačku O a time i traženu kružnicu k.

Konstrukcija

1. t, $A_2 \in t$, $A_1 \notin t$
2. pravu n: $n \perp t$ i $A_2 \in n$
3. pravu s, s simetrala A_2A_1
4. $n \cap s = \{O\}$
5. $k(O, OA_2)$



Dokaz

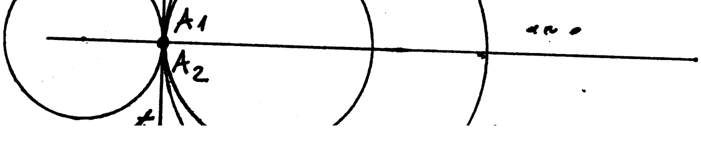
Da konstruisana kružnica k prolazi kroz tačku A_1 i dodiruje pravu t u tački A_2 slijedi iz Analize i Konstrukcije.

Determinacija

Ako je $A_1 \notin t$, $A_2 \in t$ zadatak uvijek ima jedinstveno rješenje

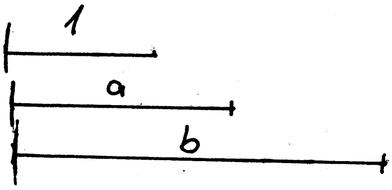
Ako $A_1 \in t$ i $A_2 \in t$, $A_1 \not\equiv A_2$ zadatak nema rješenja

Ako $A_1 \in t$, $A_2 \in t$ i $A_1 \equiv A_2$ zadatak ima ∞ mnogo rješe



④ Nacrtati duž $x = \dfrac{\sqrt{ab} + \sqrt{2}}{ab}$, gdje su a i b date duži.

Rj. Neka su date duži a, b i neka je data jedinična duž.



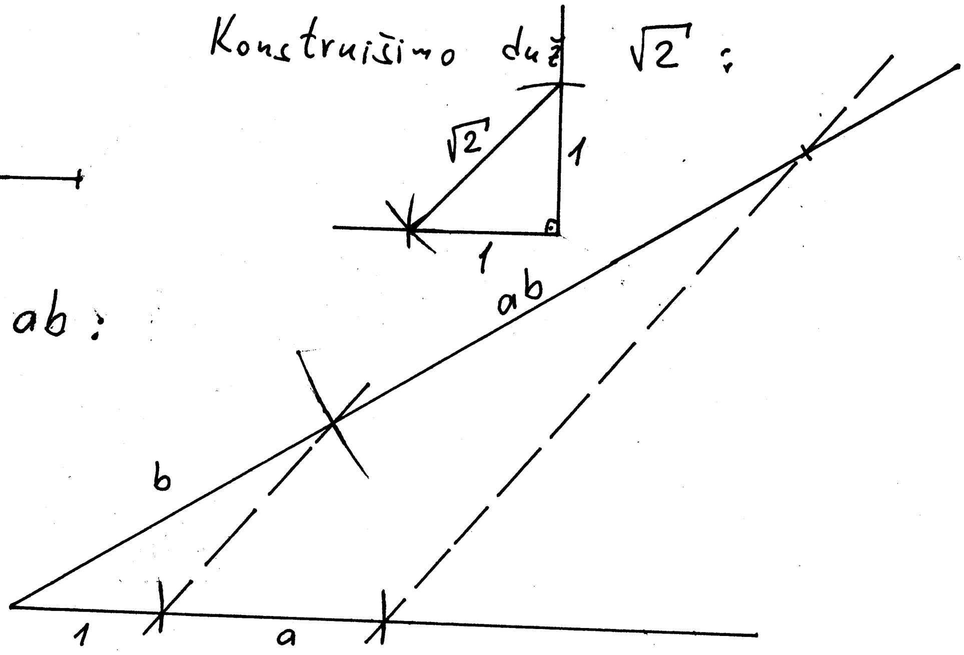
Konstruišimo duž $\sqrt{2}$:

Konstruišimo duž ab:

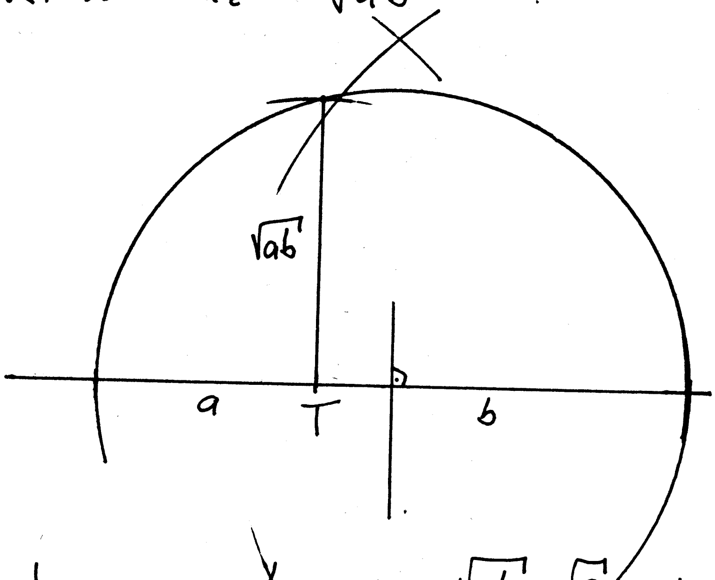
$x_1 = ab \quad /:b$

$\dfrac{x_1}{b} = \dfrac{a}{1}$

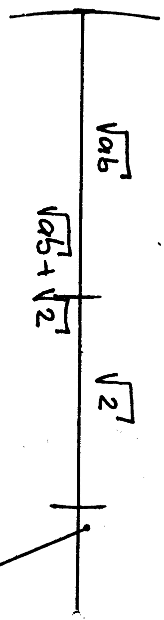
$\dfrac{1}{a} = \dfrac{b}{x_1}$



Konstruišimo duž $\sqrt{ab}$



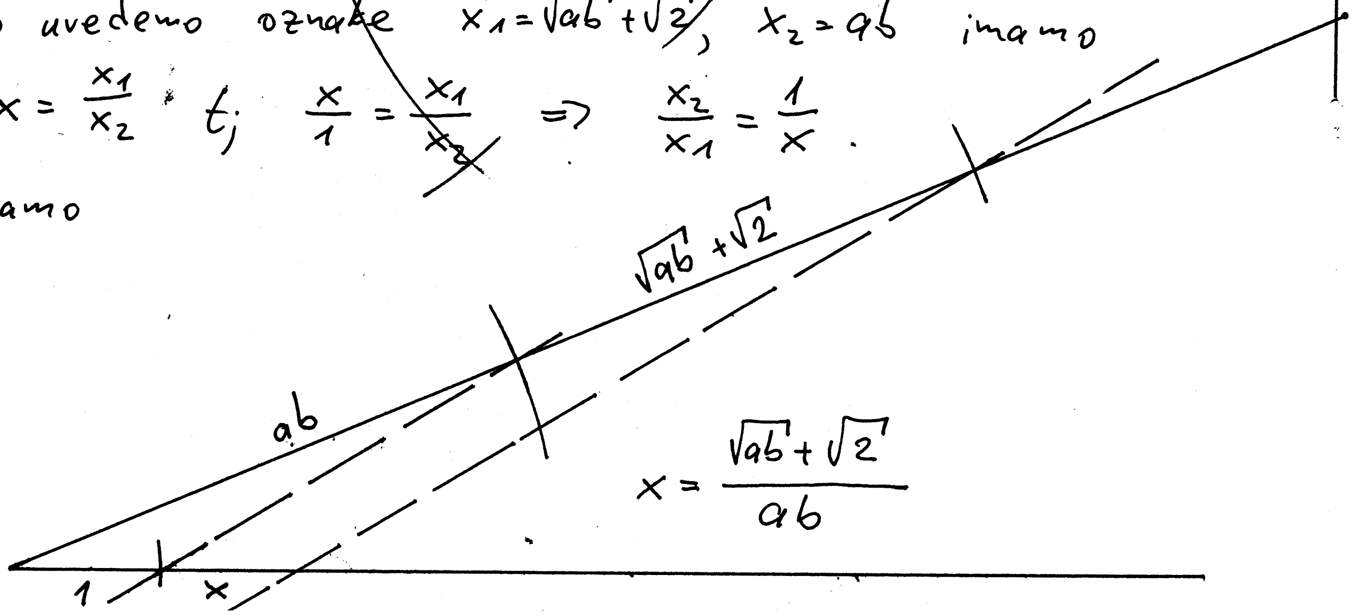
Konstruišimo duž $\sqrt{ab} + \sqrt{2}$:



Ako uvedemo oznake $x_1 = \sqrt{ab} + \sqrt{2}$, $x_2 = ab$ imamo

$x = \dfrac{x_1}{x_2}$ tj. $\dfrac{x}{1} = \dfrac{x_1}{\cancel{x_2}} \Rightarrow \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{1}{x}$.

