Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 29.01.2010.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija 2**

Zadatak br. 1 (20 boda)

a) Dužine stranica trougla su tri uzastopna neparna broja, pri čemu je zbir dužina dviju dužih stranica za $7cm$ manji od trostruke dužine najmanje stranice. Koliki je obim tog trougla? Odgovor obrazložiti.

b) Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku i dodiruje datu pravu u datoj tački.

c) Nacrtati duž $x = \dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{2}}{ab}$, gdje su a i b date duži.

d) Paralelogram $\square HIDR$ preslikati homotetično s koeficijentom $\frac{3}{4}$ u odnosu na tačku D. Ako je $O_{\square HIDR} = 60\,cm$ izračunati obim novodobijenog četverougla.

e) U trouglu $\triangle ABC$ je $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 4 : 5$. Dokazati da prava koja sadrži poluprečnik BS (S je centar opisane kružnice $\triangle ABC$) siječe stranicu AC u tački N koja je dijeli u omjeru $1 : 2$ računajući od vrha A.

Zadatak br. 2 (20 bodova)

Kroz tačku M-sredinu osnovice AB jednakokrakog trougla $\triangle ABC$ prolazi prava koja siječe prave $p(A,C)$ i $p(B,C)$ u tačkama P i Q redom, tako da je $P - M - Q$. Dokazati da je $PQ > AB$.

Zadatak br. 3 (20 bodova)

Konstruisati raznostranični trougao $\triangle ABC$ ako su pozati stranica b, visina h_c (koja odgovara stranici c) i zbir $a + c$.

Zadatak br. 4 (20 bodova)

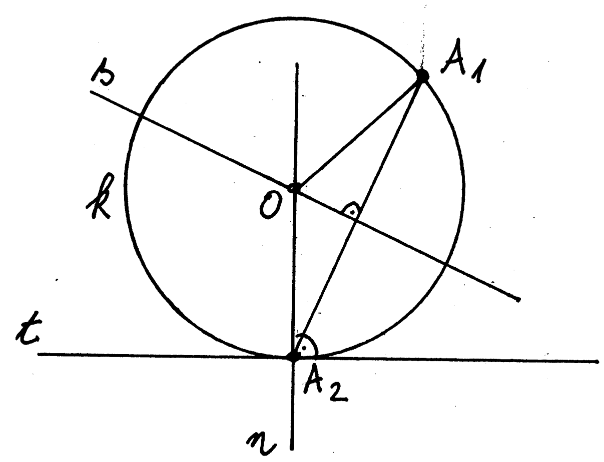
Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku i dodiruje dvije date kružnice.

(Za uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(#) Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku i dodiruje datu pravu u datoj tački.

R: Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je data prava t tačke $A_2 \in t$ i $A_1 \notin t$, i neka je k tražena kružnica.



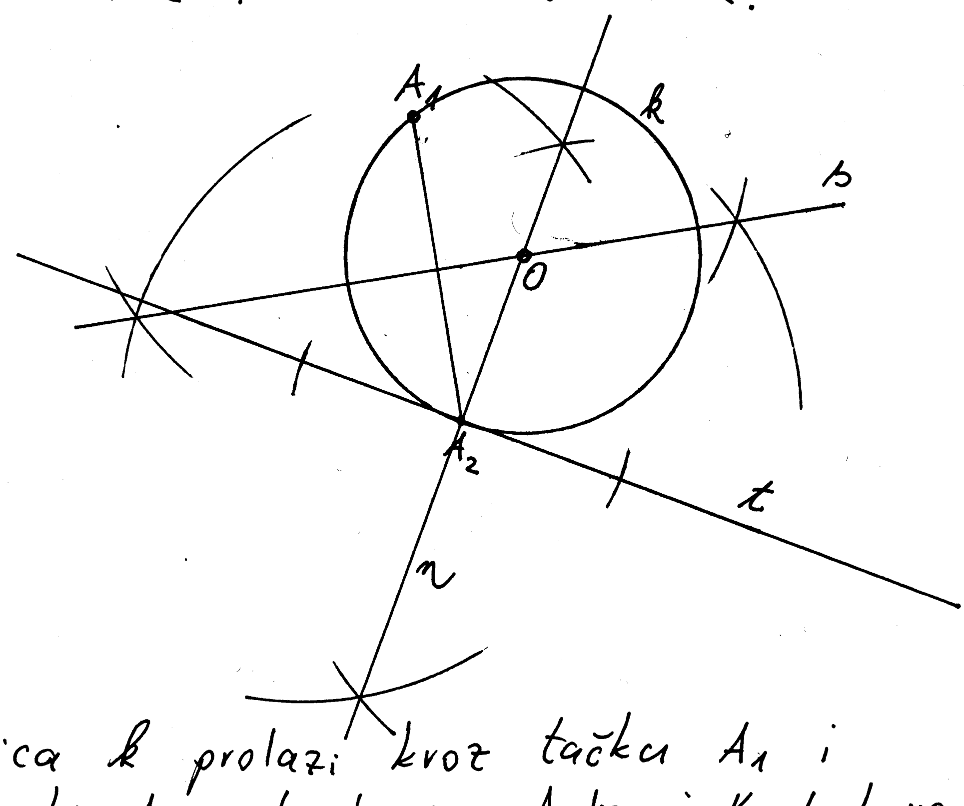
Primjetimo da je $p(O, A_2) \perp t$ gdje je O centar kružnice k i primjetimo da je $\triangle OA_2A_1$ jkk. $\Rightarrow$

$\Rightarrow O \in s$ gdje je s simetrala stranice A_1A_2.

