Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 03.02.2011.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija 1**

Zadatak br. 1

a) Date su duži a i b. Nacrtati duž x ako je $x\sqrt{2}+1=\dfrac{\sqrt{3a}-a^2}{\sqrt{b}}$, gdje je $a<1<b$.

b) Pravougaonik je podjeljen na 9 manjih pravougaonika. Površine pet od njih su 5, 3, 2, 9 i 2 cm^2 (vidi sliku). Odrediti površinu pravougaonika.

5	3	2
	9	
		2

c) Pravilan šestougao je šestougao kod koga su podudarne sve stranice i podudarni svi uglovi. Dat je pravilan šestougao ABCDEF. Dokazati da se dijagonale AD, CF i BE sijeku u istoj tački S.

d) Dat je jednakokraki trougao $\triangle ABC$ sa osnovicom BC tako da je ugao $\measuredangle BAC > 50°$. Na osnovici BC data je tačka M takva da je ugao $\measuredangle BAM = 50°$, a na kraku AC tačka N takva da je $AM \cong AN$. Koliki je ugao $\measuredangle CMN$.

e) Data je prava t i tačke $A, B \notin t$ takve da $p(A,B)||t$. Konstruisati kružnicu kroz tačke A i B koja dodiruje datu pravu t.

Zadatak br. 2

Kroz datu tačku konstruisati pravu na kojoj data kružnica odsjeca tetivu podudarnu datoj duži.

Zadatak br. 3

Data je četvrtina kruga ograničena poluprečnicima OA i OB. Paralelno sa tetivom AB, povučena je prava koja siječe tu četvrtinu kruga. Ako označimo sa C jednu od tačaka presjeka ove prave sa lukom kruga, a sa P i Q tačke presjeka sa polupravima OA i OB, dokazati da je $AB^2 = PC^2 + QC^2$.

Zadatak br. 4

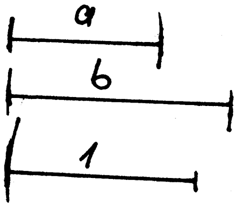
Date su prave p i q, $p \perp q$ i data je tačka A takva da $A \notin p$ i $A \notin q$. Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku A i dodiruje dvije date prave p i q.

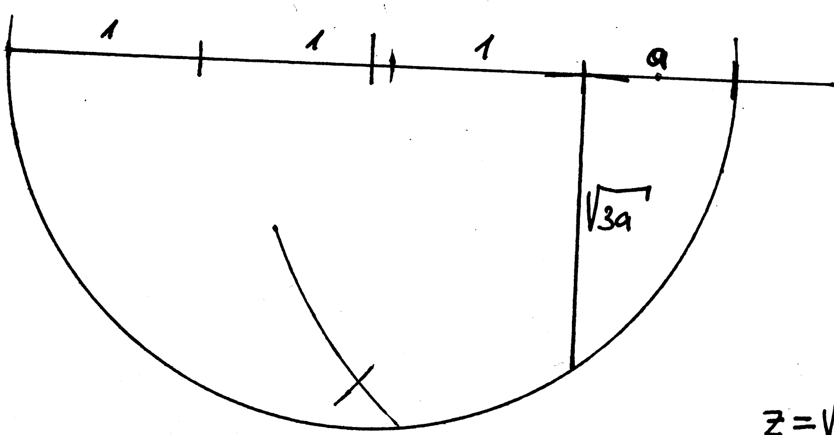
(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(#) Date su duži a i b. Nacrtati duž x ako je

$$x\sqrt{2}+1=\frac{\sqrt{3a}-a^2}{\sqrt{b}}, \quad a<1<b.$$

Rj.





