Univerzitet u Zenici
Filozofski fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 16.04.2014.

Prvi parcijalni iz Euklidske geometrije II, (ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte)

Zadatak br. 1

(40%)(a) Data je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ čija je donja baza kvadrat $\square ABCD$ a gornja baza kvadrat $\square A_1B_1C_1D_1$ tako da su AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 ivice kocke. Dužinu ivice kocke označimo sa a. Ako su M i N, redom, središta ivica AB i BC izračunati visinu h trougla $\triangle MNB_1$ koja odgovara stranici MN.

(60%)(b) M je vrh piramide čija je baza paralelogram $\square ABCD$. Na strani BCM nacrtana je prava $p(E,F)$ paralelno sa pravom $p(B,C)$ tako da siječe ivice piramide MB, MC, redom, u tačkama E i F. Pokazati da postoji presjek polupravih $pp[A,E)$ i $pp[D,F)$, recimo u tački N, i da je $p(M,N) \| p(C,D)$. Da li je $p(M,N)$ paralelna i sa ravni $ABCD$ (objasniti zašto)?

Zadatak br. 2

(40%) Dat je $\triangle ABC$ u kome vrijedi da je $AB^2 = BC^2 + AC^2$. Bez upotrebe Pitagorine teoreme pokazati da je $\measuredangle BCA$ prav ugao.

(60%) Dat je četverougao $\square ABCD$ i neka je p transferzala koja siječe prave $p(A,B)$, $p(A,D)$, $p(C,D)$, $p(B,C)$, $p(A,C)$, $p(B,D)$ redom u tačkama E, F, G, H, I, J. Pokazati da je

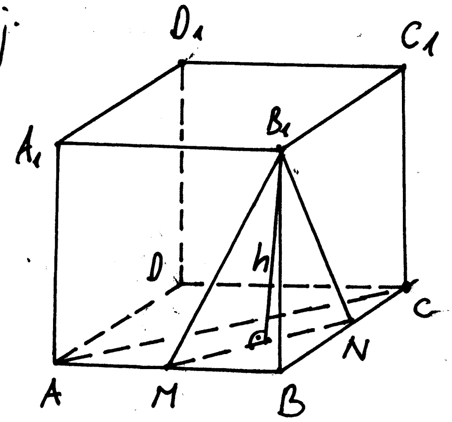
$$\frac{EF}{GH} = \frac{FI}{GI} \cdot \frac{EJ}{HJ}.$$

Zadatak br. 3

AB, BC i CD su tri ivice kocke čija je glavna dijagonala AD. Pokazati da je ugao između ravni ABD i ACD dvije trećine ($\frac{2}{3}$) pravog ugla.

(#) Data je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ čija je donja baza kvadrat $\square ABCD$ a gornja baza kvadrat $\square A_1B_1C_1D_1$ tako da su AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 ivice kocke. Dužinu ivice kocke označimo sa a. Ako su M i N, redom središta ivica AB i BC izračunati visinu h trougla $\triangle MNB_1$ koja odgovara stranici MN.

Rj:



Na osnovu postavke zadatka nacrtajmo sliku. Primjetimo da je

$$\overline{BM} = \overline{BN} = \frac{1}{2}a$$

Kako je $\triangle ABC$ pravougli $\overline{AC} = a\sqrt{2}$.

M i N sredine od AB i BC $\Rightarrow$ MN je srednja linija $\triangle ABC$

$$\Rightarrow \quad \overline{MN} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Na osnovu podudarnosti SUS imamo $\triangle MBB_1 \cong \triangle NBB_1$

$$\Downarrow$$

$$MB_1 \cong NB_1$$

$\triangle MBB_1$ pravougli $\Rightarrow$ $\overline{B_1M} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

