Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 14.02.2013.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija II**

Zadatak br. 1

(25%) a) Tačka A_1 je presjek simetrale ugla A i naspremne strane BC trougla $\triangle ABC$. Dokazati da je $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{AB}{AC}$.

(25%) b) Simetrala spoljašnjeg ugla kod tjemena A trougla $\triangle ABC$ siječe pravu BC u tački A_2. Dokazati da je $\frac{A_2B}{A_2C} = \frac{AB}{AC}$.

(50%) c) Na stranicama BC, CA i AB trougla $\triangle ABC$ date su redom tačke A_1, B_1 i C_1, takve da je $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC_1}{C_1B}$. Dokazati da je $\triangle A_1B_1C_1$ jednakostraničan ako i samo ako je $\triangle ABC$ jednakostraničan.

Zadatak br. 2

(30%) Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su mu dati stranica a, ugao β i duž $b - c$.

(70%) Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su date tačke P, Q i R koje su podnožja visina datog trougla.

Zadatak br. 3

(20%) a) Dati su podudatni krugovi k_1 i k_2 i tačka T. Kroz tačku T konstruisati pravu na kojoj dati krugovi odsjcaju podudarne tetive. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovat će se samo Analiza.)

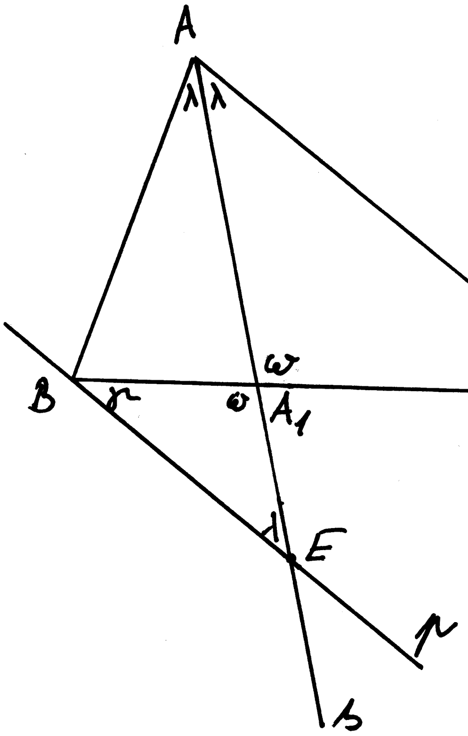
(20%) b) Za dva data kruga konstruisati vanjsku zajedničku tangentu. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovat će se samo Analiza.)

(60%) Konstruisati krug koji prolazi kroz datu tačku i dodiruje datu pravu i dati krug. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)

Zadaci su skinuti sa stranice pf.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

(#) Tačka A_1 je presjek simetrale ugla A i naspremne strane BC trougla ΔABC. Dokazati da je $\dfrac{A_1B}{A_1C} = \dfrac{AB}{AC}$.

Rj.



Neka je dat ΔABC i neka je s simetrala ugla $\angle CAB$.
Sa A_1 označimo presjek
$\{A_1\} = s \cap BC$.
Neka je p prava takva da
$B \in p$ i $p \parallel p(A,C)$.
Neka je $\{E\} = s \cap p$
Posmatrajmo trouglove ΔBA_1E i ΔAA_1C.

Pokažimo da je $\Delta AA_1C \sim \Delta BA_1E$

$p(B,E) \parallel p(A,C)$ i $p(A,E)$ transferzala $\Rightarrow \angle BEA_1 \cong \angle CAA_1 = \lambda$

$\angle BA_1E \cong \angle CA_1A$ (unakrsni)

$p(B,E) \parallel p(A,C)$ i $p(B,C)$ transferzala $\Rightarrow \angle A_1CA \cong \angle ABE = \gamma$.