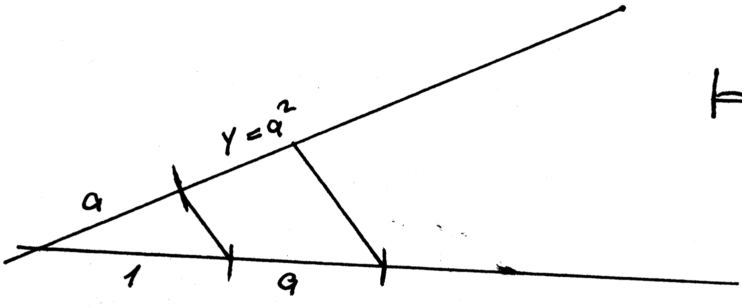
$z=\sqrt{3a}-a^2$

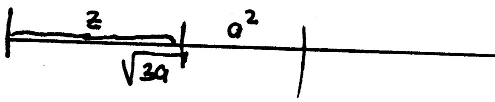
$Y=a^2$

$Y=a\cdot a$

$\frac{Y}{a}=\frac{a}{1}$

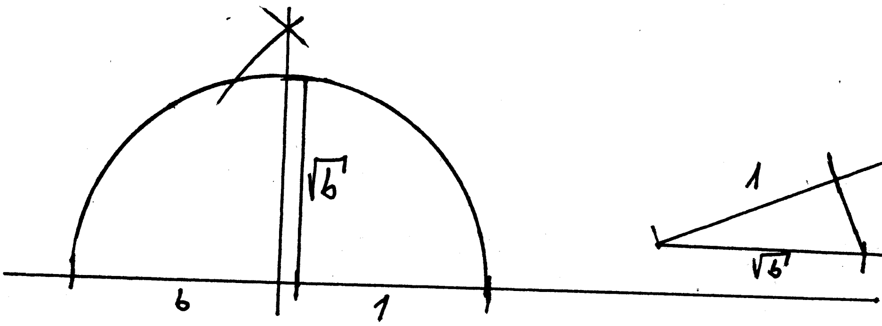
$\frac{1}{a}=\frac{a}{Y}$

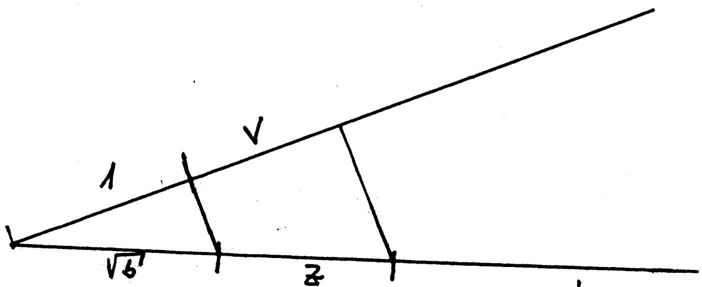




$V=\frac{z}{\sqrt{b}}$

$\frac{\sqrt{b}}{z}=\frac{1}{V}$



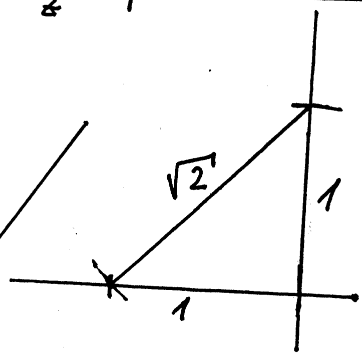


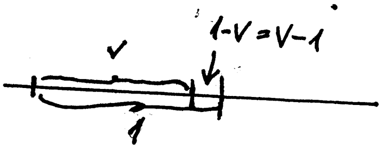
Sad imamo $x\sqrt{2}+1=V$

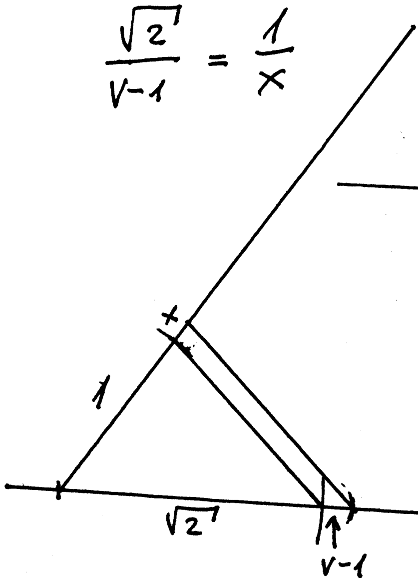
$x\sqrt{2}=V-1$

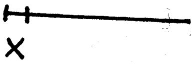
$x=\frac{V-1}{\sqrt{2}}$

$\frac{\sqrt{2}}{V-1}=\frac{1}{x}$









(#) Pravougaonik je podjeljen na 9 manjih pravougaonika. Površine pet od njih su 5, 3, 9, 2 i 2 cm^2 (vidi sliku). Odrediti površinu pravougaonika.

5	3	2
	9	
		2

Rj: Označimo stranice manjih pravougaonika sa a, b, c, d, e i f kao na slici

	a	b	c
d	5	3	2
e	15	9	6
f	5	3	2

Površine tri pravougaonika su dovoljna da odrede površinu četvrtog.

$a \cdot d = 5$
$b \cdot d = 3 \Rightarrow d = \frac{3}{b}$
$e \cdot b = 9$