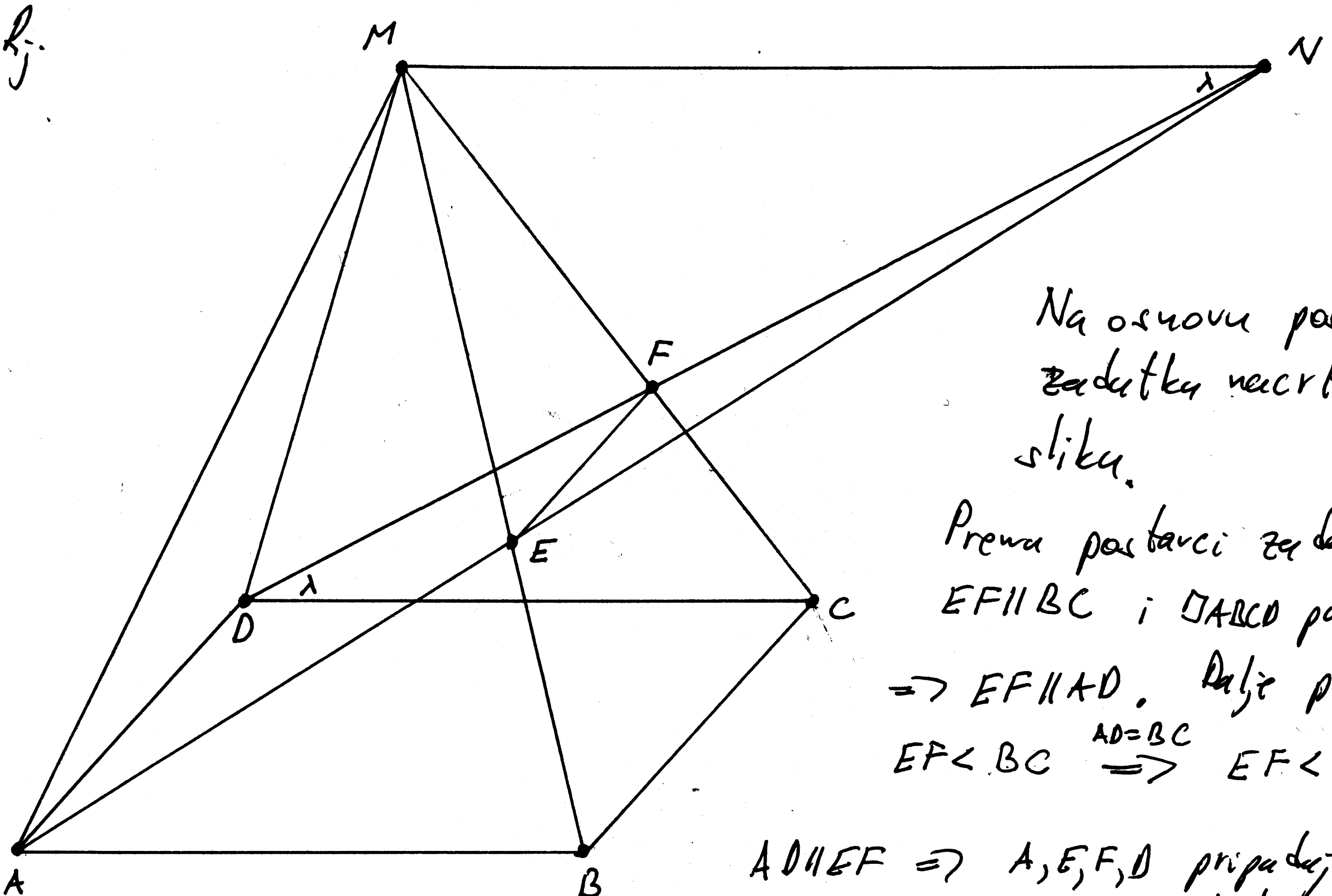
$\triangle MNB_1$ jkk $\Rightarrow$ visina h pripada simetrali od MN

$$\Rightarrow \quad h = \sqrt{\overline{MB_1}^2 - \left(\frac{1}{2}\overline{MN}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2 - \frac{1}{8}a^2} = \sqrt{\frac{9}{8}a^2}$$

$$h = \frac{3a}{2\sqrt{2}}$$

(#) M je vrh piramide čija je baza paralelogram $\square ABCD$. Na strani BCM nacrtana je prava $p(E,F)$ paralelno sa pravom $p(B,C)$ tako da siječe ivice piramide MB, MC redom u tačkama E i F. Pokazati da postoji presjek polupravih $pp[A,E)$ i $pp[D,F)$, recimo u tački N, i da je $p(M,N) \parallel p(C,D)$. Da li je $p(M,N)$ paralelna i sa ravni $ABCD$ (objasniti zašto)?

Rj:



Na osnovu postavke zadatka nacrtajmo sliku.