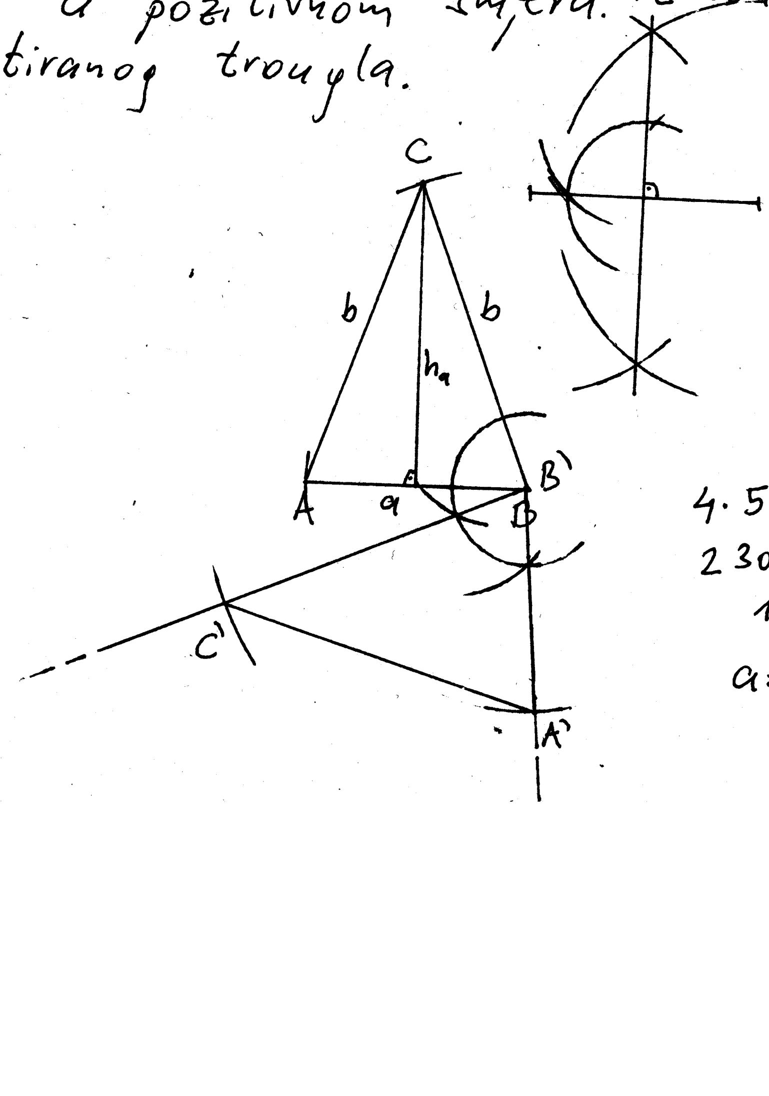
Imamo



$x = \dfrac{\sqrt{ab} + \sqrt{2}}{ab}$

#) Jednakokraki trougao ΔABC čiji je obim $O = 64\,cm$, a visina na osnovici $h_a = 24\,cm$ rotirati oko vrha B za ugao od 90° u pozitivnom smjeru. Izračunati površinu novonastalog rotiranog trougla.

Rj.



Rotacija čuva dužine pa su novonastali trougao $\Delta A'B'C'$ i ΔABC podudarni.

$O = 2b + a = 64 \Rightarrow 2b = 64 - a$

$h_a^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \qquad 4b^2 = (64-a)^2$

$24^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} \;/\cdot 4 \qquad = 4096 - 128a + a^2$

