Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 10.09.2012.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija II**

Zadatak br. 1

(20%) a) Neka je $\triangle PQR$ dati raznostraničan trougao sa uglom φ kod vrha P ($\measuredangle QPR = \varphi$). Polazeći isključivo od površine pravouglog trougla ($P = \frac{a \cdot b}{2}$, a i b su katete) i definicije trigonometriskih funkcija, izvesti formulu za površinu $P = \dfrac{r \cdot q}{2} sin\varphi$ datog trougla.

(20%) b) Dat je jednakokraki trougao $\triangle ABC$ sa osnovicom BC tako da je ugao $\measuredangle BAC > 50°$. Na osnovici BC data je tačka M takva da je ugao $\measuredangle BAM = 50°$, a na kraku AC tačka N takva da je $AM \cong AN$. Koliki je ugao $\measuredangle CMN$.

(60%) c) Dat je četverougao $\square ABCD$. Konstruisan je paralelogram $\square DBCM$. Dokazati da je površina trougla $\triangle ACM$ jednaka površini datog četverougla $\square ABCD$.

Zadatak br. 2

(40%) a) Date su tačke A, M i N. Konstruisati paralelogram $\square ABCD$, tako da je M sredina stranice BC, a N sredina stranice CD.

(60%) b) Dat je $\triangle ABC$. Konstruisati pravu p paralelnu stranici AB, tako da bude $AD + EB = DE$, gdje je D tačka presjeka tražene prave p sa AC, a E presječna tačka prave p sa stranicom BC datog trougla.

Zadatak br. 3

(20%) a) Neka je I centar upisanog kruga $\triangle ABC$, ($AB < BC$), tačka S centar opisanog kruga k oko trougla $\triangle ABC$ i tačka M sredina stranice AC. Ako su P i N tačke dobijene presjekom prave $p(M, S)$ i kruga k (gdje su tačke B i N sa jedne strane, a tačka P sa druge strane prave $p(A, C)$), dokazati da je $\triangle BNI$ pravougli trougao.

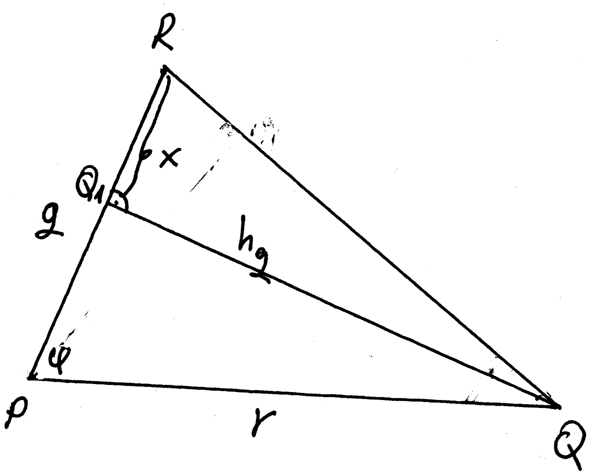
(20%) b) Dat je krug i u njegovoj unutrašnjosti tačke P i Q. Upisati u taj krug pravougli trougao čija jedna kateta sadrži tačku P, a druga tačku Q. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)

(60%) c) Dati je krug $k_1(S_1, r_1)$, prava t i tačka $T \in t$. Konstruisati krug $k(S, r)$ koji dodiruje krug k i koji dodiruje pravu t u tački T. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)

Zadaci su skinuti sa stranice pf.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

(#) Neka je ΔPQR dati raznostraničan trougao sa uglom φ kod vrha P ($\measuredangle QPR=\varphi$). Polazeći isključivo od formule za površinu pravouglog trougla ($P=\frac{a\cdot b}{2}$, a i b katete) i definicije trigonometriskih f-ja izvesti formulu za površinu datog trougla. $\underline{P=\frac{r\cdot q}{2}\sin\varphi}$.

Rj.