$\Rightarrow a \cdot d = 5$, $a \cdot \frac{3}{b} = 5$, $3a = 5b$, $a = \frac{5}{3} b$

$$e \cdot a = e \cdot \frac{5}{3} b = \frac{5}{3} e b = 5 \cdot 3 = 15$$

$b \cdot d = 3 \Rightarrow d = \frac{3}{b}$
$b \cdot e = 9$
$c \cdot d = 2$

$\Rightarrow c \cdot d = 2$, $c \cdot \frac{3}{b} = 2$, $3c = 2b$, $c = \frac{2}{3} b$

$$e \cdot c = e \cdot \frac{2}{3} b = \frac{2}{3} e b = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6$$

$e \cdot b = 9 \Rightarrow e = \frac{9}{b}$
$e \cdot c = 6$
$f \cdot c = 2$

$\Rightarrow e \cdot c = 6$, $\frac{9}{b} \cdot c = 6$, $9c = 6b \quad /:3$

$2b = 3c$
$b = \frac{3}{2} c$

$$f \cdot b = f \cdot \frac{3}{2} c = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$$

$a \cdot e = 15 \Rightarrow e = \frac{15}{a}$
$e \cdot b = 9$
$f \cdot b = 3$

$\Rightarrow e \cdot b = 9$, $\frac{15}{a} \cdot b = 9$, $15b = 9a \quad /:3$

$3a = 5b$
$a = \frac{5}{3} b$

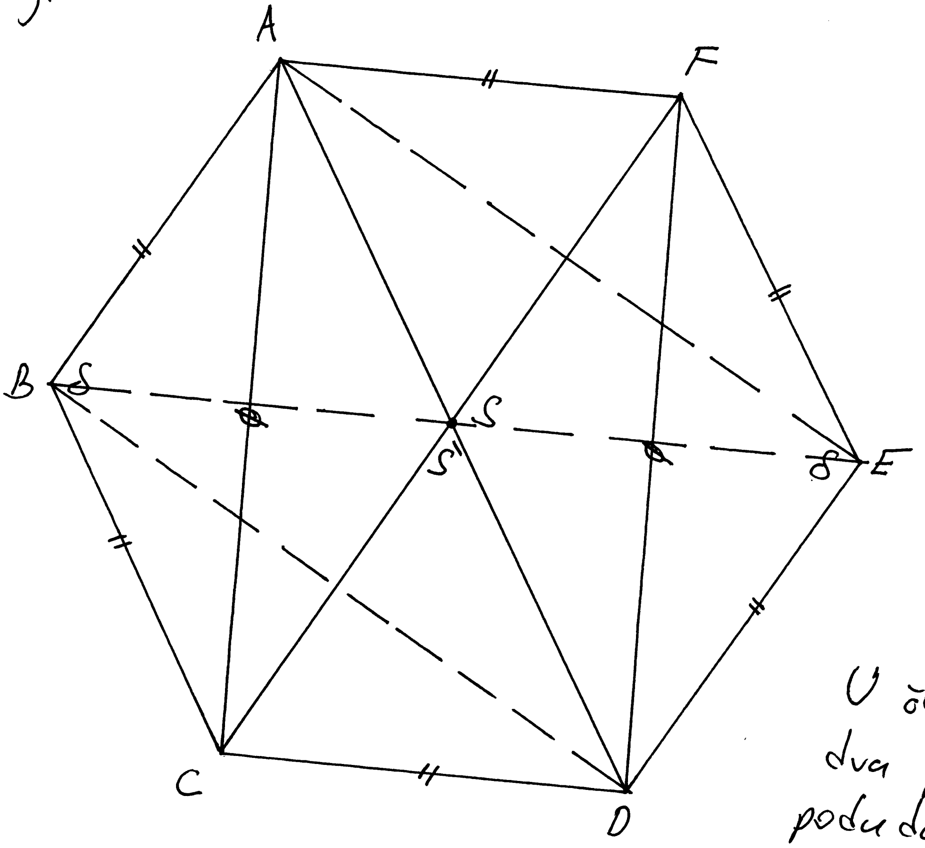
$$f \cdot a = f \cdot \frac{5}{3} b = \frac{5}{3} \cdot 3 = 5$$

