Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 12.02.2010.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija 2**

Zadatak br. 1 (20 boda)

a) (Kosinusna teorema) Dat je raznostraničan trougao $\triangle ABC$ sa stranicama a, b, c i uglom $\alpha = \measuredangle BAC$. Dokazati da je $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\, cos\alpha$.

b) Date su duži a i b. Konstruisati duž x ako je $x\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{b\sqrt{2}}}{a}$.

c) Zadan je kvadrat $\square ABCD$ dužine stranice $1\, dm$. Naći poluprečnik kružnice koja dodiruje njegove dvije stranice i prolazi kroz njegov jedan vrh.

d) Jednakokraki trougao $\triangle ABC$ čiji je obim $O = 64\, cm$, a visina na osovici $h_a = 24\, cm$ rotirati oko vrha B za ugao od 90° u pozitivnom smjeru. Izračunati površinu novonastalog rotiranog trougla.

e) Iz jednog tjemena oštrouglog trougla konstruisana je visina, iz drugog simetrala ugla a iz trećeg težišna duž. Dokazati da trougao kojeg obrazuju njihove presječne tačke ne može biti jednkostraničan.

Zadatak br. 2 (20 bodova)

Dokazati da većoj visini trougla odgovara manja stranica i obrnuto.

Zadatak br. 3 (20 bodova)

Date su tri konkurentne prave i na jednoj od njih tačka A. Konstruisati trougao $\triangle ABC$, tako da njegove težišne linije leže na datim pravama.
Napomena: Konkurentne prave su prave koje prolaze kroz jednu tačku.

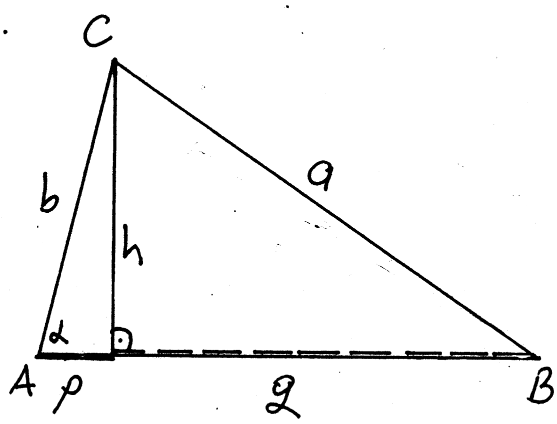
Zadatak br. 4 (20 bodova)

Konstruisati kružnicu koja dodiruje datu kružnicu i datu pravu u datoj tački te prave.

(Web stranica kursa je \pf.unze.ba\nabokov
Za uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(#) (Kosinusna teorema) Dat je raznostraničan trougao ΔABC sa stranicama a, b, c i uglom $\alpha = \sphericalangle BAC$. Dokazati da je $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

$$\cos\alpha = \frac{p}{b}$$

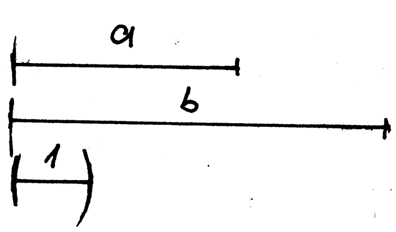
$$\begin{array}{rl} & a^2 = h^2 + g^2 \\ + & h^2 = b^2 - p^2 \\ \hline & a^2 = b^2 + g^2 - p^2 \quad \ldots (*) \end{array}$$

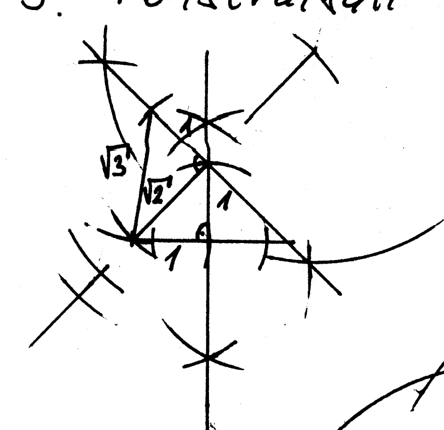
$$\left.\begin{array}{l} g^2 - p^2 = (c-p)^2 - p^2 \\ g^2 - p^2 = c^2 - 2pc \\ p = b\cos\alpha \end{array}\right\} (**)$$