Neka je $QQ_1=h_q$ visina datog trougla. Tada

$$\sin\varphi=\frac{h_q}{r} \Rightarrow$$

$$h_q=r\sin\varphi \qquad \ldots(1)$$

Površina datog trougla se može izračunati po formuli $P=\frac{h_q\cdot q}{2}$. Ovo nije teško izvesti (neka je $x=RQ_1$)

$$P_{\Delta PQR}=P_{\Delta PQQ_1}+P_{\Delta QRQ_1}=\frac{(q-x)\,h_q}{2}+\frac{x\cdot h_q}{2}=\frac{q\cdot h_q}{2}$$

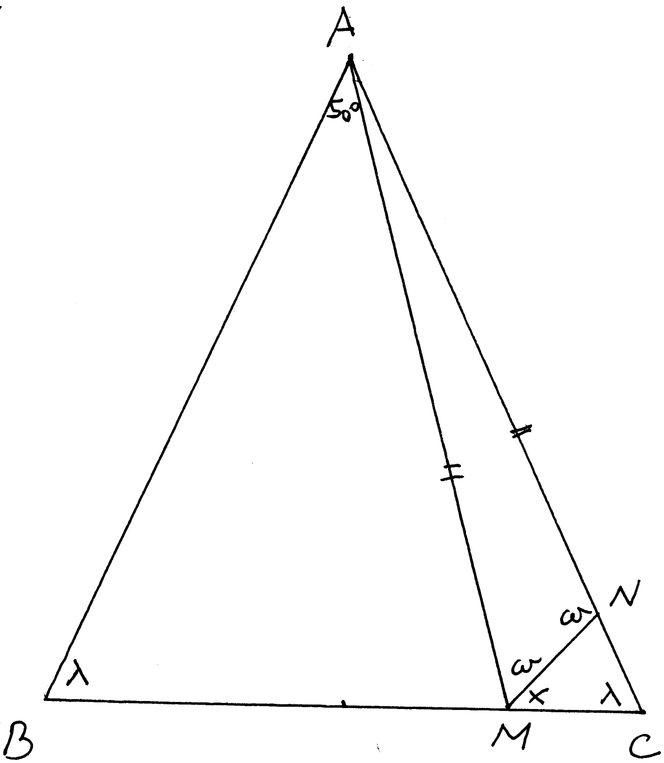
Prema tome

$$P_{\Delta PQR}=\frac{h_q\cdot q}{2}\overset{(1)}{=}\frac{r\cdot q}{2}\sin\varphi$$

q.e.d.

Zadan je jednakokraki trougao ΔABC sa osnovicom BC tako da je ugao $\measuredangle BAC > 50°$. Na osnovici BC data je tačka M takva da je ugao $\measuredangle BAM = 50°$, a na kraku AC tačka N takva da je $AM \cong AN$. Koliki je ugao $\measuredangle CMN$.

Rj.:



$\measuredangle MNA$ je vanjski ugao ΔMCN

$$\omega = x + \lambda \quad \ldots (1)$$

$\measuredangle AMC$ je vanjski ugao ΔABM

$$50° + \lambda = \omega + x \quad \ldots (2)$$

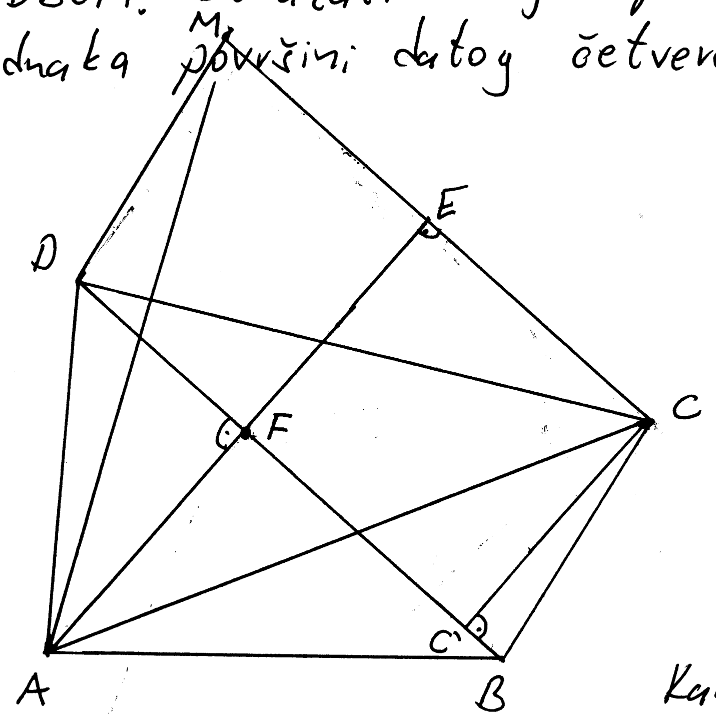
(1) + (2):
$$\omega + 50° + \lambda = x + \lambda + \omega + x$$