$10 + 30 + 10$

Površina pravougaonika je 50 cm^2.

(#) Pravilan šestougao je šestougao kod koga su podudarne sve stranice i podudarni svi uglovi. Dat je pravilan šestougao ABCDEF. Dokazati da se dijagonale AD, CF i BE sijeku u istoj tački S.

Rj.



Presjek dijagonala AD i CF označimo sa S.
Posmatrajmo $\triangle ABC$ i $\triangle FDE$.
Imamo:

$$\left.\begin{array}{c} AB \cong EF \\ \measuredangle ABC \cong \measuredangle FED = \delta \\ BC \cong ED \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow}$$

$$\triangle ABC \cong \triangle FED$$
$$\Downarrow$$
$$AC \cong FD$$

U četverouglu $\square ABCD$ imamo dva para naspremnih podudarnih stranica $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\square ACDF$ je paralelogram $\Rightarrow$ dijagonale CF i AD se polove tj. S je sredina dijagonale CF i S je sredina dijagonale AD.

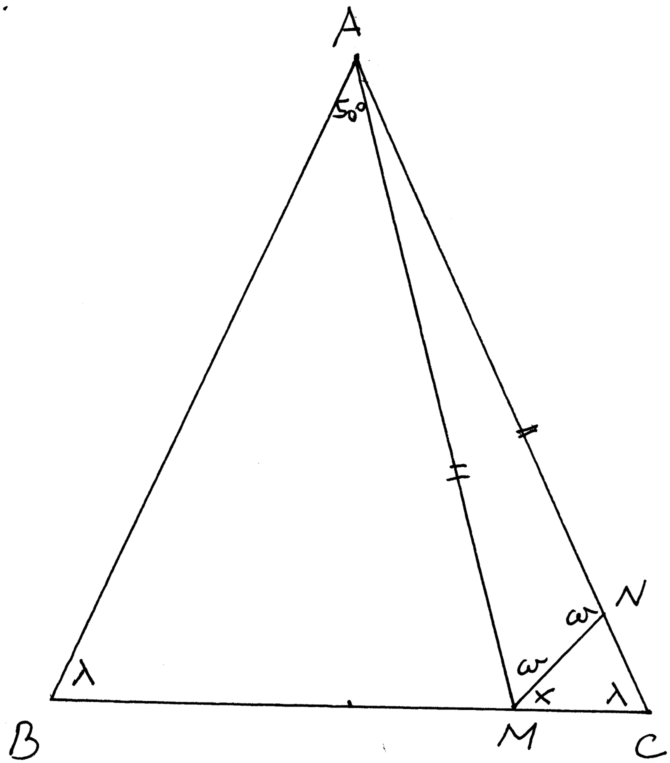
Dalje neka je $\{S'\} = BE \cap AD$. Na isti način kao maloprije se pokaže da je $\square BDEA$ paralelogram $\Rightarrow$ dijagonale se polove $\Rightarrow$ S' sredina BE i S' sredina AD.

$$\left.\begin{array}{l} S' \text{ sredina } AD \\ S \text{ sredina } AD \end{array}\right\} \Rightarrow S \equiv S' \Rightarrow$$ dijagonale AD, CF i BE se sijeku u tački S

q.e.d.