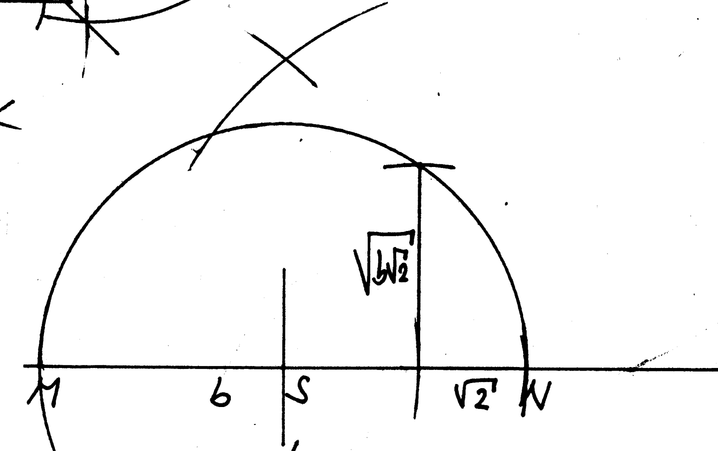
$(*)$ i $(**)$ $\Rightarrow$ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ q.e.d.

(#) Date su duži a i b. Konstruisati duž x ako je $x\sqrt{3} = \frac{\sqrt{b\sqrt{2}}}{a}$.

Rj.







s - sredina MN

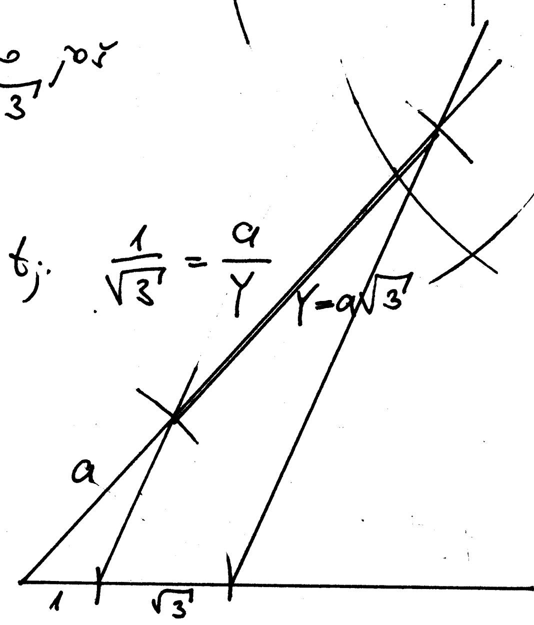
$$x\sqrt{3} = \frac{\sqrt{b\sqrt{2}}}{a} \qquad \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{b\sqrt{2}}} = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{\sqrt{b\sqrt{2}}}{a\sqrt{3}}$$

Konstruišimo prvo duž $a\sqrt{3}$

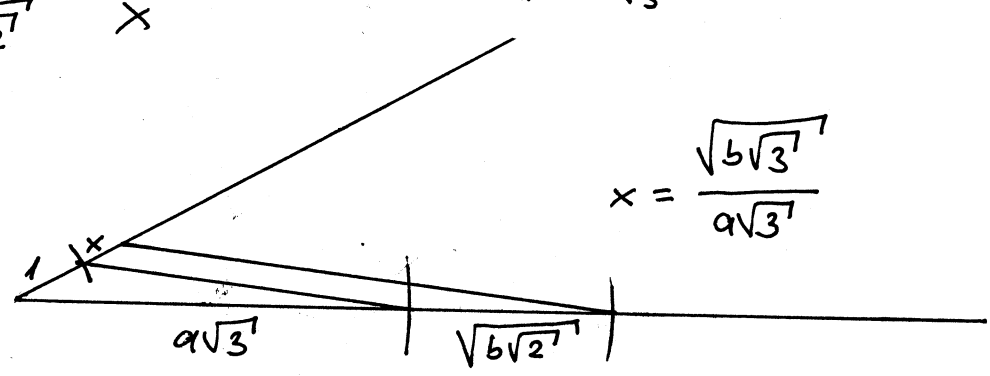
$Y = a\sqrt{3}$

$\frac{Y}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1}$ tj. $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{Y}$



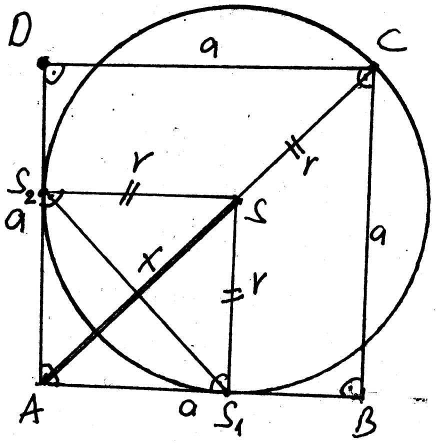
$$\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{b\sqrt{2}}} = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{\sqrt{b\sqrt{3}}}{a\sqrt{3}}$$



Zadan je kvadrat $\square ABCD$ dužine stranice 1 dm. Naći poluprečnik kružnice koja dodiruje njegove dvije stranice i prolazi kroz njegov jedan vrh.