$$2x = 50°$$

$$x = 25°$$

(#) Dat je četverougao $\square ABCD$. Konstruisan je paralelogram $\square DBCM$. Dokazati da je površina trougla $\triangle ACM$ jednaka površini datog četverougla $\square ABCD$.

Rj.



Neka je AE visina trougla $\triangle ACM$.

Tada
$$P_{\triangle ACM} = \frac{AE \cdot CM}{2} \quad \dots (*)$$

Označimo sa F presječnu tačku od BD i AE.

Kako je $BD \parallel MC$ i $AE \perp MC$ to je $AE \perp BD \Rightarrow AF$ visina $\triangle ABD$.

$$P_{\triangle ABD} = \frac{AF \cdot BD}{2} = \frac{AF \cdot MC}{2} \quad \dots (**)$$

Posmatrajmo $\triangle BCD$, i visinu CC' iz vrha C na stranicu BD.

Imamo $CC' \parallel EF$ i $CE \parallel C'F \Rightarrow \square C'CEF$ paralelogram

$$\Rightarrow CC' \cong EF \Rightarrow P_{\triangle BCD} = \frac{CC' \cdot BD}{2} = \frac{EF \cdot MC}{2} \quad \dots (***)$$

Prema tome

$$P_{\triangle ABC} \overset{(*)}{=} \frac{AE \cdot MC}{2} = \frac{(AF + FE) \cdot MC}{2} = \frac{AF \cdot MC}{2} + \frac{FE \cdot MC}{2}$$

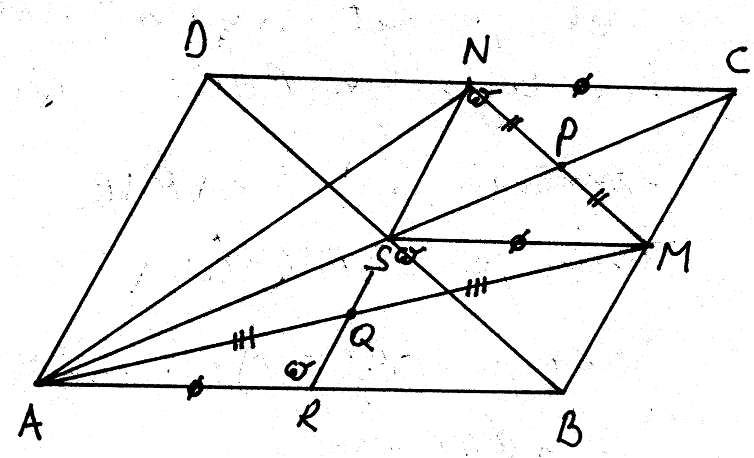
$$\underset{=}{\overset{(**) \text{ i } (***)}{=}} P_{\triangle ABD} + P_{\triangle BCD} = P_{\square ABCD}$$

q.e.d.

(#) Date su tačke A, M i N. Konstruisati paralelogram $\square ABCD$, tako da je M sredina BC, a N sredina stranice CD.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Dat je paralelogram $\square ABCD$, gdje su M sredina BC i N sredina CD.

Neka je tačka S presjek dijagonala AC i BD.

Dijagonale u paralelogramu se polove pa je S sredina dijagonala AC i BD.

S sredina BD, N sredina CD $\overset{u\ \triangle BCD}{\Longrightarrow}$ SN sred. lin. $\Rightarrow SN \parallel p(B,C)$

S sredina BD, M sredina BC $\overset{u\ \triangle DBC}{\Longrightarrow}$ SM sred. lin $\Rightarrow SM \parallel p(C,D)$

pa je $\square SMCN$ paralelogram. Neka je $\{P\} = SC \cap MN$

$\Rightarrow$ P sredina MN i P sredina SC tj. $MP \cong NP$.