Prema sličnosti UUU $\Rightarrow \Delta AA_1C \sim \Delta BA_1E$.

$$\Downarrow$$

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{BE}{AC} \quad \dots (*)$$

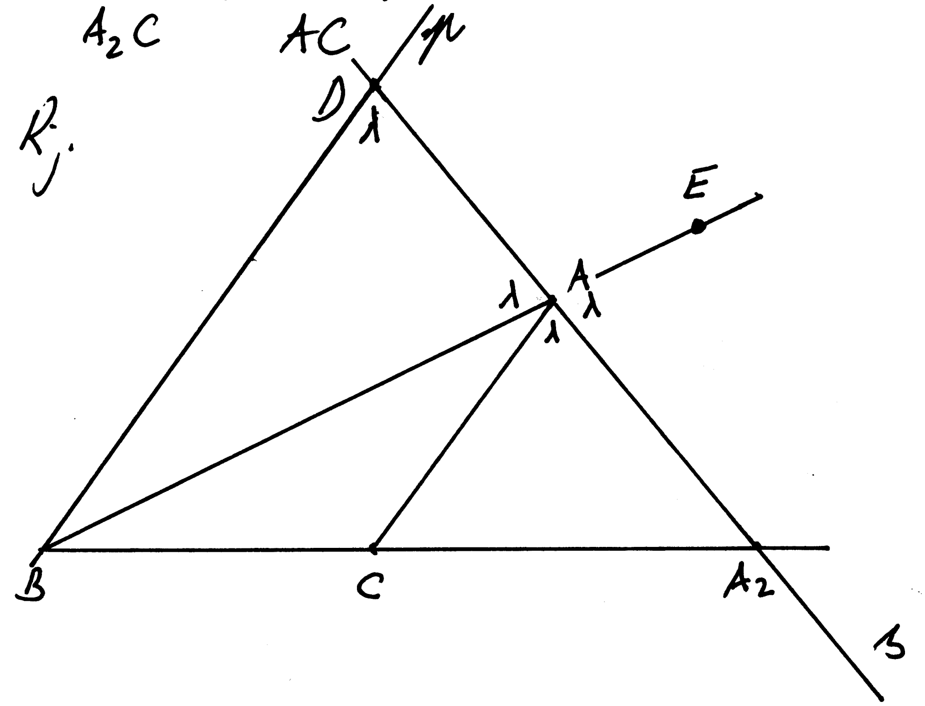
Primjetimo da je ΔBEA jkk ($\angle BEA \cong \angle BAE$) $\Rightarrow BE \cong BA$

Sad prema $(*)$ $\Rightarrow \dfrac{A_1B}{A_1C} = \dfrac{AB}{AC}$ q.e.d.

(#) Simetrala spoljašnjeg ugla kod tjemena A trougla $\triangle ABC$ siječe pravu BC u tački A_2. Dokazati da je

$$\frac{A_2B}{A_2C}=\frac{AB}{AC}$$

Rj:



Neka je dat trougao $\triangle ABC$, i neka je s simetrala spoljašnjeg ugla A trougla. Sa A_2 označimo tačku

$$\{A_2\}=s\cap p(B,C).$$

Neka je p prava takva da $p\parallel p(A,C)$ i $B\in p$. Tada, kako je $p(B,D)\parallel p(A,C)$, gdje je $\{D\}=s\cap p$, prema $T_o T_o$

$$\frac{A_2B}{A_2C}=\frac{BD}{AC} \quad \ldots(*)$$

Pokažimo još da je $BD\cong AB$ tj. da je $\triangle ABD$ jkk. Neka je E proizvoljna tačka na pp$[B,A)$ t.d. $B-A-E$. Primjetimo da je $\measuredangle A_2AE\cong\measuredangle BAD=\lambda$ (unakrsni uglovi). Kako je $p(B,D)\parallel p(A,C)$ i $p(D,A_2)$ transferzala to je $\measuredangle CAA_2\cong\measuredangle BDA_2=\lambda$. Prema tome $\measuredangle BDA\cong\measuredangle BAD=\lambda$