Sad kako možemo konstruisati n i s to možemo konstruisati tačku O a time i traženu kružnicu k.

Konstrukcija

1. t, $A_2 \in t$, $A_1 \notin t$
2. pravu n: $n \perp t$ i $A_2 \in n$
3. pravu s, s simetrala A_2A_1
4. $n \cap s = \{O\}$
5. $k(O, OA_2)$



Dokaz

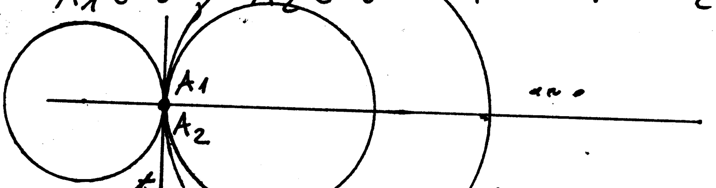
Da konstruisana kružnica k prolazi kroz tačku A_1 i dodiruje pravu t u tački A_2 slijedi iz Analize i Konstrukcije.

Determinacija

Ako je $A_1 \notin t$, $A_2 \in t$ zadatak uvijek ima jedinstveno rješenje

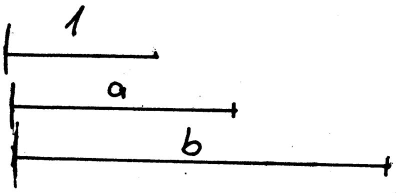
Ako $A_1 \in t$ i $A_2 \in t$, $A_1 \not\equiv A_2$ zadatak nema rješenja

Ako $A_1 \in t$, $A_2 \in t$ i $A_1 \equiv A_2$ zadatak ima ∞ mnogo rješenja



Nacrtati duž $x = \dfrac{\sqrt{ab} + \sqrt{2}}{ab}$, gdje su a i b date duži.

Rj. Neka su date duži a, b i neka je data jedinična duž.



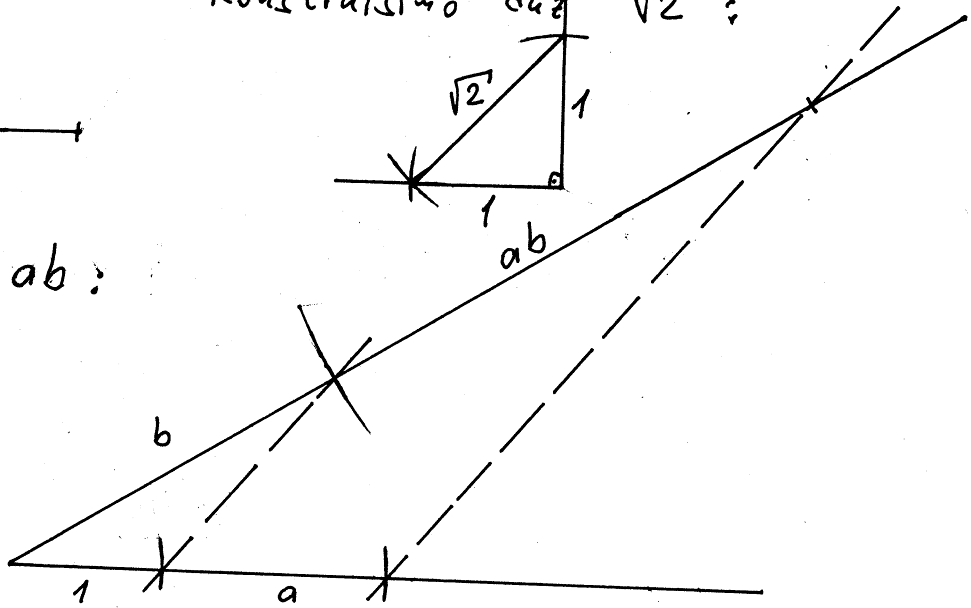
Konstruišimo duž $\sqrt{2}$:

Konstruišimo duž ab:

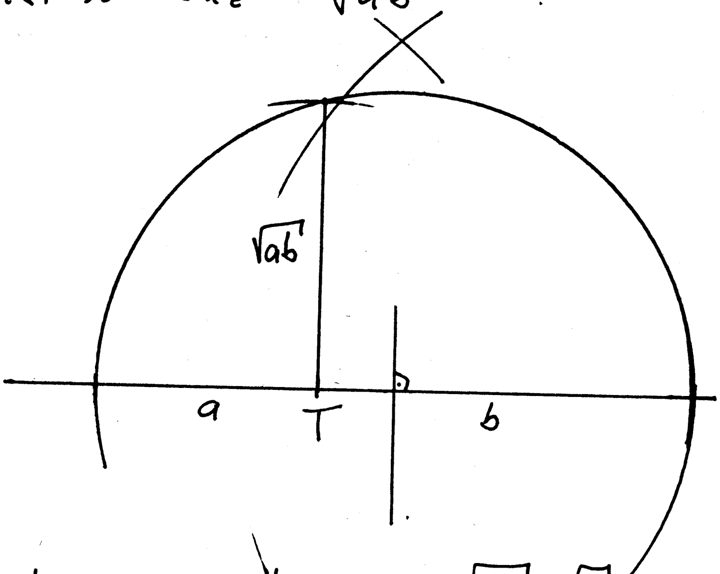
$x_1 = ab \quad /: b$

$\dfrac{x_1}{b} = \dfrac{a}{1}$

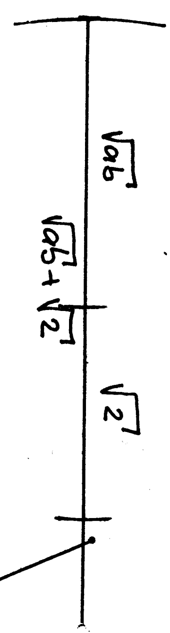
$\dfrac{1}{a} = \dfrac{b}{x_1}$



Konstruišimo duž $\sqrt{ab}$



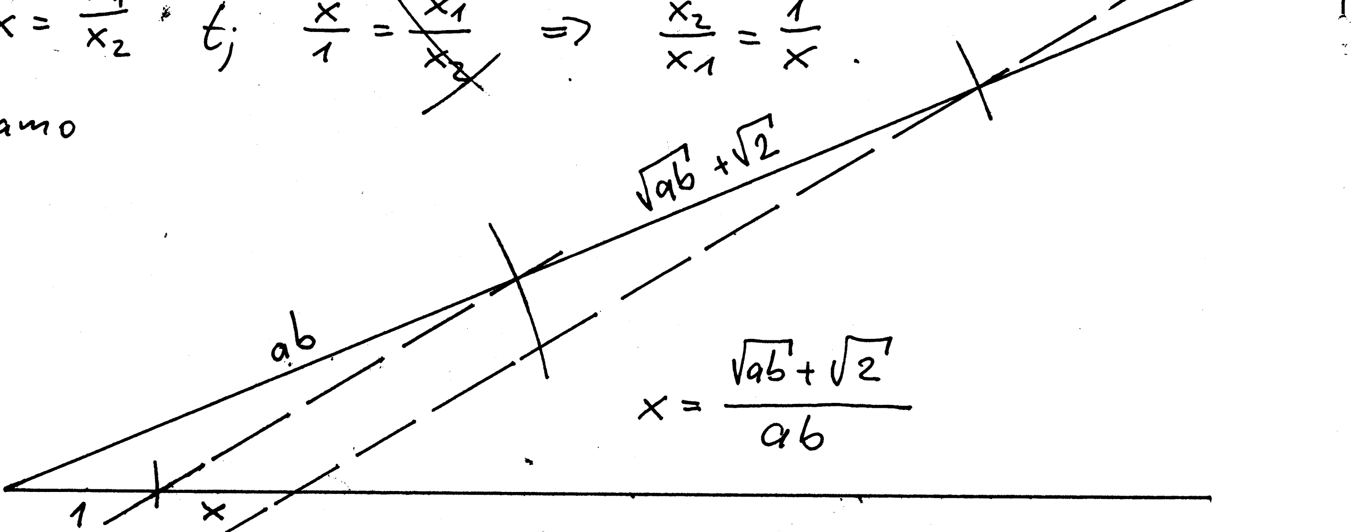
Konstruišimo duž $\sqrt{ab} + \sqrt{2}$:



Ako uvedemo oznake $x_1 = \sqrt{ab} + \sqrt{2}$, $x_2 = ab$ imamo

$x = \dfrac{x_1}{x_2}$ tj $\dfrac{x}{1} = \dfrac{x_1}{x_2} \Rightarrow \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{1}{x}$.