(#) Zadan je jednakokraki trougao ΔABC sa osnovicom BC tako da je ugao $\measuredangle BAC > 50^\circ$. Na osnovici BC data je tačka M takva da je ugao $\measuredangle BAM = 50^\circ$, a na kraku AC tačka N takva da je $AM \cong AN$. Koliki je ugao $\measuredangle CMN$.

Rj.



$\measuredangle MNA$ je vanjski ugao ΔMCN

$$\omega = x + \lambda \quad \dots (1)$$

$\measuredangle AMC$ je vanjski ugao ΔABM

$$50^\circ + \lambda = \omega + x \quad \dots (2)$$

(1)+(2):

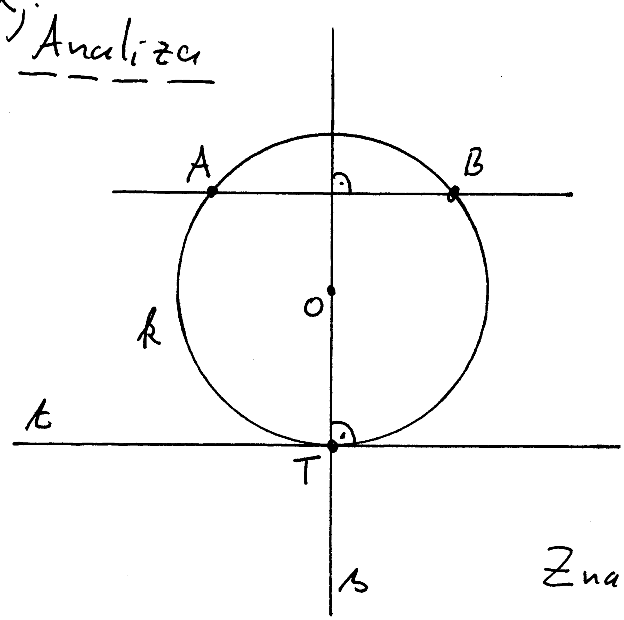
$$\omega + 50^\circ + \lambda = x + \lambda + \omega + x$$

$$2x = 50^\circ$$

$$x = 25^\circ$$

\#) Data je prava t i tačke $A, B \notin t$ takve da $p(A,B) \parallel t$. Konstruisati kružnicu kroz tačke A, B koja dodiruje datu pravu t.

Rj.: Analiza



Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $k(O,r)$ tražena kružnica koja dodiruje pravu t u tački T i koja prolazi kroz tačke A i B.

Neka je s simetrala duži AB. Tačka $O \in s$ a kako je $p(AB) \parallel t$ to $s \perp t$.