$\Rightarrow \triangle ABD$ jkk $\Rightarrow BD\cong BA$

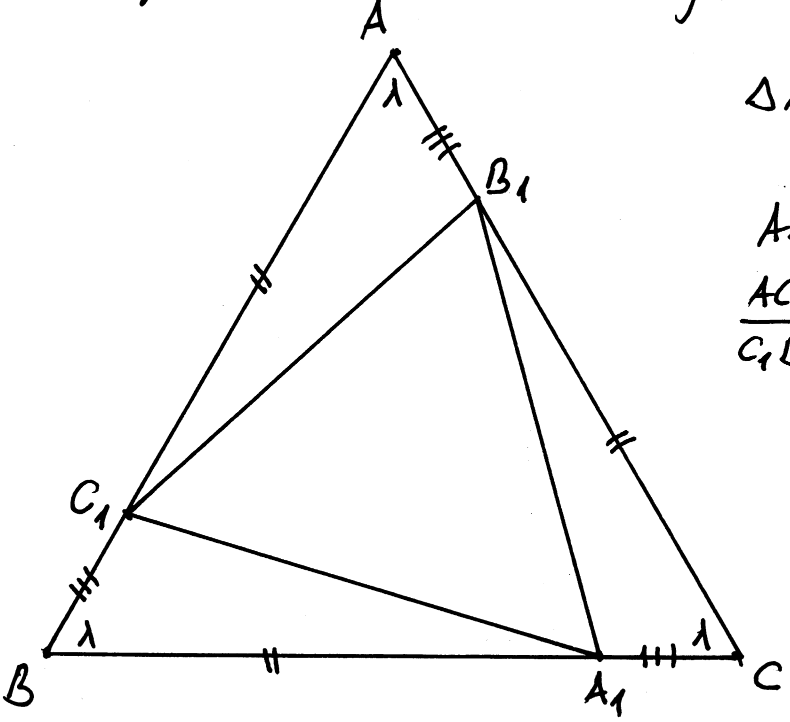
$$(*)\Rightarrow \frac{A_2B}{A_2C}=\frac{AB}{AC}$$

q.e.d.

(#) Na stranicama BC, CA i AB trougla ABC date su redom tačke A_1, B_1 i C_1, takve da je $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC_1}{C_1B}$. Dokazati da je $\Delta A_1B_1C_1$ jednakostraničan ako i samo ako je ΔABC jednakostraničan.

Rj.

„$\Leftarrow$" Pretpostavimo da je ΔABC jednakostraničan i pokažimo da tada slijedi da je $\Delta A_1B_1C_1$ jks.



ΔABC jks $\Rightarrow$ $AB \cong BC \cong CA$

$$\left.\begin{array}{l} AB \cong BC \\ \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} \end{array}\right\} \Rightarrow AC_1 \cong BA_1 \text{ i } C_1B \cong A_1C$$

$$\left.\begin{array}{l} BC \cong CA \\ \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} \end{array}\right\} \Rightarrow BA_1 \cong CB_1 \text{ i } A_1C \cong B_1A$$

$\Rightarrow$ $BA_1 \cong CB_1 \cong AC_1$; $A_1C \cong B_1A \cong C_1B$.

Kako je ΔABC jks $\Rightarrow$ $\measuredangle C_1BA_1 \cong \measuredangle A_1CB_1 \cong \measuredangle B_1AC_1 = \lambda$.

Sad prema podudarnosti SUS $\Rightarrow$ $\Delta C_1BA_1 \cong \Delta A_1CB_1 \cong B_1AC_1$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