Neka je $\{R\} = p(N,S) \cap AB$. Tad

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle ASR \cong \measuredangle NSC \\ \measuredangle ARS \cong \measuredangle SNC = \omega \\ AS \cong SC \end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow} \triangle ARS \cong \triangle CNS \Downarrow AR \cong CN \quad \ldots (*)$$

Neka je $\{Q\} = SR \cap AM$. Tada:

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle AQR \cong \measuredangle SQM \\ \measuredangle QRA \cong \measuredangle QSM = \omega \\ AR \cong SM \end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow} \triangle ARQ \cong \triangle MSQ \Downarrow AQ \cong QM \quad \ldots (**)$$

Na osnovu (*) i (**) $\Rightarrow$ S težište $\triangle AMN$.

Tačku S možemo konstruisati, a time i $p(N,C)$ i $p(M,C)$.
Sad nije problem dobiti tačke B i D a time i $\square ABCD$.

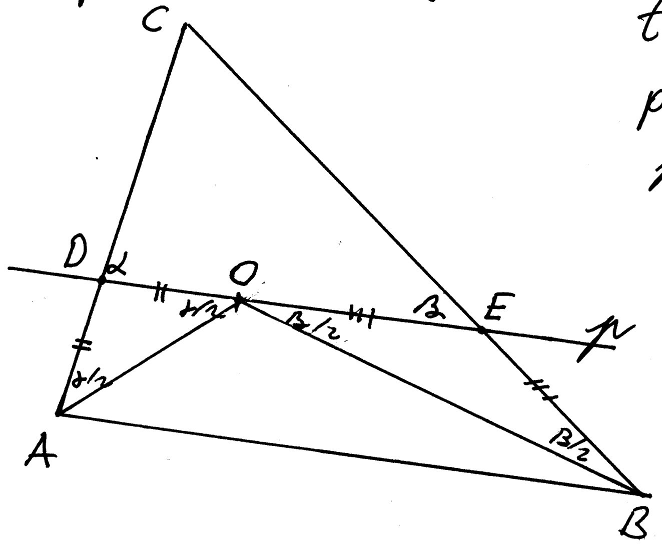
(#) Dat je ΔABC. Konstruisati pravu p paralelnu stranici AB, tako da bude $AD+EB=DE$, gdje je D tačka presjeka tražene prave p sa AC, a E presječna tačka prave p sa stranicom BC datog trougla.

Rj:

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je ΔABC dati trougao, i neka je p tražena prava takva da $D, E \in p$, $p \parallel AB$, $p \cap AC = \{D\}$, $p \cap \{B, C\} = \{E\}$ i

$$AD + BE = DE.$$



Na duži DE izaberimo tačku O takvu da $AD \cong DO$, i
Kako je $AD+BE=DE$ to je $OE \cong BE$.

$p \parallel AB$ i $p(A,C)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle BAC \cong \measuredangle EDC = \alpha$.

$p \parallel AB$ i $p(B,C)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle ABC \cong \measuredangle DEC = \beta$.

$\measuredangle EDC = \alpha$ je vanjski ugao jednakokrakog $\Delta AOD \Rightarrow$

$\Rightarrow \measuredangle AOD \cong \measuredangle OAD = \frac{\alpha}{2}$.