$4 \cdot 576 = 4b^2 - a^2$

$2304 = 4096 - 128a$

$128a = 1792$

$a = 14\ cm$

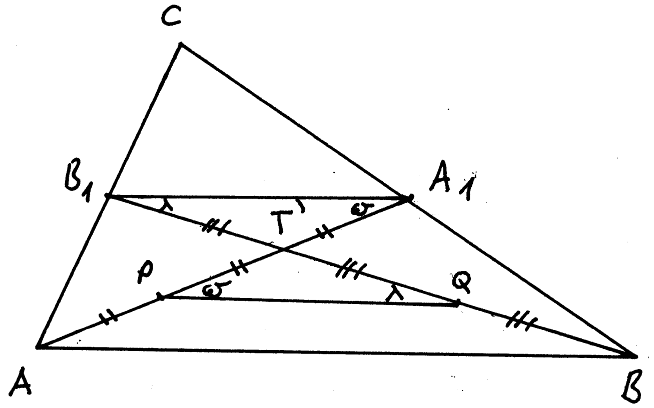
$P = \frac{a \cdot h_a}{2}$

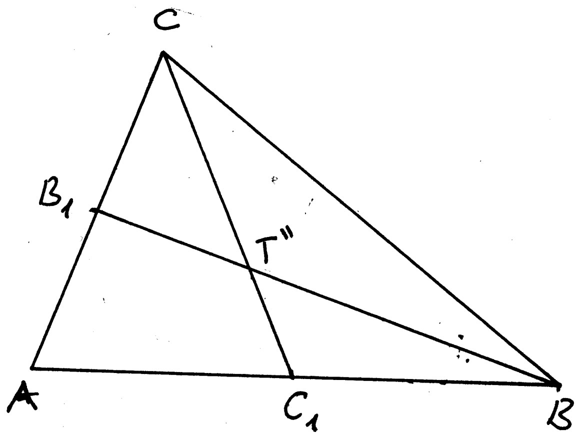
$P = \frac{14 \cdot 24}{2} = 7 \cdot 24$

$P = 168\ cm^2$

(#) Dokazati da težište trougla dijeli težišnice u omjeru 2:1.

Rj.





Neka su AA_1 i BB_1 težišnice u trouglu ΔABC i $\{T'\} = AA_1 \cap BB_1$.

A_1B_1 je srednja linija ΔABC pa $A_1B_1 \parallel AB$ i $A_1B_1 = \frac{1}{2} AB$.

Neka su P i Q redom sredine duži AT' i BT'.

PQ je srednja linija $\Delta ABT'$ pa $PQ \parallel AB$ i $PQ = \frac{1}{2} AB$

$\Rightarrow PQ \cong B_1A_1$. Dalje, posmatrajmo $\Delta PQT'$ i $\Delta B_1T'A_1$.

Ovi trouglovi su slični (imaju sva tri podudarna ugla

$$\Rightarrow \frac{PT'}{T'A_1} = \frac{QT'}{T'B_1} = \frac{PQ}{A_1B_1} = 1 \quad \Rightarrow PT' \cong A_1T' \text{ i } QT' \cong T'B_1$$

Pa imamo $$\frac{AT'}{T'A_1} = \frac{BT'}{T'B_1} = \frac{2}{1}.$$

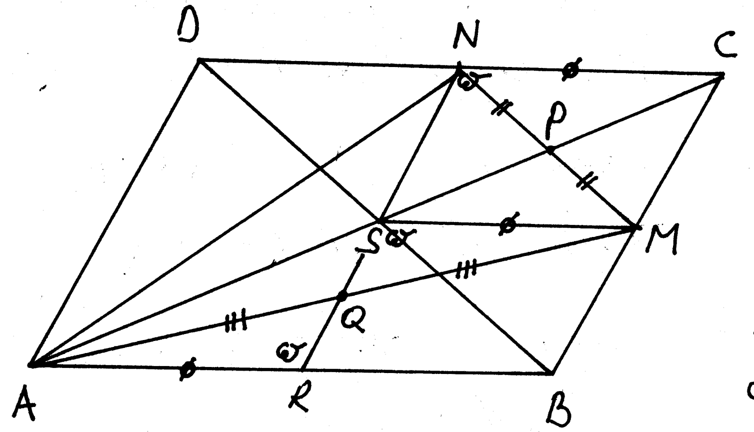
Na isti način ako pretpostavimo da se težišnice BB_1 i CC_1 sijeku u tački T'' bi dobili $\frac{CT''}{T''C_1} = \frac{BT''}{T''B_1} = \frac{2}{1}$.

Iz jedinstvenosti podjele duži BB_1 u datom omjeru slijedi da je $T' \equiv T''$ pa težište dijeli težišnicu u omjeru 2:1.

(#) Date su tačke A, M i N. Konstruisati paralelogram $\square ABCD$, tako da je M sredina BC, a N sredina stranice CD.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Dat je paralelogram $\square ABCD$, gdje su M sredina BC i N sredina CD.