Prema postavci zadatka $EF \parallel BC$ i $\square ABCD$ paralelogram $\Rightarrow EF \parallel AD$. Dalje primjetimo $EF < BC \xRightarrow{AD=BC} EF < AD$

$AD \parallel EF \Rightarrow A, E, F, D$ pripadaju istoj ravni, a kako je $\square AEFD$ trapez to postoji presjek polupravih $pp[A,E)$ i $pp[D,F)$

Posmatrajmo $\triangle AND \Rightarrow \frac{NF}{ND} = \frac{FE}{AD} \xRightarrow{AD=BC} \frac{NF}{ND} = \frac{FE}{CB} = \frac{MF}{MC} \xRightarrow{\frac{ND}{NF}-1=\frac{MC}{MF}-1}$

$\Rightarrow \frac{NF}{FD} = \frac{MF}{FC}$

Kako je $\measuredangle MFN \cong \measuredangle DFC$ unakrsni uglovi

$\xrightarrow{\text{slič. SUS}} \triangle MFN \sim \triangle CFD$

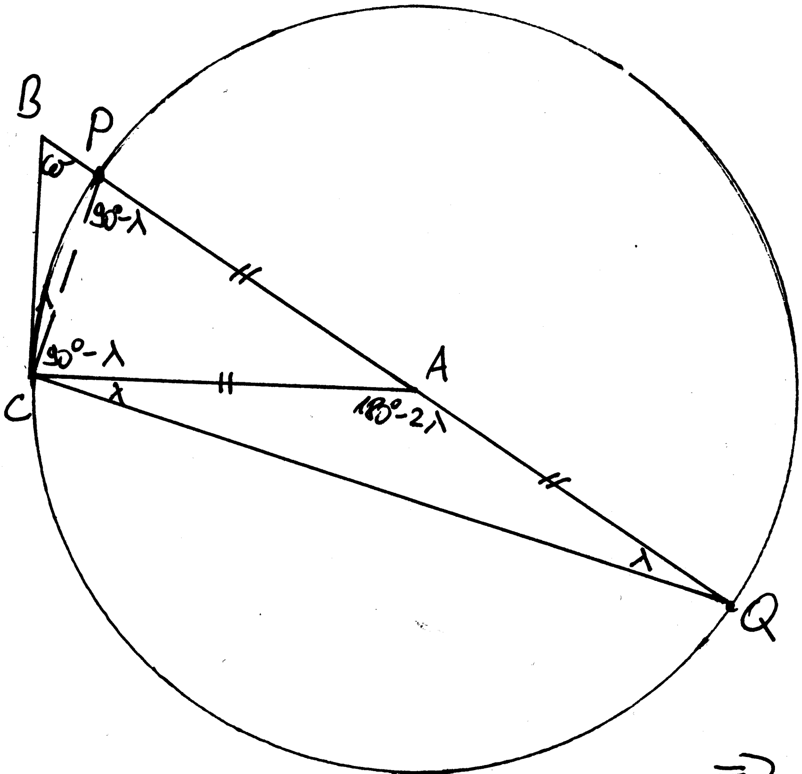
$\Downarrow$

$\measuredangle FDC \cong \measuredangle FNM = \lambda \Rightarrow p(M,N) \parallel p(C,D)$.

$p(C,D) \parallel p(M,N) \wedge p(C,D) \subseteq$ ravni $ABCD \Rightarrow p(M,N) \parallel$ ravni $ABCD$.

Dat je trougao ΔABC u kome vrijedi da je $AB^2 = BC^2 + AC^2$. Bez upotrebe Pitagorine teoreme pokazati da je $\sphericalangle BCA$ prav ugao.

Rj.



Opišimo krug k sa centrom u A poluprečnika AC i neka je $k \cap AB = \{P\}$ i $p[B,A) \cap k = \{Q\}$.