Ugao $\measuredangle DEC = \beta$ je vanjski ugao jkk $\Delta OBE \Rightarrow$

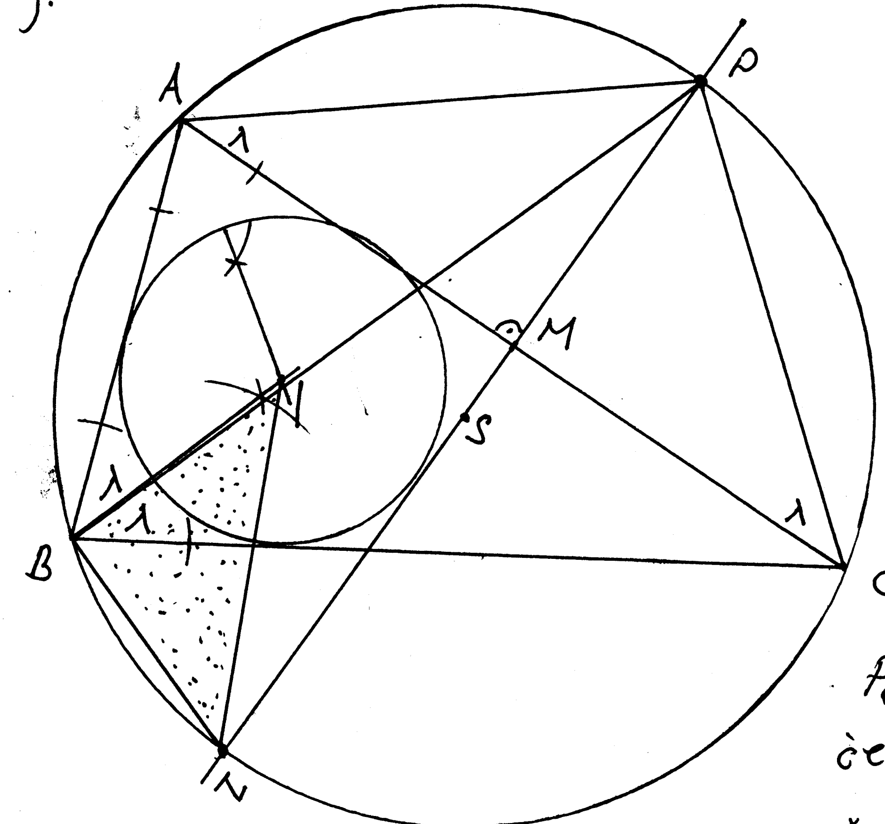
$\Rightarrow \measuredangle OBE \cong \measuredangle BOE = \frac{\beta}{2}$.

$$\measuredangle OAB = \alpha/2 \quad i \quad \measuredangle OBA = \beta/2$$

Kako je dat ΔABC to su dati i uglovi α i β pa tačku O nije teško konstruisati. Kako $O \in p$ i $p \parallel AB$ to nije teško konstruisati i pravu p.

(#) Neka je I centar upisanog kruga $\triangle ABC$ ($AB < BC$), tačka S centar opisanog kruga k oko trougla $\triangle ABC$ i tačka M sredina stranice AC. Ako su P i N tačke dobijene presjekom prave $p(M,S)$ i kruga k (gdje su tačke B i N sa jedne strane, a tačka P sa druge strane prave $p(A,C)$), dokazati da je $\triangle BNI$ pravougli.

Rj.



Posmatrajmo trouglove $\triangle AMP$ i $\triangle PMC$. Imamo

$AM \cong MC$ (M sredina AC)
$\sphericalangle AMP \cong \sphericalangle CMP = 90^\circ$
(S-M-P i tačka S leži na simetrali stranice AC
$PM \cong PM$

$\overset{SUS}{\Longrightarrow}$ $\triangle AMP \cong \triangle CMP$

$\Downarrow$

$\sphericalangle PAM \cong \sphericalangle PCM = \lambda$

Posmatrajmo sad tetivni četverougao $\square BCPA$. Imamo

$\sphericalangle ABP \cong \sphericalangle PCA = \lambda$ i

$\sphericalangle PBC \cong \sphericalangle PAC = \lambda$

$\Rightarrow$ $p[B,P)$ je simetrala ugla $\sphericalangle ABC$ tj. tačka $I \in BP$.

Ugao nad prečnikom je prav pa $\sphericalangle NBP = 90^\circ$ tj.