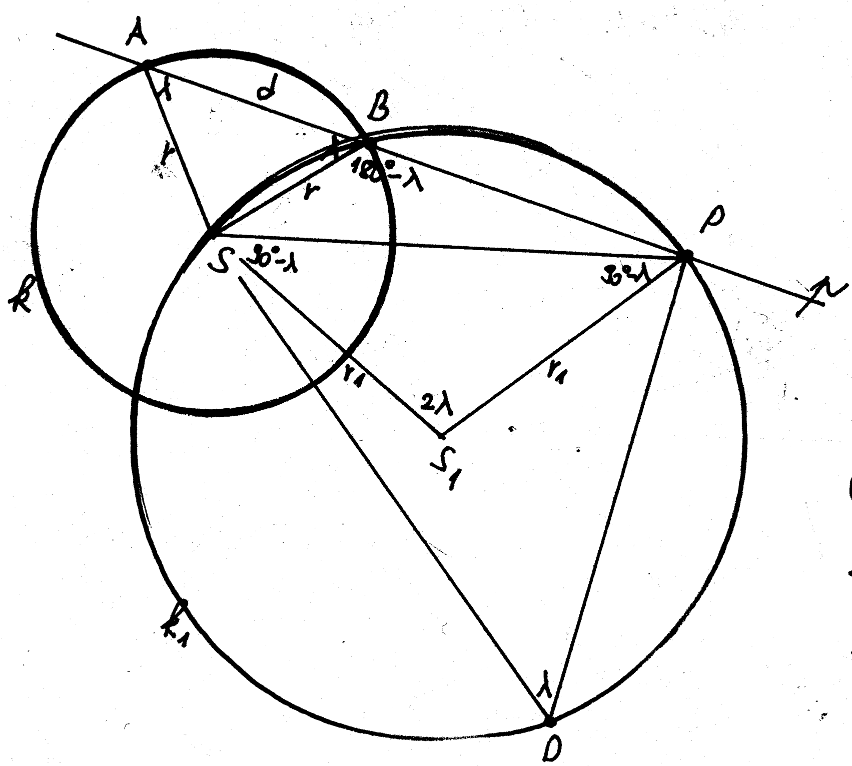
Znamo da je $OT \perp t$ a kako je i $s \perp t$ to je $s \cap t = \{T\}$. Tačka O se nalazi na presjeku simetrala duži AB, AT i BT.

Prema tome kako su date tačke A i B, prava t to nije teško konstruisati simetralu s duži AB, dobiti tačku T a poslije toga i $k(O,r)$.

(#) Kroz datu tačku konstruisati pravu na kojoj data kružnica odsjeca tetivu podudarnu datoj duži.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je p tražena prava koja prolazi kroz datu tačku P i na datoj kružnici $k(S,r)$ odsjeca tetivu AB podudarnu datoj duži d.

Označimo uglove

$\measuredangle SAB \cong \measuredangle SBA = \lambda$

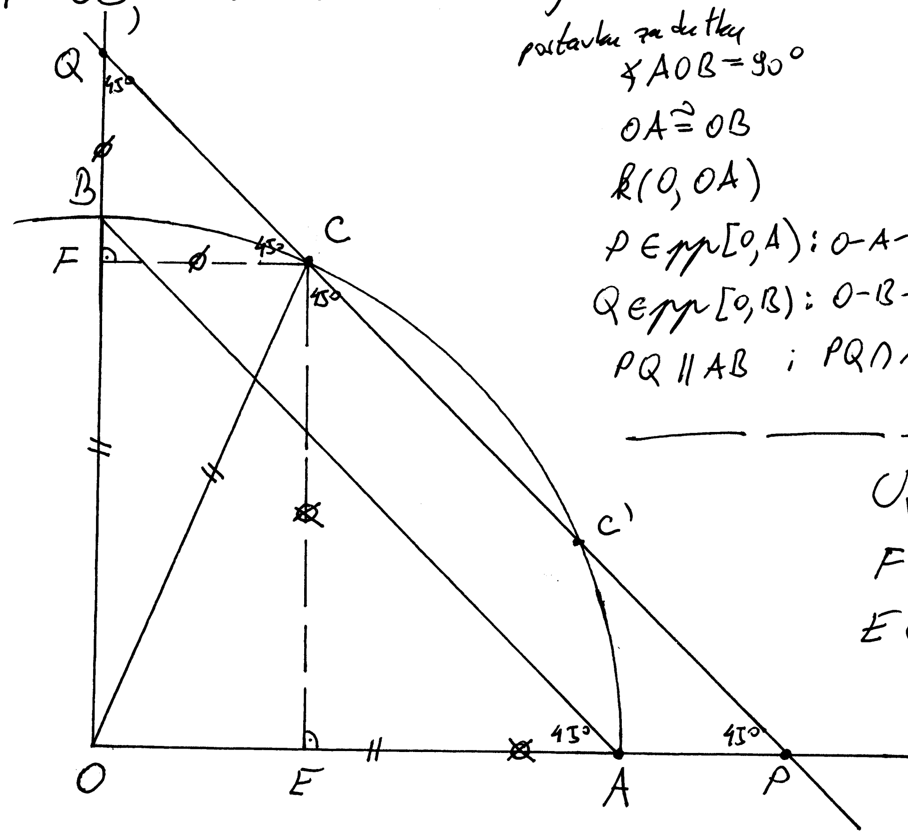
$\Rightarrow \quad \measuredangle PBS = 180° - \lambda$