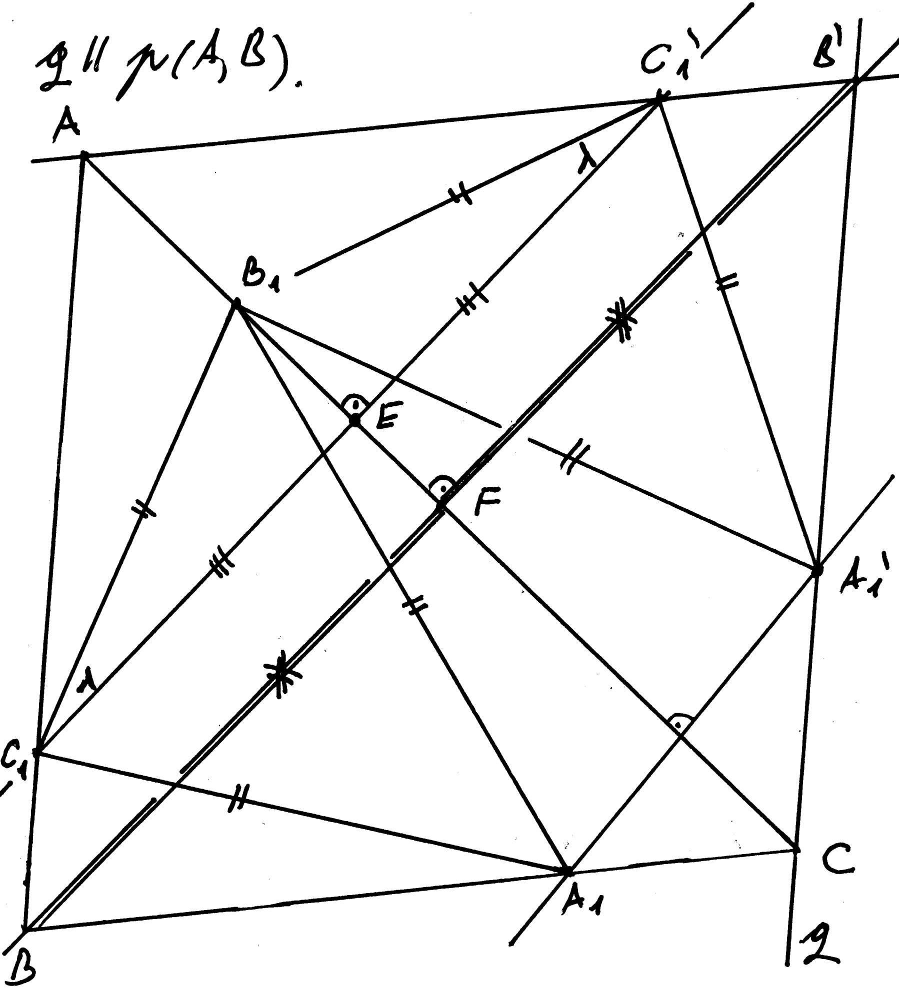
$$C_1A_1 \cong A_1B_1 \cong B_1C_1$$

$\Rightarrow$ $\Delta A_1B_1C_1$ jks q.e.d.

„$\Rightarrow$" Obrnuto, pretpostavimo da je $\Delta A_1B_1C_1$ jks i pokažimo da je tada ΔABC jks.

Nacrtajmo novu sliku. Kroz tačku A provucimo pravu p t.d. $p \parallel p(BC)$, a kroz tačku C provucimo pravu q t.d.

$g \parallel p(A,B)$.



Neka je B'

$\{B'\} = p \cap g$. Neka su C_1' i A_1' redom tačke na AB' i $B'C$ takve da

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC_1'}{C_1'B'} = \frac{B'A_1'}{A_1'C}.$$

Primjetimo da

$$\left.\begin{array}{l} BC \cong AB' \\ AB \cong B'C \\ AC \cong AC \end{array}\right\} \xRightarrow{SSS} \Delta ABC \cong \Delta ACB'$$

Sad kako je $\Delta ABC \cong \Delta CB'A$ i kako za tačke A_1, B_1, C_1 i B_1, C_1', A_1' vrijede isti odnosi to je i $\Delta B_1A_1'C_1'$ jks. Dalje primjetimo

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC_1}{C_1B} \quad i \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC_1'}{C_1'B'} \Rightarrow \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC_1'}{C_1'B} \xRightarrow{O.T.T.} p(B,B') \parallel p(C_1,C_1')$$

Slično

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} \quad i \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{B'A_1'}{A_1'C} \Rightarrow \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{CA_1'}{A_1'B} \xRightarrow{O.T.T.} p(A_1,A_1') \parallel p(B,B')$$

Neka je $\{E\} = C_1C_1' \cap AC$ i posmatrajmo ΔB_1C_1E i $\Delta B_1C_1'E$.
Prvo pokažimo da je E sredina stranice C_1C_1' pa pokažimo $\Delta B_1C_1E \cong \Delta B_1C_1'E$.
Znamo da se dijagonale paralelograma polove, pa neka se dijagonale paralelograma $ABCB'$ polove u tački F.