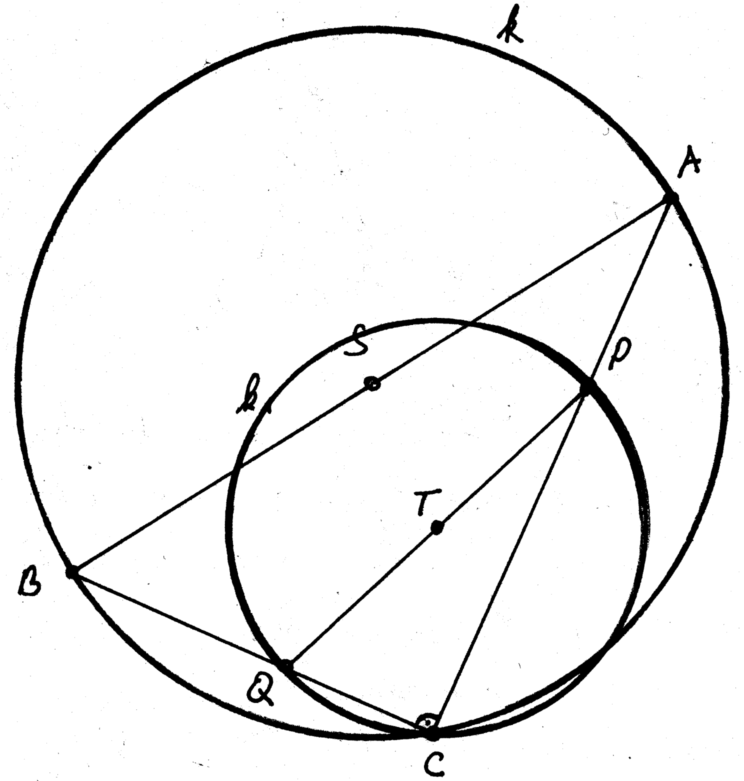
$\sphericalangle NBI = 90^\circ$ $\Rightarrow$ $\triangle NBI$ je pravougli

q.e.d.

(#) Data je kružnica i u njenoj unutrašnjosti tačke P i Q. Upisati u tu kružnicu pravougli trougao čija jedna kateta sadrži tačku P, a druga tačku Q.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je data kružnica $k(S, SA)$ u čiju je unutrašnjost upisan pravougli ΔABC sa hipotenuzom AB. Neka su tačke P i Q takve da $P \in AC$ i $Q \in BC$.

Primjetimo da je $\measuredangle BCA$ ugao nad prečnikom.

Ako oko ΔPQC opišemo kružnicu, kako je $\measuredangle QCP = 90°$ to je centar opisane kružnice k_1 oko ΔPQR u tački T (sredini duži PQ).

Kako je kružnica k data, a možemo naći sredinu T duži PQ to možemo konstruisati tačku C a time i ΔABC.

(#) Konstruisati kružnicu koja dodiruje datu kružnicu i datu pravu u datoj tački te prave.

Rj: Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $k(S,r)$ tražena kružnica koja dodiruje datu pravu t u datoj tački T i koja dodiruje datu kružnicu $k_1(S_1,r_1)$ u tački P. Primjetimo da je $p(S,T) \perp t$ i da je $S-P-S_1$ (zato što je P dodirna tačka kružnica k i k_1). Neka je n prava koja prolazi kroz S_1 i $n \perp t$. Označimo sa $\{R\} = n \cap t$ i $\{M,N\} = n \cap k_1$ tako da je $R-M-N$.

Pokažimo da duž SS_1 siječe duž TN u tački P.

Posmatrajmo trouglove $\triangle PNS_1$ i $\triangle PTS$.

$p(S,T) \parallel n$ i $p(S,S_1)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle TSP \cong \measuredangle NS_1P = \varepsilon$

$\triangle SPT$ jkk $\Rightarrow \measuredangle STP \cong \measuredangle SPT = \omega$ i $\measuredangle S_1NP \cong \measuredangle NPS_1 = \omega$

$p(S,S_1)$, $P \in SS_1$, $\measuredangle SPT = \measuredangle S_1PN = \omega \Rightarrow$ uglovi $\measuredangle SPT$ i $\measuredangle NPS_1$ su unakrsni uglovi $\Rightarrow NT \cap SS_1 = \{P\}$.

Kako pravu n možemo konstruisati to možemo konstruisati i tačku P a time i tačku S ($\{S\}$ = simetrala duži $PT \cap p(S,T)$)

Sad možemo konstruisati traženu kružnicu $k(S, ST)$.