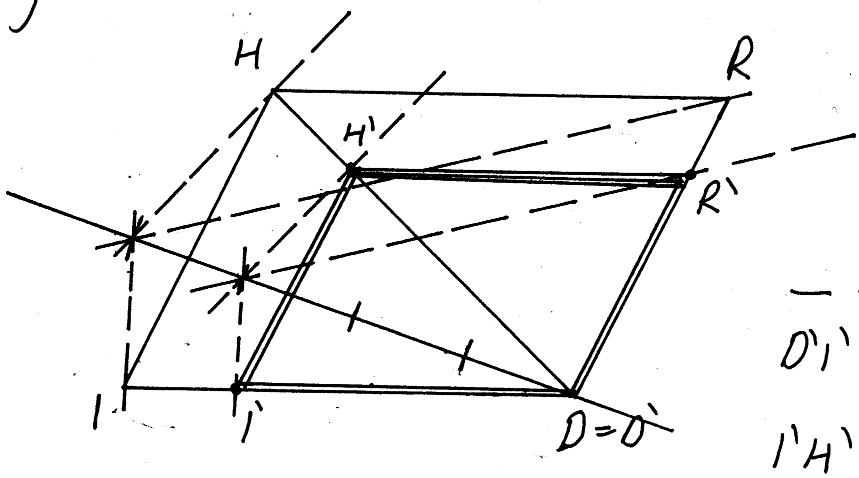
Imamo



$x = \dfrac{\sqrt{ab} + \sqrt{2}}{ab}$

(#) Paralelogram $▱HIDR$ preslikati homotetično s koeficijentom $\frac{3}{4}$ u odnosu na tačku D. Ako je $O_{▱HIDR} = 60$ cm izračunati obim novodobijenog četverougla.

Rj.:



$$\frac{D'I'}{DI} = \frac{3}{4}, \quad \frac{D'R'}{DR} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{R'H'}{RH} = \frac{3}{4}, \quad \frac{I'H'}{IH} = \frac{3}{4}$$

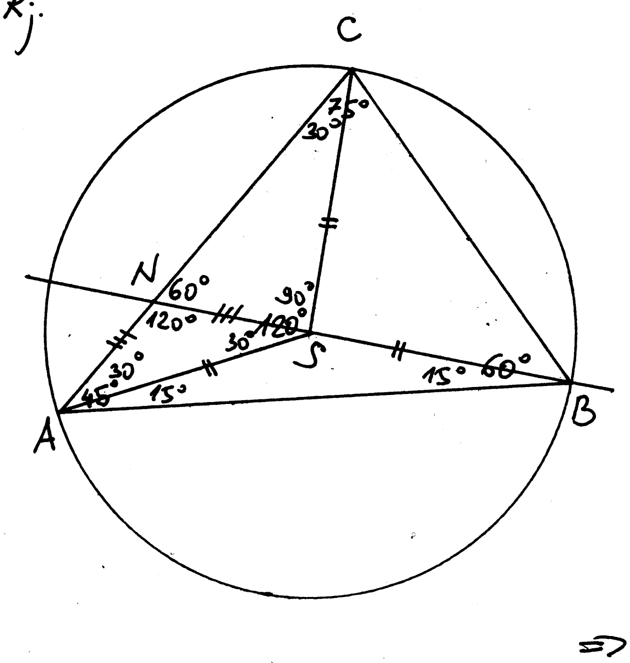
$$D'I' = \frac{3}{4}DI, \quad D'R' = \frac{3}{4}DR, \quad R'H' = \frac{3}{4}RH$$

$$I'H' = \frac{3}{4}IH \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O_{▱H'I'D'R'} = \frac{3}{4} O_{▱HIDR} = \frac{3}{4} \cdot 60 = 3 \cdot 15 = 45 \text{ cm}$$

(#) U trouglu ΔABC je $\alpha:\beta:\gamma = 3:4:5$. Dokazati da prava koja sadrži poluprečnik BS (S je centar opisane kružnice ΔABC) siječe stranicu AC u tački N koja je dijeli u omjeru $1:2$ računajući od vrha A.

Rj.:



$\alpha:\beta:\gamma = 3:4:5$ $\qquad$ $\alpha+\beta+\gamma = 180°$

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{4}$ $\quad$ $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{4}{5}$ $\qquad$ $\frac{3}{4}\beta + \beta + \frac{5}{4}\beta = 180°$

$\alpha = \frac{3}{4}\beta$ $\quad$ $\gamma = \frac{5}{4}\beta$ $\qquad$ $3\beta = 180°$

$\beta = 60°$

$\Rightarrow \alpha = 45° \; ; \; \gamma = 75°$

$\measuredangle ASC$ centralni ugao nad tetivom AC

$\measuredangle ASC = 120° \Rightarrow \measuredangle SAC = \measuredangle SCA =$

ΔABS jkk sa osnovicom $AB \Rightarrow$

$\Rightarrow \measuredangle SAB = \measuredangle SBA = 15° \Rightarrow$

$\Rightarrow \measuredangle CNB = 60°$ (vanjski ugao ΔABN)

$\Rightarrow \measuredangle ANB = 120° \Rightarrow \measuredangle ASN = 30° \Rightarrow AN \cong SN$

ΔNSC je pravougli pa $\cos 60° = \frac{SN}{CN} \Rightarrow CN \cdot \frac{1}{2} = SN = AN$