Neka je tačka S presjek dijagonala AC i BD.

Dijagonale u paralelogramu se polove pa je S sredina dijagonala AC i BD.

S sredina BD, N sredina CD $\overset{u\ \triangle BCD}{\Longrightarrow}$ SN sred. lin. $\Rightarrow SN \parallel p(B,C)$

S sredina BD, M sredina BC $\overset{u\ \triangle DBC}{\Longrightarrow}$ SM sred. lin $\Rightarrow SM \parallel p(C,D)$

pa je $\square SMCN$ paralelogram. Neka je $\{P\} = SC \cap MN$

$\Rightarrow$ P sredina MN i P sredina SC tj. $MP \cong NP$.

Neka je $\{R\} = p(N,S) \cap AB$. Tad

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle ASR \cong \sphericalangle NSC \\ \sphericalangle ARS \cong \sphericalangle SNC = \omega \\ AS \cong SC \end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow} \triangle ARS \cong \triangle CNS \Rightarrow AR \cong CN \quad \dots (*)$$

Neka je $\{Q\} = SR \cap AM$. Tada

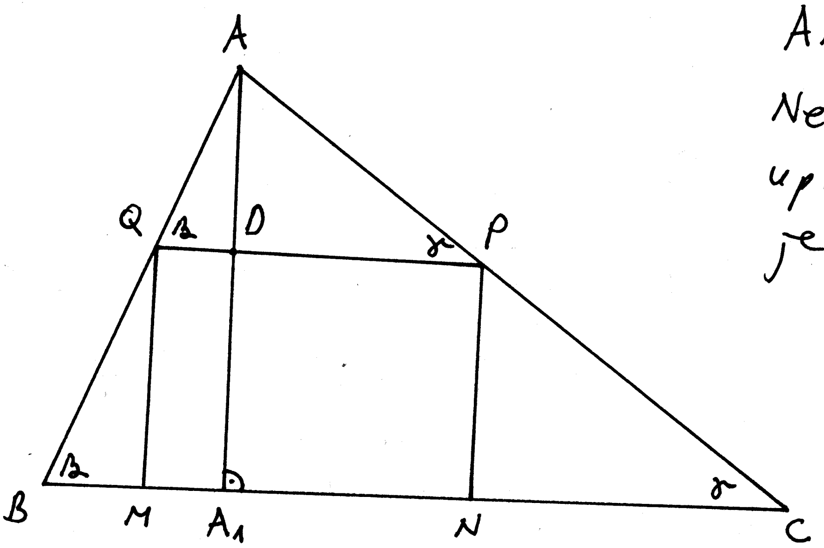
$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle AQR \cong \sphericalangle SQM \\ \sphericalangle QRA \cong \sphericalangle QSM = \omega \\ AR \cong SM \end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow} \triangle ARQ \cong \triangle MSQ \Rightarrow AQ \cong QM \quad \dots (**)$$

Na osnovu (*) i (**) $\Rightarrow$ S težište $\triangle AMN$.

Tačku S možemo konstruisati, a time i $p(N,C)$ i $p(M,C)$. Sad nije problem dobiti tačke B i D a time i $\square ABCD$.

(#) U trouglu ΔABC uglovi B i C su oštri, a visina iz tjemena A podudarna je sa stranicom BC. Dokazati da svi pravougaonici upisani u ΔABC tako da im dva tjemena leže na stranici BC, imaju jednake obime.

Rj.



$AA_1 \cong BC$ (AA_1 visina ΔABC)

Neka je $\square MNPQ$ proizvoljan pravougaonik upisan u ΔABC tako da je $M, N \in BC$, $P \in AC$ i $Q \in AB$.