$$p(C_1,C_1') \parallel p(B,B') \xRightarrow{T.T.} \frac{AB'}{AC_1'} = \frac{AF}{AE} = \frac{B'F}{EC_1'} = \frac{AB}{AC_1} = \frac{BF}{C_1E} \Rightarrow \overbrace{\frac{B'F}{BF}}^{=1} = \frac{EC_1'}{C_1E}$$

$\Rightarrow EC_1' \cong C_1E \Rightarrow E$ sredina C_1C_1'

$$\left.\begin{array}{l} C_1B_1 \cong C_1'B_1 \\ \measuredangle EC_1B_1 \cong \measuredangle EC_1'B_1 = \lambda \\ B_1E \cong B_1E \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \Delta B_1C_1E \cong \Delta B_1C_1'E$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle B_1EC_1 \cong \measuredangle B_1EC_1' = 90^\circ$$

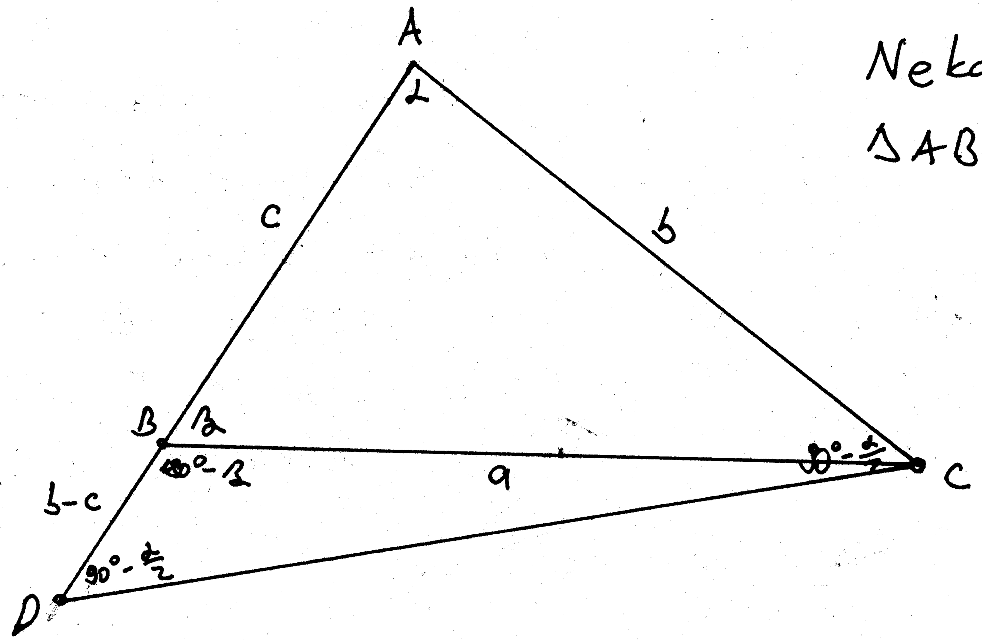
$\nearrow$ $\measuredangle BFA \cong \measuredangle B'FA = 90^\circ$

ZAVRŠITI ZA VJEŽBU

(#) Konstruisati trougao ΔABC ako su mu dati stranica a, ugao β i duž $b-c$.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat ΔABC.