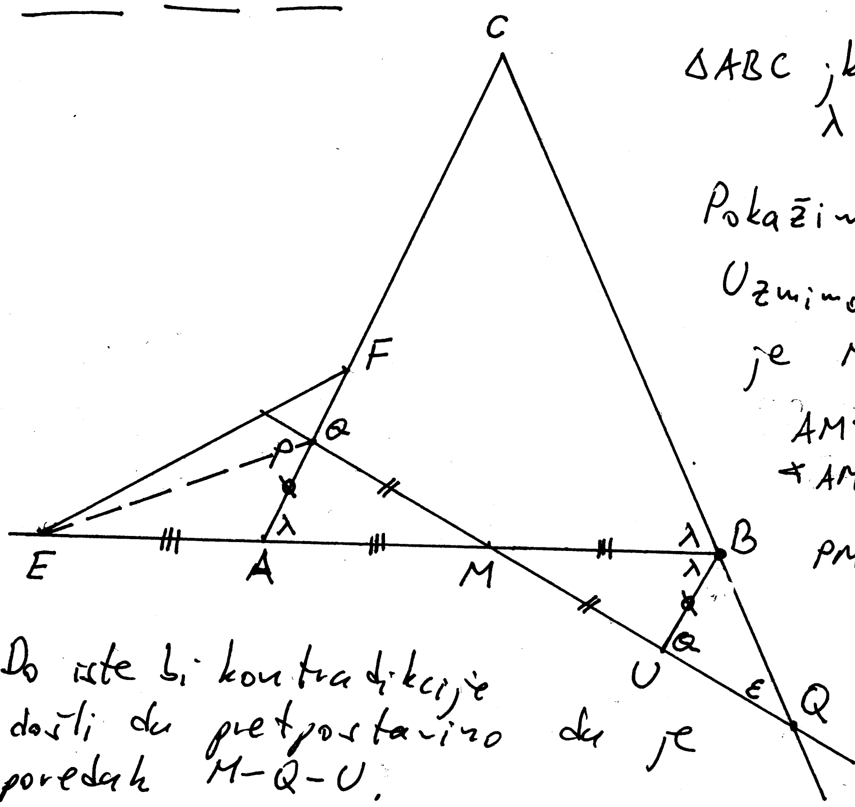
$CN = 2AN$

tj. $\frac{AN}{NC} = \frac{1}{2}$ q.e.d.

(#) Kroz tačku M-sredinu osnovice AB jednakokrakog trougla ΔABC prolazi prava koja siječe prave $p(A,C)$ i $p(B,C)$ u tačkama P i Q redom, tako da je $P-M-Q$. Dokazati da je $PQ > AB$.

Rj: postavka zadatka:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \text{ jkk sa osnovicom u } AB \\ M \text{ sredina } AB \\ P \in p(A,C),\ Q \in p(B,C) \text{ t.d. } P-M-Q \end{array}\right\} \Longrightarrow PQ > AB$$



ΔABC jkk, $\measuredangle CAB = \measuredangle ABC = \lambda$

λ je oštar ugao

Pokažimo prvo da je $BQ > AP$.

Uzmimo tačku $U \in pp[M,Q)$ takvu da je $MP \cong MU$. Sad imamo:

$$\left.\begin{array}{l} AM \cong BM \\ \measuredangle AMP \cong \measuredangle BMU \\ \text{(unakrsni uglovi)} \\ PM \cong UM \end{array}\right\} \xrightarrow{sus} \Delta AMP \cong \Delta BMU$$

$$\Downarrow$$

$$AP \cong BU \text{ i } \measuredangle MBU \cong \measuredangle MAP$$

Sad možemo zaključiti da je poredak $M-U-Q$ (Zašto? Ako bi bilo $U \equiv Q$ imali bi da je $\measuredangle MBQ = \lambda$ # kontradikcija (λ je oštar ugao))

Do iste bi kontradikcije došli da pretpostavimo da je poredak $M-Q-U$.

Primjetimo da je $p(A,P) \parallel p(U,B)$

$\Rightarrow \measuredangle QPC \cong \measuredangle QUB = \theta$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ugao } \measuredangle QPC \text{ je vanjski ugao } \Delta AMQ \Rightarrow \lambda < \theta \\ \text{Označimo sa } \varepsilon = \measuredangle UQB. \text{ Ugao } \measuredangle ABC \text{ je vanjski ugao } \Delta MQB \Rightarrow \varepsilon < \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \theta > \varepsilon \Rightarrow BQ > BU$ tj. $AP < BQ$.

Uzmimo tačku E takvu da $B-A-E$ i $AE \cong AM$.

Uzmimo tačku F takvu da $A-F-C$ i $AF \cong BQ$. Kako je $AP < BQ$ to je poredak $A-P-F$. Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} AE \cong MB \\ \measuredangle EAF \cong \measuredangle MBQ \\ (=180^\circ - \lambda) \\ AF \cong BQ \end{array}\right\} \xrightarrow{sus} \Delta EAF \cong \Delta MBQ$$

$$\Downarrow$$

$$EF \cong MQ.$$

Primjetimo da je $EF > EP$ (Zašto?) i da je u ΔEPM $EP + PM > EM$.