Rj.



Označimo sa r poluprečnik, a sa S centar kružnice koja dodiruje stranice AB u S_1 a stranicu AD u S_2.
Primetimo da je četverougao $\square AS_1SS_2$ kvadrat (imamo sve četri ugla po 90° i $SS_1 \cong SS_2 = r$).
Označimo sa x stranicu AS.
U $\triangle ABC$ imamo $(x+r)^2 = a^2 + a^2$ tj:

$(x+r)^2 = 2 \Rightarrow x+r=\sqrt{2}$ ... (1)

U $\triangle AS_1S$ imamo $x^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow x^2 = 2r^2 \Rightarrow x = r\sqrt{2}$

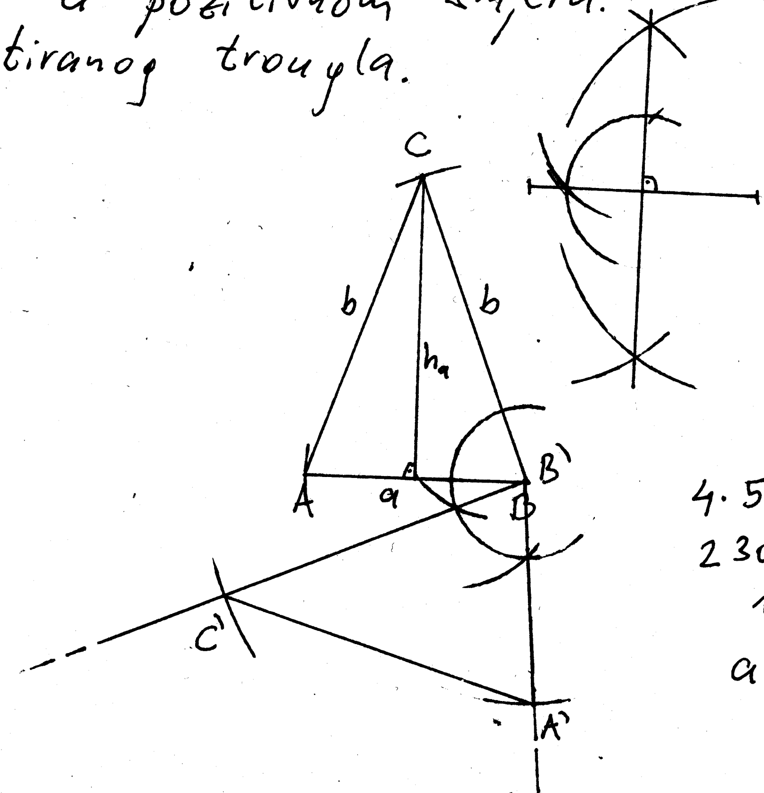
$(1) \Rightarrow r\sqrt{2} + r = \sqrt{2}$

$r(\sqrt{2}+1) = \sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)} = \frac{2-\sqrt{2}}{2-1}$

tj. $r = 2-\sqrt{2}$ q.e.d.

Jednakokraki trougao $\triangle ABC$ čiji je obim $O=64$ cm, a visina na osnovici $h_a=24$ cm rotirati oko vrha B za ugao od 90° u pozitivnom smjeru. Izračunati površinu novonastalog rotiranog trougla.

Rj.



Rotacija čuva dužine pa su novonastali trougao $\triangle A'B'C'$ i $\triangle ABC$ podudarni.

$O = 2b + a = 64 \Rightarrow 2b = 64 - a$

$h_a^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ $4b^2 = (64-a)^2$

$24^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} \quad /\cdot 4$ $= 4096 - 128a + a^2$

$4 \cdot 576 = 4b^2 - a^2$

$2304 = 4096 - 128a$

$128a = 1792$

$a = 14$ cm

$P = \frac{a \cdot h_a}{2}$

$P = \frac{14 \cdot 24}{2} = 7 \cdot 24$

$P = 168 \text{ cm}^2$

Iz jednog temena oštrouglog trougla konstruisana je visina, iz drugog simetrala ugla a iz trećeg težišna duž. Dokazati da trougao koji obrazuju njihove presečne tačke ne može biti jednakostraničan.