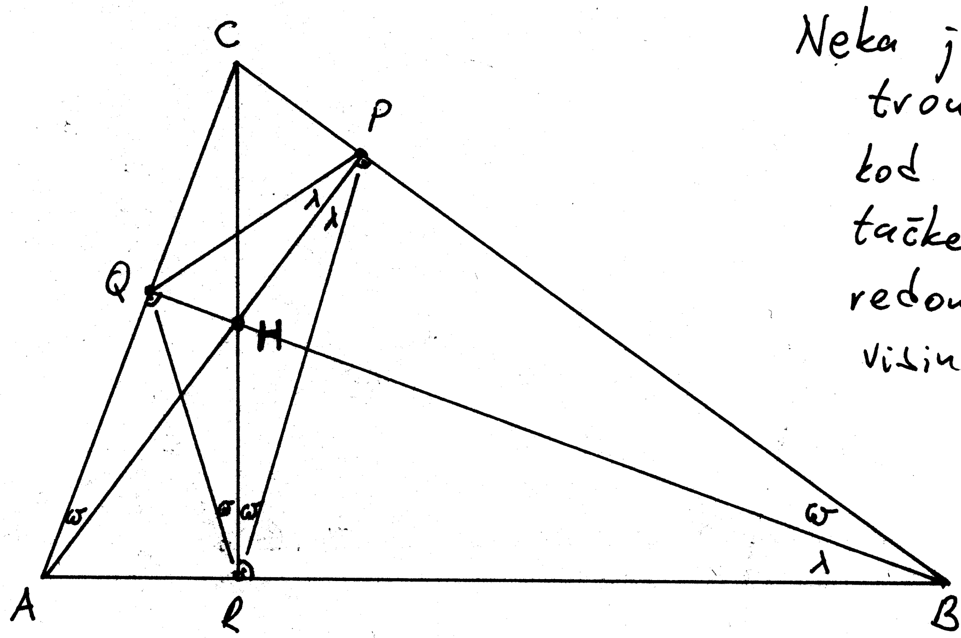
Produžimo stranicu AB do tačke D tako da je $A-B-D$ i $AD \cong AC$. Primijetimo da je $\measuredangle DBC = 180^\circ - \beta$, i da je $BD = b-c$. U ΔDCB su date dvije stranice i ugao pa ga možemo konstruisati.

Tačku A možemo dobiti na dva načina (kako?) a time i ΔABC.

(#) Konstruisati trougao ΔABC ako su date tačke P, Q i R koje su podnožja visina datog trougla.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat trougao ΔABC kod koga su tačke P, Q i R redom podnožja visina iz A, B i C.

Označimo sa H presjek visina trougla.

Primjetimo da je $\square ABPQ$ tetivni $\Rightarrow \measuredangle QPA = \measuredangle ABQ = \lambda$

$\square HRBP$ tetivni $(\measuredangle HPB + \measuredangle HRB = 180^\circ) \Rightarrow \measuredangle RBH = \measuredangle HPR = \lambda$

Prema tome $p[P,H)$ je simetrala $\measuredangle QPR$.

Dalje kako je $\measuredangle ARH + \measuredangle AQH = 180^\circ$ to je

$\square ARHQ$ tetivni $\Rightarrow \measuredangle QRH = \measuredangle QAH = \omega$

$\square ABPQ$ tetivni (zašto?) $\Rightarrow \measuredangle QAP = \measuredangle QBP = \omega$

Prema tome $p[R,H)$ je simetrala $\measuredangle QRP$.

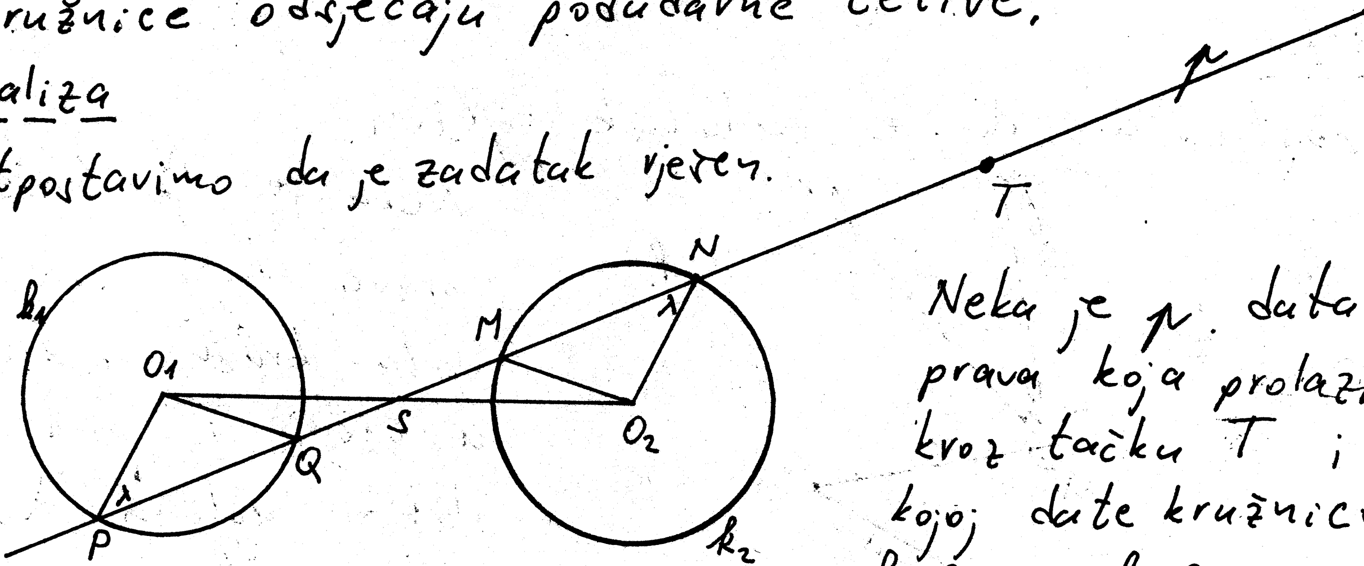
Kako se simetrale uglova u trouglu sijeku u jednoj tački to je i $p[Q,H)$ simetrala $\measuredangle RQP$.