Sad prema postavci zadatka je

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = AB^2 - AC^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = (AB-AC)(AB+AC) = BP \cdot BQ \Rightarrow \frac{BP}{BC} = \frac{BC}{BQ}$$

Za trouglove ΔBPC i ΔBCQ vrijedi

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle CBP \cong \sphericalangle QBC = \omega \\ \dfrac{BP}{BC} = \dfrac{BC}{BQ} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič SUS}} \Delta BCP \sim \Delta BQC$$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle BCP \cong \sphericalangle CQB = \lambda$$

ΔACQ jkk $\Rightarrow \sphericalangle ACQ = \lambda \Rightarrow \sphericalangle CAQ = 180° - 2\lambda$

$\xRightarrow{\text{perif.ug.}} \sphericalangle APC = 90° - \lambda \xRightarrow{\Delta APC\text{, jkk}} \sphericalangle PCA = 90° - \lambda \Rightarrow$

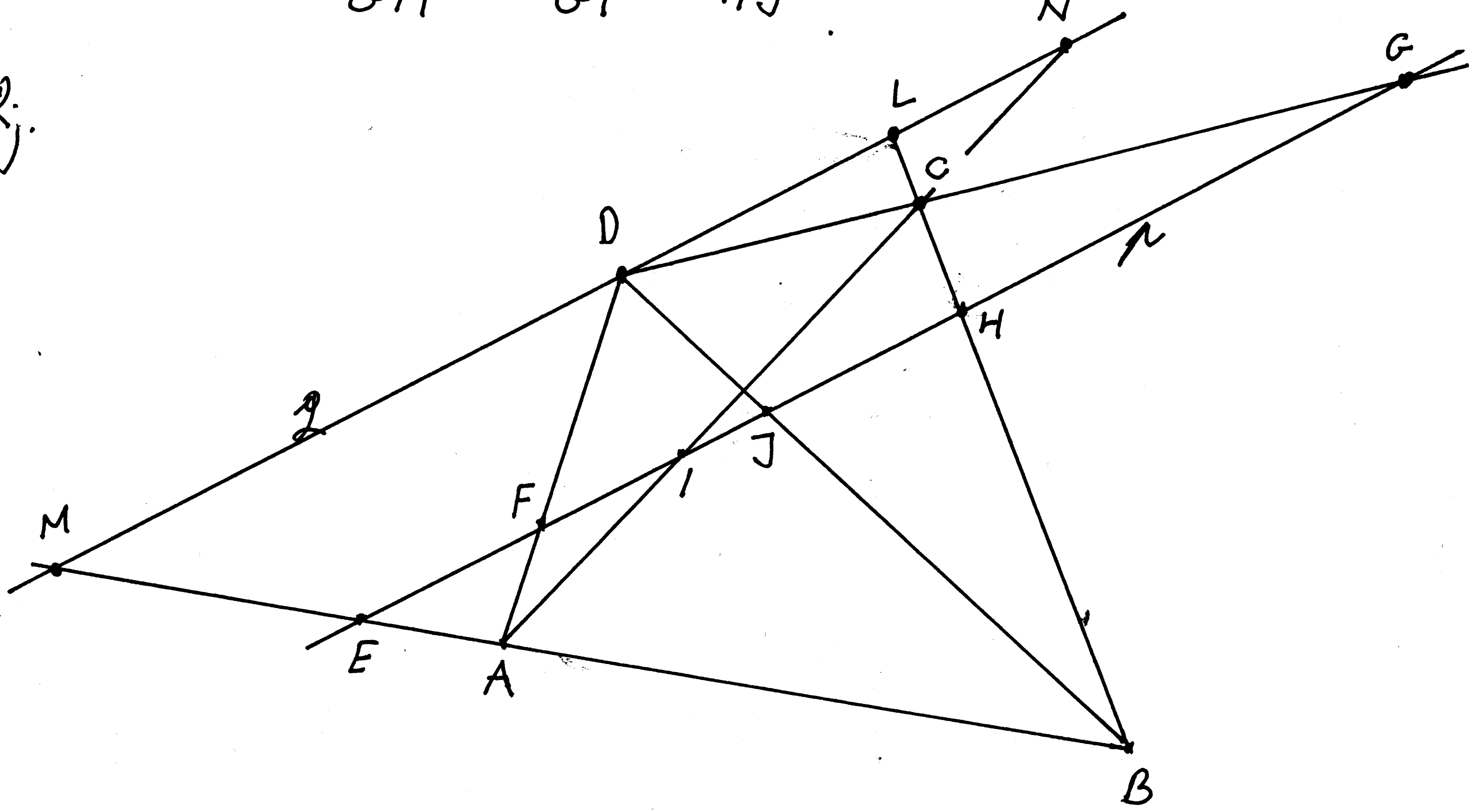
$$\Rightarrow \sphericalangle BCA = \sphericalangle BCP + \sphericalangle PCA = \lambda + 90° - \lambda = 90°$$

q.e.d.