Sad imamo $PQ = PM + MQ = EF + PM > EP + PM > EM = EA + AM = AM + MB = AB$

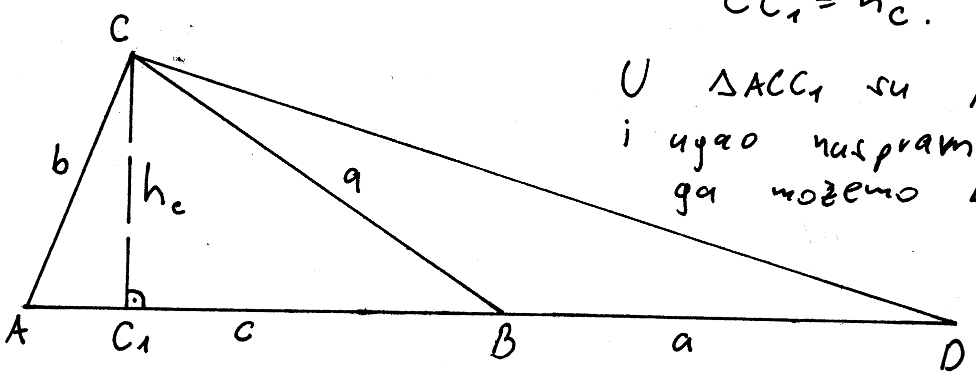
tj. $PQ > AB$ q.e.d.

(#) Konstruisati raznostraničan trougao ΔABC ako su poznati stranica b, visina h_c (koja odgovara stranici c) i zbir $a+c$.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je ΔABC traženi trougao koji ima datu stranicu b, visinu h_c i duž $a+c$. Označimo sa

$$CC_1 = h_c.$$

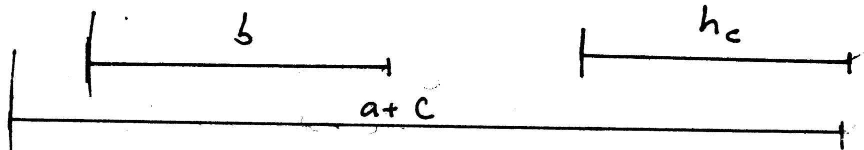


U ΔACC_1 su poznate dvije stranice i ugao naspram veće stranice pa ga možemo konstruisati.

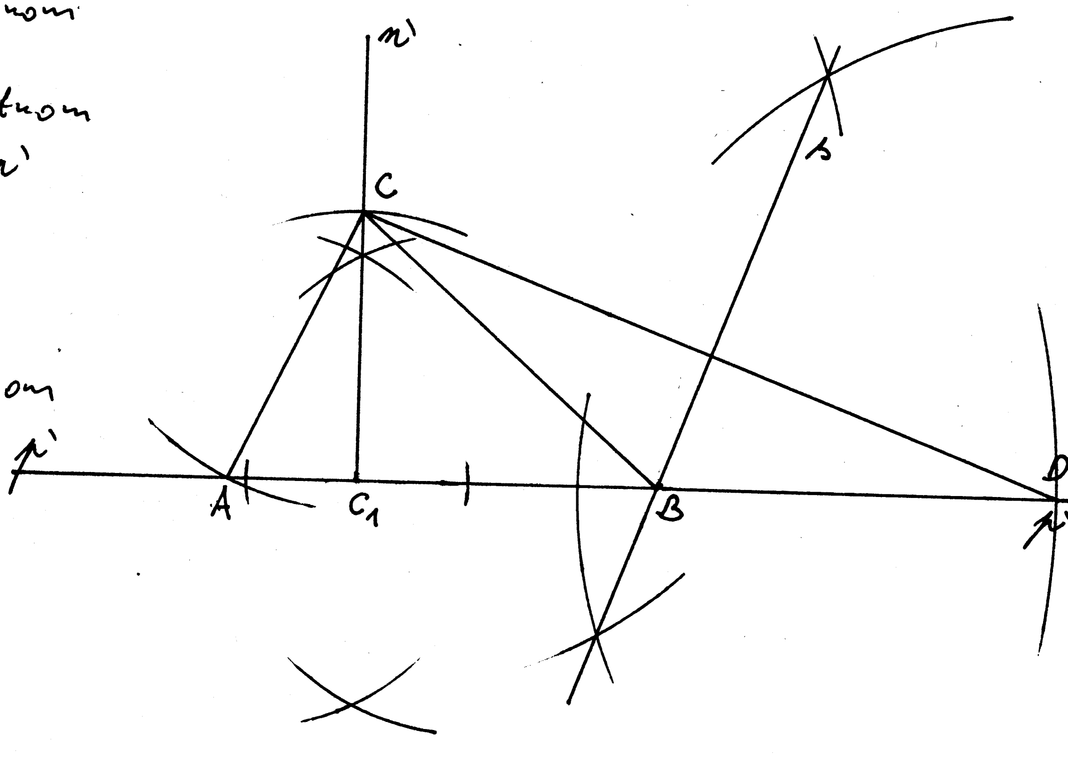
Neka je D taka tačka da je A-B-D i $AD = a+c$.