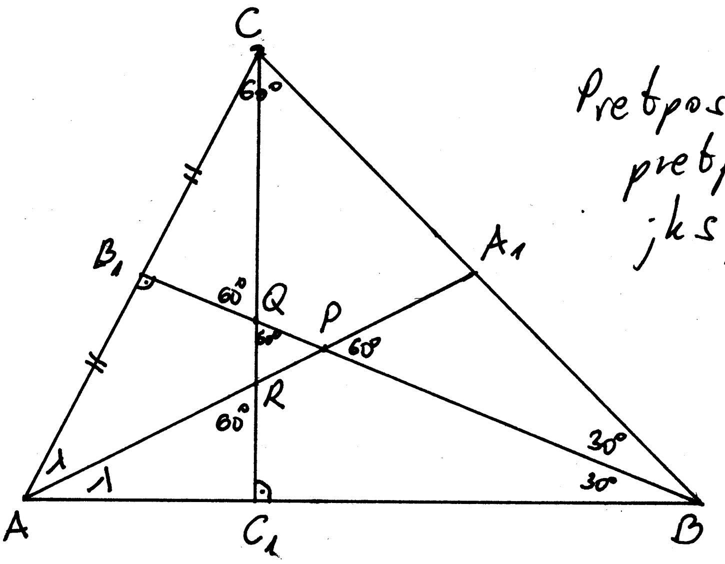
R: postavka zadatka

$\triangle ABC$, CC_1 visina trougla
AA_1 simetrala $\measuredangle BAC$
BB_1 težišna duž
$AA_1 \cap CC_1 = \{R\}$, $AA_1 \cap BB_1 = \{P\}$
$BB_1 \cap CC_1 = \{Q\}$

$\Rightarrow$ $\triangle PQR$ nije jednakostraničan

— — —

$\triangle ABC$ je raznostraničan trougao.



Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da je $\triangle PQR$ jks, tj. $\measuredangle RPQ \cong \measuredangle PQR \cong \measuredangle QRP = 60°$.

$\triangle AC_1R \Rightarrow \lambda = 30°$

pa je $\measuredangle BAC = 60°$

$\triangle C_1BQ \Rightarrow \measuredangle ABB_1 = 30°$

$\triangle ABB_1$ ($\measuredangle B_1AB = 60°$, $\measuredangle ABB_1 = 30°$) $\Rightarrow \measuredangle BB_1A = 90°$

$AB_1 \cong CB_1$
$\measuredangle BB_1A \cong \measuredangle BB_1C = 90°$
$BB_1 \cong BB_1$

$\xRightarrow{SUS}$ $\triangle BB_1A \cong \triangle BB_1C$

$\Downarrow$

$\measuredangle ABB_1 \cong \measuredangle B_1BC = 30°$

i $\measuredangle B_1AB \cong \measuredangle B_1CB = 60°$

$\triangle ABC$ je jks $\Rightarrow P \equiv Q \equiv R$

#kontradikcija
(sa pretpostavkom da je $\triangle ABC$ raznostraničan ili sa pretpostavkom da postoji $\triangle PQR$)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome $\triangle PQR$ ne može biti jks

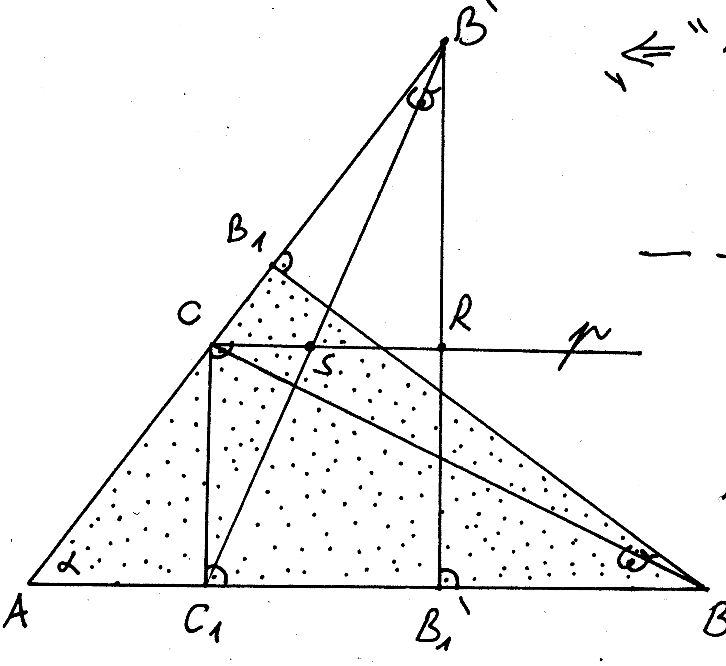
q.e.d.