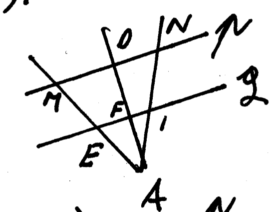
Dat je četverougao $\square ABCD$; neka je p transferzala koja siječe prave $p(A,B)$, $p(A,D)$, $p(C,D)$, $p(B,C)$, $p(A,C)$, $p(B,D)$ redom u tačkama E, F, G, H, I, J. Pokazati da

$$\frac{EF}{GH}=\frac{FI}{GI}\cdot\frac{EJ}{HJ}$$

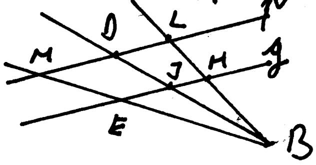
Rj.



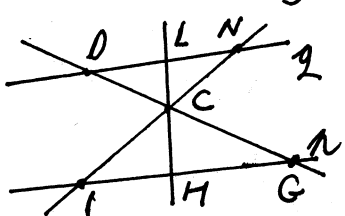
Neka je dat četverougao $\square ABCD$ i neka tačke E, F, G, H, I, J ispunjavaju uslove iz postavke zadatka. Neka je g prava koja prolazi kroz tačku D t.d. $p \parallel g$. Sa M, L i N označimo presjeke: $\{M\} = pp[B,A) \cap g$, $\{L\} = pp[B,C) \cap g$ i $\{N\} = pp[A,C) \cap g$ (vidi sliku). Sad imamo

$p \parallel g$ $\wedge$ 

$\xRightarrow{\text{posl. T.T.}}$ $\dfrac{EF}{DM} = \dfrac{FI}{DN}$ ...(1)

$p \parallel g$ $\wedge$ 

$\xRightarrow{\text{posl. T.T.}}$ $\dfrac{DM}{DL} = \dfrac{EJ}{HJ}$ ...(2)

$p \parallel g$ $\wedge$ 

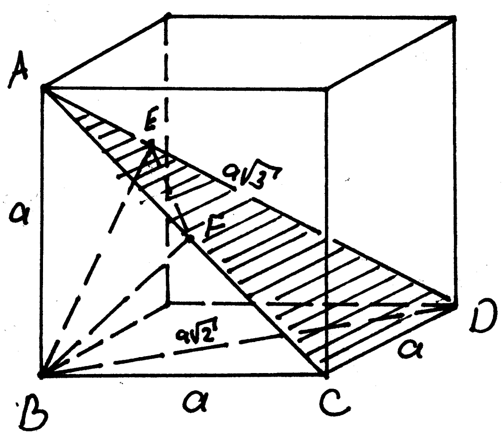
$\xRightarrow{\text{posl. T.T.}}$ $\dfrac{DL}{GH} = \dfrac{DN}{GI}$ ...(3)

(1), (2) i (3) kad se pomnože

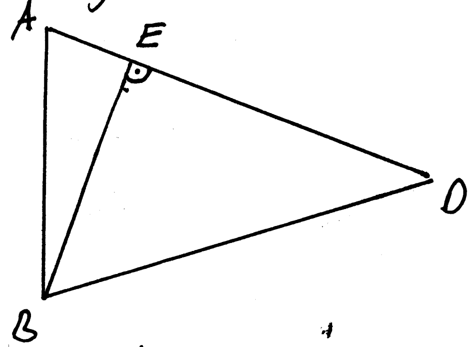
$$\frac{EF}{GH}=\frac{FI}{GI}\cdot\frac{EJ}{HJ}$$ q.e.d.

(#) AB, BC i CD su tri strane kocke čija je glavna dijagonala AD. Pokazati da je ugao između ravni ABD i ACD $\frac{2}{3}$ pravog ugla.