Primjetimo da je ΔBDC jkk (pa tačka B leži na simetrali stranice CD). Sad nije teško konstruisati trougao ΔABC.

Konstrukcija



1. b, h_c, $a+c$
2. poluprava p' sa početnom tačkom C_1
3. poluprava n' sa početnom tačkom C_1 taka $n' \perp p'$
4. $k(C_1, h_c) \cap n' = \{C\}$
5. $k(C, b) \cap p' = \{A\}$
6. poluprava p'' sa početnom tačkom C_1 koja nadopunjuje polupravu p' do prave p
7. $k(A, a+c) \cap p'' = \{D\}$
8. s simetrala CD
9. $s \cap p = \{B\}$



Dokaz

Da konstruisani trougao ima stranicu b jednaku datoj duži b, visinu h_c jednaku datoj duži h_c i zbir stranica $a+c$ jednaku datoj duži $a+c$ slijedi iz Analize i Konstrukcije.

Diskusija

Ako je $b < h_c$ ili $b \geq a+c$ zadatak nema rješenje.
Ako je $b \geq h_c$ i $b < a+c$ zadatak ima jedinstveno rješenje.

(#) Dužine stranica trougla su tri uzastopna neparna broja, pri čemu je zbir dužina dviju dužih stranica za 7 cm manji od trostruke dužine najmanje stranice. Koliki je obim tog trougla? Odgovor obrazložiti.

Rj. $n, n+2, n+4$ – tri uzastopna neparna broja, n neparan broj
– stranice trougla

$$(n+2)+(n+4)+7=3n$$

$$2n+13=3n$$

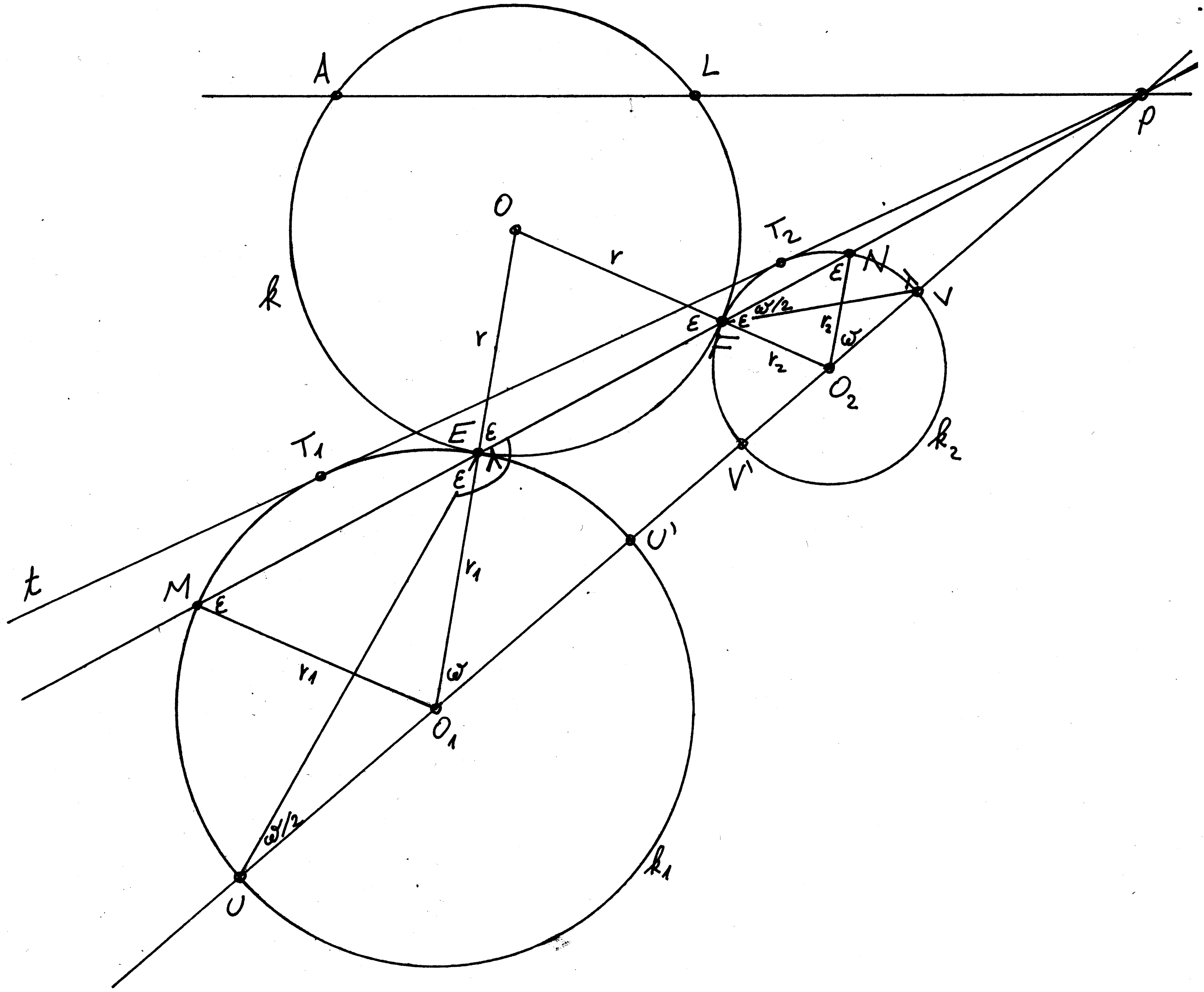
$$n=13$$

Stranice trougla su dužina 13, 15 i 17 cm a obim trougla je 45 cm.