$\{D\} = AA_1 \cap PQ$

Dokazat ćemo da je $O_{\square MNPQ} = 2AA_1$ iz čega će slijediti tačnost naše tvrdnje.

$$O_{\square MNPQ} = MN + PN + PQ + MQ \xRightarrow[MQ \cong PN]{MN \cong PQ} O_{\square MNPQ} = 2MQ + 2PQ$$

$$O_{\square MNPQ} = 2DA_1 + 2PQ \quad \dots (*)$$

$$p(B,C) \parallel p(P,Q) \xRightarrow{T_0 T_0} \frac{AC}{AP} = \frac{BC}{QP} \text{ i } \frac{AC}{AP} = \frac{AA_1}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{QP} = \frac{AA_1}{AD} \Rightarrow \frac{BC}{AA_1} = \frac{QP}{AD} \xRightarrow{BC \cong AA_1} \frac{QP}{AD} = 1$$

$$\Rightarrow QP = AD \xRightarrow{(*)} O_{\square MNPQ} = 2DA_1 + 2AD = 2AA_1.$$

Obim proizvoljnog pravougaonika upisanog u ΔABC iznosi $2AA_1$ $\Rightarrow$

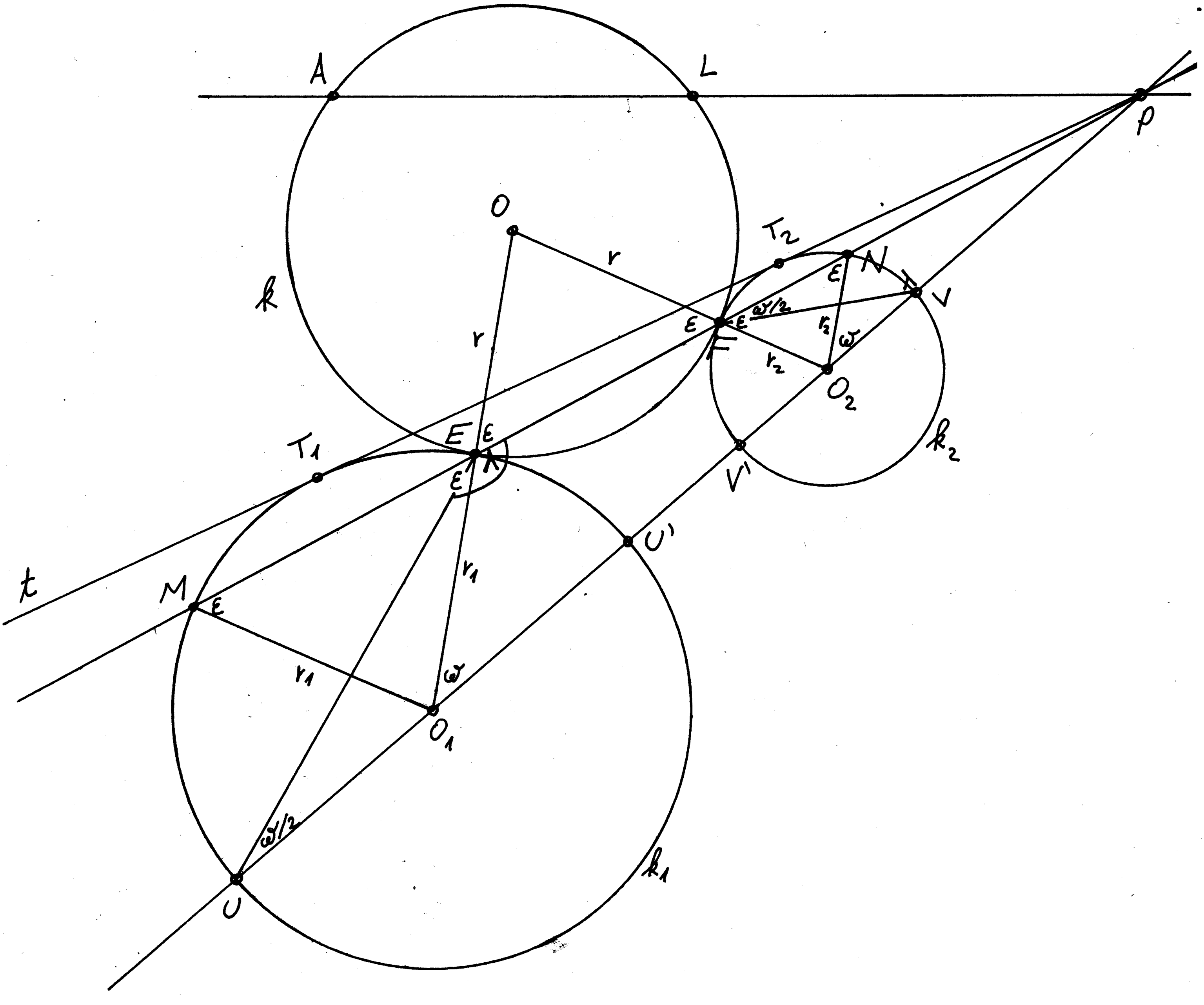
$\Rightarrow$ svi pravougaonici upisani u ΔABC tako da im dva tjemena leže na stranici BC imaju jednake obime

q.e.d.