Ako je $k_1(S_1, r_1)$ kružnica opisana oko $\triangle SPB$ tada proizvoljan oštri periferiski ugao nad tetivom SP iznosi λ, centralni ugao nad tetivom SP je $\measuredangle SS_1P = 2\lambda \Rightarrow \measuredangle PSS_1 \cong \measuredangle S_1PS = 90° - \lambda$.

U trouglu $\triangle ASB$ su nam poznate sve tri stranice pa ugao λ možemo konstruisati. Kako je data duž PS to i kružnicu k_1 možemo konstruisati pa dobiti i tačku B. Sad nije teško konstruisati traženu pravu p.

(#) Data je četvrtina kruga ograničena poluprečnicima OA i OB. Paralelno s tetivom AB, povučena je prava koja siječe tu četvrtinu kruga. Ako označimo sa C jednu od tačaka presjeka ove prave sa lukom kružnice, a sa P i Q tačke presjeka sa polupravima OA i OB, dokazati da je $AB^2 = PC^2 + QC^2$.

Rj.



postavka zadatka

$\sphericalangle AOB = 90°$

$OA \cong OB$

$k(O, OA)$

$P \in pp[O, A) : O-A-P$

$Q \in pp[O, B) : O-B-Q$

$PQ \parallel AB$; $PQ \cap k = \{C, C'\}$

$\Rightarrow AB^2 = PC^2 + QC^2$

Uvedimo oznake

$F \in OB$ $\quad CF \parallel OA$

$E \in OA$ $\quad CE \parallel OB$

Primjetimo da je $\triangle OAB$ jkk $\Rightarrow \sphericalangle OAB = 45°$

Kako je $AB \parallel PQ$ $\Rightarrow \sphericalangle OPQ = 45°$ i kako $FC \parallel OP \Rightarrow \sphericalangle FCQ = 45°$

$\Rightarrow \triangle QFC$ i $\triangle CEP$ su jkk.

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 \overset{OA \cong OB \cong OC}{=\!=\!=} 2OC^2 \quad \dots (1)$$

$$PC^2 + QC^2 = \underline{EP}^2 + EC^2 + \underline{QF}^2 + FC^2 \overset{EP \cong EC \cong OF,\ FQ \cong FC \cong OE}{=\!=\!=\!=}$$