Dokazati da većoj visini trougla odgovara manja stranica i obrnuto.

R: postavka zadatka

$\triangle ABC$, BB_1 i CC_1 visine trougla $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $BB_1 > CC_1$ akko $AC < AB$



„$\Leftarrow$":
$$\left.\begin{array}{l}\triangle ABC,\\ BB_1 \text{ i } CC_1 \text{ visine}\\ AC < AB\end{array}\right\} \Rightarrow BB_1 > CC_1$$

Kako je $AC < AB$ na $p(A,C)$ postoji tačka B' takva da je $A-C-B'$ i $AB' \cong AB$.
Neka je B_1' ortogonalna projekcija tačke B' na pravu $p(A,B)$.

Pokažimo da je $CC_1 < B'B_1'$. ...(*)

$\measuredangle C_1CB'$ je vanjski ugao $\triangle ACC_1$ pa možemo zaključiti da je tup. U njegovoj unutrašnjosti uzmimo polupravu p takvu da je $\measuredangle C_1Cp = 90°$. Označimo sa $\{R\} = p \cap B'B_1'$ (ovaj presjek postoji zato što postoji $\{S\} = p \cap B'C_1$ a p ne može sijeći duž C_1B_1' zato što $p \parallel p(A,B)$). Nije teško pokazati da je $CC_1 \cong RB_1'$

Kako $B_1' - R - B'$ i $RB_1' \cong CC_1 \Rightarrow CC_1 < B'B_1'$.

Posmatrajmo $\triangle ABB_1$ i $\triangle AB'B_1'$. Ti trouglovi imaju dva ugla jednaka (α i ugao od $90°$) pa imaju i treći ugao podudaran.

Sad imamo:
$$\left.\begin{array}{c}\measuredangle B_1AB \cong \measuredangle B'AB_1' = \alpha\\ AB \cong AB'\\ \measuredangle ABB_1 \cong \measuredangle AB'B_1' = \omega\end{array}\right\} \overset{USU}{\Longrightarrow} \begin{array}{c}\triangle ABB_1 \cong \triangle AB'B_1'\\ \Downarrow\\ BB_1 \cong B'B_1'\end{array}$$

$(*) \Rightarrow CC_1 < BB_1$ q.e.d.

„$\Rightarrow$":
$$\left.\begin{array}{l}\triangle ABC\\ BB_1 \text{ i } CC_1 \text{ visine}\\ BB_1 > CC_1\end{array}\right\} \Rightarrow AC < AB$$

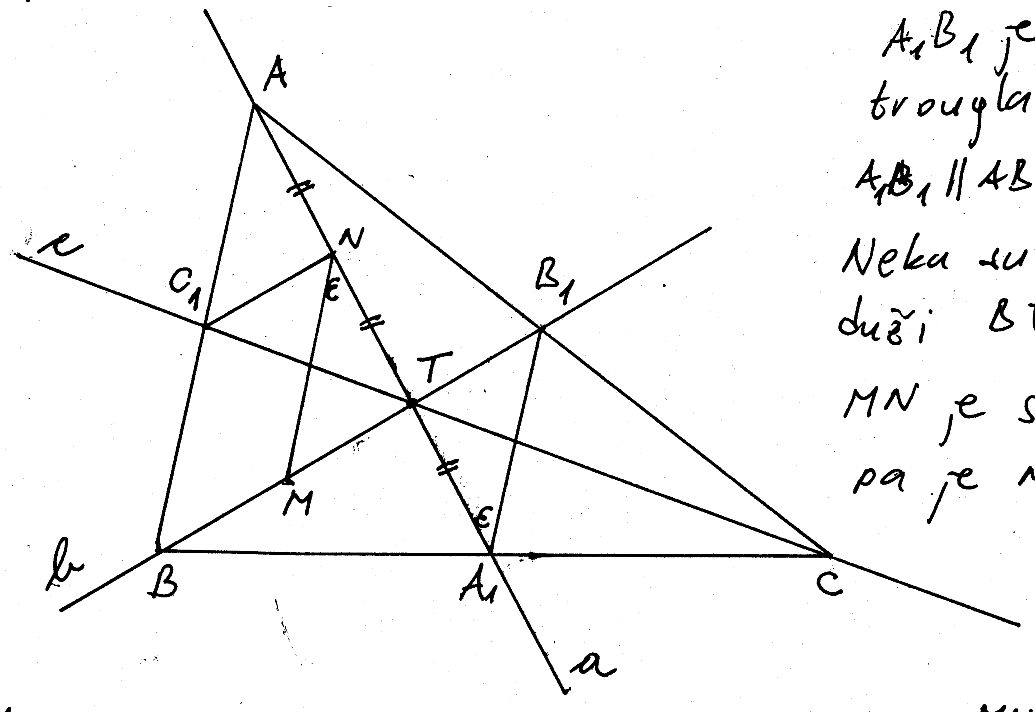
Završiti sami.
Uputa: Koristiti „$\Leftarrow$".
[Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. ...]