(#) Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku i dodiruje dvije date kružnice.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $k(O,r)$ tražena kružnica koja dodiruje dvije date kružnice $k_1(O_1,r_1)$ i $k_2(O_2,r_2)$ i koja prolazi kroz tačku A. Neka su E i F redom dodirne tačke kružnica k_1 i k i k_2 i k. Primjetimo da je O_1-E-O i O_2-F-O. Dalje označimo sa M i N tačke na k_1 i k_2 koje pripadaju $p(E,F)$ (imamo M-E-F-N). Trouglovi ΔMO_1E, ΔOEF i ΔFNO_2 su jkk i kako su $\measuredangle MEO_1 \cong \measuredangle OEF$ i $\measuredangle EFO \cong \measuredangle NFO$ (kao unakrsni uglovi) imamo da su uglovi na osnovicama u spomenutim jkk trouglovima jednaki. Odatle možemo zaključiti da je $p(O_1,M) \parallel p(O_2,F)$ i $p(O_1,E) \parallel p(O_2,N)$ što ćemo kasnije iskoristiti.



Dalje označimo sa P presečnu tačku pravih $p(O_1, O_2)$ i $p(E, F)$; sa L kružnice k i prave $p(P, A)$. Prema potencijalu tačke P u odnosu na kružnicu k imamo:

$$PA \cdot PL = PE \cdot PF \qquad \dots (*)$$

Dalje, neka je $\{U, U'\} = k_1 \cap p(O_1, O_2)$ i $\{V, V'\} = k_2 \cap p(O_1, O_2)$ takve tačke da važi poredak $U - U' - V - V'$. Posmatrajmo trouglove ΔUPE i ΔFPV.

$p(O_1, E) \parallel p(O_2, N)$ i $p(O_1, O_2)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle O_1E \cong \measuredangle O_2N = \omega$.

$\measuredangle U'O_1E$ je centralni ugao nad tetivom $U'E \Rightarrow \measuredangle U'UE = \frac{\omega}{2}$

$\measuredangle VO_2N$ je centralni ugao nad tetivom $VN \Rightarrow \measuredangle VFN = \omega/2$

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle PUE \cong \measuredangle PFV = \frac{\omega}{2} \\ \measuredangle UPE \cong \measuredangle FPV \\ \quad \text{(zajednički ugao)} \\ \measuredangle PEU \cong \measuredangle PVE \\ \quad \text{(kao treći ugao)} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta PUE \sim \Delta PFV$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{PU}{PE} = \frac{PF}{PV} \Rightarrow PU \cdot PV = PE \cdot PF \qquad \dots (**)$$

Iz $(*)$ i $(**)$ $\Rightarrow PA \cdot PL = PU \cdot PV \Rightarrow PL = \dfrac{PU \cdot PV}{PA}$.

Vidimo, da bi mogli konstruisati tačku L potrebna nam je tačka P.

Posmatrajmo tri nekolinearne tačke F, N, O_2. Imamo

$$\left.\begin{array}{l} p(O_1, E) \parallel p(O_2, N) \Rightarrow \dfrac{PO_1}{PO_2} = \dfrac{O_1E}{O_2N} = \dfrac{r_1}{r_2} \\ \qquad \text{i} \quad \dfrac{PE}{PN} = \dfrac{O_1E}{O_2N} = \dfrac{r_1}{r_2} \\ p(O_1, M) \parallel p(O_2, F) \Rightarrow \dfrac{PM}{PF} = \dfrac{O_1M}{O_2F} = \dfrac{r_1}{r_2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

P je centar homotetije koja kružnicu k_2 preslikava u k_1 sa koeficijentom sličnosti $\frac{r_1}{r_2}$.

Iz tačke P povucimo tangentu t na kružnicu k_2 i neka je $\{T_2\} = t \cap k_2$. Kako je P centar homotetije koja kružnicu k_2 preslikava u k_1 to i tačku T_2 preslikava u T_1, pa je $p(P, T_1)$ tj. t tangenta kružnice k_1. Tangentu t možemo konstruisati a time i tačku P. Poslije tačke P možemo konstruisati tačku L pa se zadatak svodi na treći Apolonijev problem.