Tačka H je presjek simetrala uglova ΔPQR pa je možemo konstruisati. Kako znamo da je $p(P,H) \perp p(B,C)$ i $\{B\} = p(B,C) \cap p(Q,H)$ i $\{C\} = p(B,C) \cap p(H,R)$ to možemo konstruisati i tačke B i C a time i ΔABC.

(#) Date su podudarne kružnice k_1 i k_2 i tačka T. Kroz tačku T konstruisati pravu na kojoj date kružnice odsjecaju podudarne tetive.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je p data prava koja prolazi kroz tačku T i kojoj date kružnice $k_1(O_1,r)$ i $k_2(O_2,r)$ odsjecaju podudarne tetive PQ i MN.

$\Delta PQO_1 \cong \Delta MO_2N$ (podud. SSS)

$\Downarrow$

$\sphericalangle O_1PQ \cong \sphericalangle MNO_2 = \lambda$. Neka je $\{S\} = p \cap O_1O_2$.

Sad imamo
$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle O_1SP \cong \sphericalangle NSO_2 \text{ (unakrsni)} \\ \sphericalangle SPO_1 \cong \sphericalangle SNO_2 = \lambda \\ PO_1 \cong NO_2 = r \end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow} \Delta PSO_1 \cong \Delta NSO_2$$

$\Downarrow$

$O_1S \cong O_2S$.

Prema tome S je sredina duži O_1O_2 pa pravu p sad nije teško konstruisati.