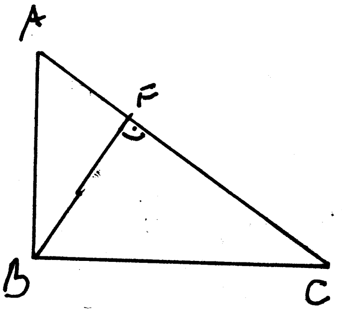
Rj.



Neka je data kocka u kome su AB, BC i CD tri strane kocke tako da je AD glavna dijagonala.
U ravni ABD izaberimo tačku E tako da je $E \in AD$ i $BE \perp AD$



U ravni ABC izaberimo tačku F takvu da je $F \in AC$ i $BF \perp AC$.



Spojimo tačke E i F. Ono što u stvari želimo da pokažemo je da je

$$\measuredangle BEF = \frac{2}{3} 90^\circ = 60^\circ$$

Zbog lakšeg razumijevanja zadatak možemo podijeliti u 5 koraka:

1. prvo ćemo pokazati da je $BF \perp EF$
2. pa ćemo pokazati da je $\Delta ABD \sim \Delta AEB$
3. iz čega slijedi da je $BE = a\sqrt{\frac{2}{3}}$
4. slično kao u drugom i trećem koraku pokazati ćemo $BF = \frac{a}{\sqrt{2}}$
5. iz prvog, trećeg i četvrtog koraka ćemo dobiti $\sin\measuredangle BEF = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Na osnovu petog koraka rezultat slijedi. Pa krenimo redom:

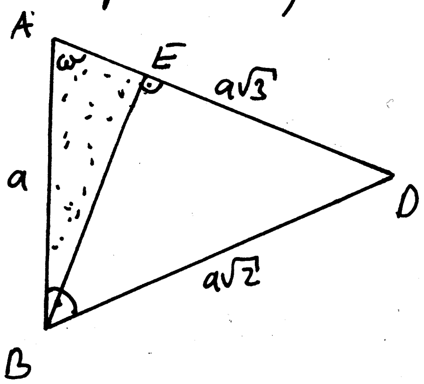
$CD \perp BC \wedge AC \perp CD \Rightarrow$ ravan $ABC \perp$ ravan ACD

Prisjetimo se teoreme: Ako je prava okomita na dvije date prave u presječnoj tački u kojoj se one sijeku, ona je okomita na ravan kojoj ove dvije prave pripadaju

$BF \perp$ ravan $ACD \wedge BF \perp AC \xRightarrow{\text{posljedica teoreme}} BF \perp EF$

Sa a označimo stranice kocke AB, BC i CD. Na osnovu Pitagorine teoreme slijedi $BD = a\sqrt{2}$ i $AD = a\sqrt{3}$.

Sad posmatrajmo ravan ABD i pravougle trouglove ΔABD i AEB.



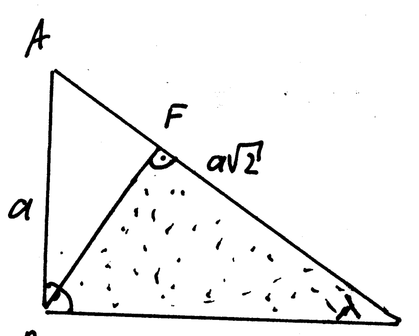
Na osnovu sličnosti UUU ova dva trougla su slična, tj. $\Delta ABD \sim \Delta AEB$

$$\Downarrow$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BE}{BD}$$

$$\Rightarrow BE \cdot AD = AB \cdot BD \Rightarrow a\sqrt{3}\, BE = a^2\sqrt{2} \Rightarrow BE = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Slično, posmatrajmo ravan ABC i pravougle trouglove ΔABC i ΔBCF



Na osnovu sličnosti UUU

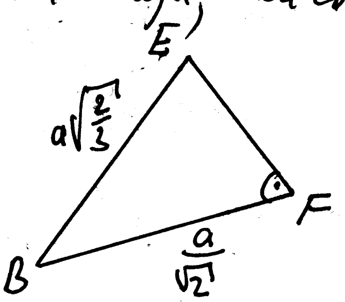
$$\Delta ABC \sim \Delta BFC$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AB}{BF} \Rightarrow a\sqrt{2}\, BF = a^2$$

$$BF = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Na kraju, kako je $BF \perp EF$ posmatrajmo pravougli trougao ΔBEF.



$$\sin\angle BEF = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle BEF = 60^\circ$$

q.e.d.