Date su tri konkurentne prave i na jednoj od njih tačka A. Konstruisati trougao ΔABC, tako da njegove težišne linije leže na datim pravama.

Napomena: Konkurentne prave su prave koje prolaze kroz jednu tačku.

Rj: Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka su a, b i c tri konkurentne prave koje prolaze kroz tačku T, neka su date tačke $A, A_1 \in a$, $B, B_1 \in b$ i $C, C_1 \in c$ takve da ΔABC ima težišne duži AA_1, BB_1 i CC_1.



A_1B_1 je srednja linija trougla ΔABC pa je $A_1B_1 \parallel AB$ i $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$ ...(*)

Neka su M i N redom središta duži BT i AT.

MN je srednja linija ΔBTA pa je $MN \parallel AB$ i $MN = \frac{1}{2}AB$ ...(**)

Iz (*) i (**) $MN \parallel A_1B_1$ i $MN \cong A_1B_1$.

$MN \parallel A_1B_1$ i $p(A, A_1)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle TA_1B_1 \cong \measuredangle TNM = \varepsilon$.

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle MTN \cong \measuredangle A_1TB_1 \\ \quad \text{(unakrsni)} \\ \measuredangle TNM \cong \measuredangle TA_1B_1 = \varepsilon \\ MN \cong A_1B_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{UUS} \begin{array}{c} \Delta MTN \cong \Delta TA_1B_1 \\ \Downarrow \\ TN \cong TA_1 \end{array}$$

Primjetimo da je C_1N srednja linija $\Delta ABT \Rightarrow C_1N \parallel b$.
Tačke A i T su date pa možemo konstruisati središte N duži AT a time i tačku A_1. Kako su date prave a, b, c i znamo da je $C_1N \parallel b$ to možemo konstruisati i tačku C_1. Poslije ovoga nije teško dobiti tačku B a time i ΔABC.

Konstruisati kružnicu koja dodiruje datu kružnicu i datu pravu u datoj tački te prave.

Rj: Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $k(S,r)$ tražena kružnica koja dodiruje datu pravu t u datoj tački T i koja dodiruje datu kružnicu $k_1(S_1,r_1)$ u tački P. Primetimo da je $p(S,T) \perp t$ i da je $S-P-S_1$ (zato što je P dodirna tačka kružnica k i k_1). Neka je n prava koja prolazi kroz S_1 i $n \perp t$. Označimo sa $\{R\} = n \cap t$ i $\{M,N\} = n \cap k_1$ tako da je $R-M-N$.

Pokažimo da duž SS_1 siječe duž TN u tački P.

Posmatrajmo trouglove $\triangle PNS_1$ i $\triangle PTS$.

$p(S,T) \parallel n$ i $p(S,S_1)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle TSP \cong \measuredangle NS_1P = \varepsilon$

$\triangle SPT$ jkk $\Rightarrow \measuredangle STP \cong \measuredangle SPT = \omega$ i $\measuredangle S_1NP \cong \measuredangle NPS_1 = \omega$

$p(S,S_1)$, $P \in SS_1$, $\measuredangle SPT = \measuredangle S_1PN = \omega \Rightarrow$ uglovi $\measuredangle SPT$ i $\measuredangle NPS_1$ su unakrsni uglovi $\Rightarrow NT \cap SS_1 = \{P\}$.

Kako pravu n možemo konstruisati to možemo konstruisati i tačku P a time i tačku S ($\{S\}$ = simetrala duži $PT \cap p(S,T)$)

Sad možemo konstruisati traženu kružnicu $k(S, ST)$.