$$= OF^2 + FC^2 + OE^2 + EC^2 = OC^2 + OC^2 = 2OC^2 \quad \dots (2)$$

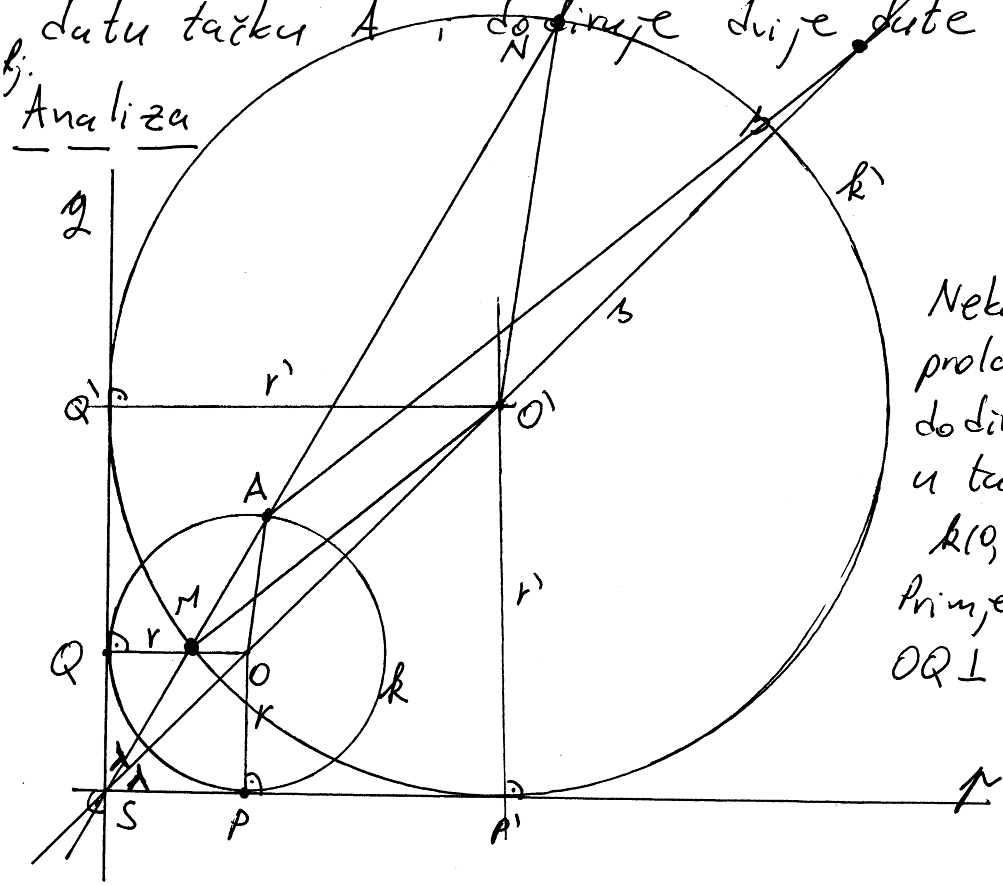
(1) i (2) $\Rightarrow$ $AB^2 = PC^2 + QC^2$

q.e.d.

(#) Date su prave p i g, $p \perp g$ i data je tačka A taka da $A \notin p$ i $A \notin g$. Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku A i dodiruje dvije date prave p i g.

Rj.

Analiza



Pretpostavimo da je zadatak riješen.
Neka je k traženi krug koji prolazi kroz tačku A i dodiruje prave p i g redom u tačkama P i Q.
$k(O, r)$
Primjetimo da je $OP \perp p$ i $OQ \perp g$. Kako je $p \perp g$ imamo:

$$\left.\begin{array}{l} OP \cong QS \\ OQ \cong PS \\ OS \cong OS \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \triangle POS \cong \triangle SOQ$$
$$\Downarrow$$
$$\measuredangle PSO \cong \measuredangle OSQ = \lambda$$

Prema tome tačka O se nalazi na simetrali b ugla $\measuredangle pSg$.

Neka je $k'(O', r')$ krug čiju smo tačku O' uzeli proizvoljno na pravoj b. Označimo sa M i N tačke presjeka $p(S,A)$ sa krugom k', a neka su P' i Q' ortogonalne projekcije tačke O' na prave p i g.

$$\left.\begin{array}{l} O'Q' \parallel OQ \overset{T_oT_o}{\Longrightarrow} \dfrac{SO'}{SO} = \dfrac{SQ'}{SQ} = \dfrac{r'}{r} \\ O'P' \parallel OP \overset{T_oT_o}{\Longrightarrow} \dfrac{SO'}{SO} = \dfrac{SP'}{SP} = \dfrac{r'}{r} \end{array}\right\} \Rightarrow$$ kružnica k' je dobijena iz kruga k homotetijom sa koeficijentom $\dfrac{r'}{r} \Rightarrow$

$\Rightarrow O'N \parallel OA$

Kružnica k sad možemo konstruisati.