(#) Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz datu tačku i dodiruje dvije date kružnice.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $k(O,r)$ tražena kružnica koja dodiruje dvije date kružnice $k_1(O_1,r_1)$ i $k_2(O_2,r_2)$ i koja prolazi kroz tačku A. Neka su E i F redom dodirne tačke kružnica k_1 i k i k_2 i k. Primjetimo da je O_1-E-O i O_2-F-O. Dalje označimo sa M i N tačke na k_1 i k_2 koje pripadaju $p(E,F)$ (imamo M-E-F-N). Trouglovi ΔMO_1E, ΔOEF i ΔFNO_2 su jkk i kako su $\measuredangle MEO_1 \cong \measuredangle OEF$ i $\measuredangle EFO \cong \measuredangle NFO$ (kao unakrsni uglovi) imamo da su uglovi na osnovicama u spomenutim jkk trouglovima jednaki. Odatle možemo zaključiti da je $p(O_1,M) \parallel p(O_2,F)$ i $p(O_1,E) \parallel p(O_2,N)$ što ćemo kasnije iskoristiti.



Dalje označimo sa P presečnu tačku pravih $p(O_1,O_2)$ i $p(E,F)$; sa L kružnice k i prave $p(P,A)$. Prema potencijalu tačke P u odnosu na kružnicu k imamo:

$$PA \cdot PL = PE \cdot PF \quad \ldots (*)$$

Dalje, neka je $\{U,U'\} = k_1 \cap p(O_1,O_2)$ i $\{V,V'\} = k_2 \cap p(O_1,O_2)$ takve tačke da važi poredak $U-U'-V-V'$. Posmatrajmo trouglove $\triangle UPE$ i $\triangle FPV$.

$p(O_1,E) \parallel p(O_2,N)$ i $p(O_1,O_2)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle O_1E \cong \measuredangle O_2N = \omega$.

$\measuredangle U'O_1E$ je centralni ugao nad tetivom $U'E \Rightarrow \measuredangle U'UE = \frac{\omega}{2}$

$\measuredangle VO_2N$ je centralni ugao nad tetivom $VN \Rightarrow \measuredangle VFN = \omega/2$

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle PUE \cong \measuredangle PFV = \frac{\omega}{2} \\ \measuredangle UPE \cong \measuredangle FPV \\ \quad \text{(zajednički ugao)} \\ \measuredangle PEU \cong \measuredangle PVE \\ \quad \text{(kao treći ugao)} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \triangle PUE \sim \triangle PFV$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{PU}{PE} = \frac{PF}{PV} \Rightarrow PU \cdot PV = PE \cdot PF \quad \ldots (**)$$

Iz $(*)$ i $(**)$ $\Rightarrow PA \cdot PL = PU \cdot PV \Rightarrow PL = \frac{PU \cdot PV}{PA}$.

Vidimo, da bi mogli konstruisati tačku L potrebna nam je tačka P.

Posmatrajmo tri nekolinearne tačke F, N, O_2. Imamo

$$\left.\begin{array}{l} p(O_1,E) \parallel p(O_2,N) \Rightarrow \frac{PO_1}{PO_2} = \frac{O_1E}{O_2N} = \frac{r_1}{r_2} \\ \qquad \text{i} \quad \frac{PE}{PN} = \frac{O_1E}{O_2N} = \frac{r_1}{r_2} \\ p(O_1,M) \parallel p(O_2,F) \Rightarrow \frac{PM}{PF} = \frac{O_1M}{O_2F} = \frac{r_1}{r_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P \text{ je centar} \\ \text{homotetije koja} \\ \text{kružnicu } k_2 \text{ preslikava} \\ \text{u } k_1 \text{ sa koeficijentom} \\ \text{sličnosti } \frac{r_1}{r_2}. \end{array}$$

Iz tačke P povucimo tangentu t na kružnicu k_2 i neka je $\{T_2\} = t \cap k_2$. Kako je P centar homotetije koja kružnicu k_2 preslikava u k_1 to i tačku T_2 preslikava u T_1, pa je $p(P,T_1)$ tj. t tangenta kružnice k_1. Tangentu t možemo konstruisati a time i tačku P. Poslije tačke P možemo konstruisati tačku L pa se zadatak svodi na treći Apolonijev problem.