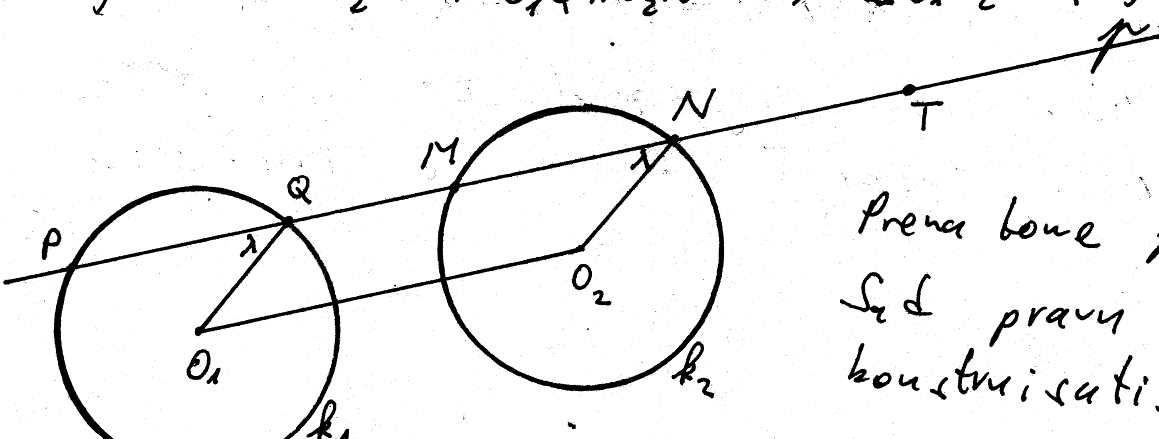
II način

Iz podudarnosti SSS $\Rightarrow$ $\Delta PQO_1 \cong \Delta MNO_2$

$\Downarrow$

$\sphericalangle O_1QP \cong \sphericalangle O_2NM = \lambda$.

Kako je $O_1Q \cong O_2N$ i $O_1Q \parallel O_2N$ $\Rightarrow$ $\square O_1O_2NQ$ je paralelogram.



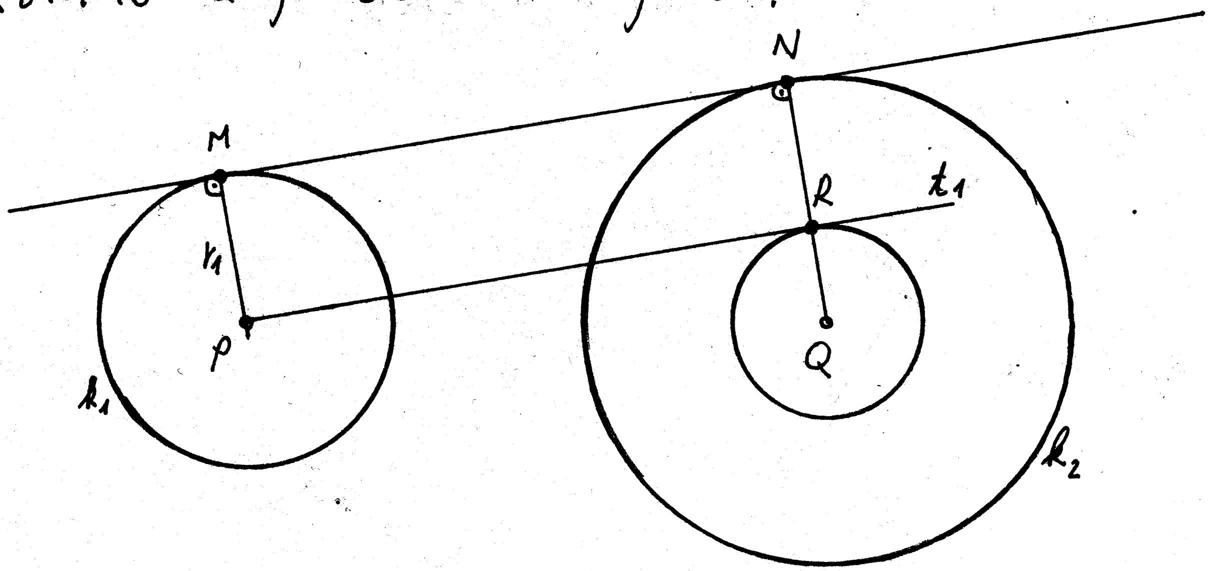
Prema tome $p \parallel O_1O_2$.

Sad pravu p možemo konstruisati.

(#) Konstruisati vanjsku zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su $k_1(P, r_1)$ i $k_2(Q, r_2)$ dvije date kružnice i neka je t njihova zajednička tangenta ($r_2 > r_1$). Označimo sa M tačku dodira k_1 i t, a sa N tačku dodira k_2 i t.

$PM \perp t$ i $QN \perp t \Rightarrow p(P,M) \parallel p(Q,N)$

Neka je $t_1 \parallel t$, $t_1 \ni P$ i $t_1 \cap NQ = \{R\}$ ($NQ > PM$).

Imamo da je $\square PRNM$ paralelogram (preciznije pravougaonik).

$QR = r_2 - r_1$, pa kako su tačke P i Q date mogu konstruisati tangentu t_1.

Tangenta t je paralelna sa t_1 i udaljena je od t_1 za dužinu r_1, pa je možemo konstruisati.